Solutionnaire du chapitre 6

1. Pour avoir de l'interférence destructive, le déphasage doit être égal à un nombre impair de π.

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi$$

On doit donc trouver la différence de phase entre les ondes.

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi$$

On doit donc trouver les distances des sources. Les distances sont (en posant que l'onde 2 est celle qui arrive du haut-parleur B)

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(1m)^2 + (2,4m)^2} \\ r_2 &= 2,4m \end{aligned}$$

La différence de marche est donc

$$\begin{aligned} \Delta r &= 2,4m - \sqrt{(1m)^2 + (2,4m)^2} \\ &= -0,2m \end{aligned}$$

$\Delta\phi_T$ est donc

$$\begin{aligned} \Delta\phi_T &= -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi \\ &= -\frac{-0,2m}{\lambda}\cdot 2\pi \\ &= \frac{0,2m}{\lambda}\cdot 2\pi \end{aligned}$$

Comme il n'y a pas de déphasage entre les sources ni de réflexion, ce déphasage est le déphasage total

$$\Delta\phi = \frac{0,2m}{\lambda}\cdot 2\pi$$

La condition d'interférence destructive devient donc

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi$$
$$\frac{0,2m}{\lambda}\cdot 2\pi = (2m+1)\pi$$

En isolant λ, on arrive a

$$\frac{0,2m}{\lambda}\cdot 2 = (2m+1)$$
$$\lambda = \frac{0,4m}{2m+1}$$

Pour avoir la fréquence minimale, il faut la longueur d'onde maximale. Il faut avoir le plus petit diviseur positif, qu'on obtient avec $m = 0$. On a donc

$$\lambda_{\max} = \frac{0,4m}{2\cdot 0+1} = 0,4m$$

La fréquence minimale est donc

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \frac{v}{\lambda_{\max}} \\ &= \frac{340\frac{m}{s}}{0,4m} \\ &= 850Hz \end{aligned}$$

2. Pour avoir de l'interférence constructive, le déphasage doit être égal à un nombre pair de π.

$$\Delta\phi = 2m\pi$$

On doit donc trouver la différence de phase entre les ondes.

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi$$

On doit donc trouver les distances des sources. Les distances sont (en posant que l'onde 1 est celle qui se réfléchit sur le mur)

$$r_1 = 2\sqrt{(3m)^2 + d^2}$$
$$r_2 = 6m$$

La différence de marche est donc

$$\Delta r = 6m - 2\sqrt{(3m)^2 + d^2}$$

Il nous faut aussi la longueur d'onde du signal. Cette longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{v}{f} \\ &= \frac{343\frac{m}{s}}{490Hz} \\ &= 0,7m\end{aligned}$$

$\Delta\phi_T$ est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi_T &= -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi \\ &= -\frac{6m - 2\sqrt{(3m)^2 + d^2}}{0,7m}\cdot 2\pi \\ &= \frac{2\sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m}{0,7m}\cdot 2\pi\end{aligned}$$

Le son réfléchi sur un mur étant inversé, $\Delta\phi_R$ est

$$\begin{aligned}\Delta\phi_R &= \phi_{2R} - \phi_{1R} \\ &= 0 - \pi \\ &= -\pi\end{aligned}$$

Comme il n'y a pas de déphasage entre les sources, le déphasage total est

$$\Delta\phi = \frac{2\sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m}{0,7m}\cdot 2\pi - \pi$$

La condition d'interférence constructive devient donc

$$\Delta\phi = 2m\pi$$
$$\frac{2\sqrt{(3\text{m})^2+d^2}-6\text{m}}{0,7\text{m}}\cdot 2\pi - \pi = 2m\pi$$

Remarquons ici que puisque les deux termes de gauche sont positifs, le terme de droite doit aussi être positif, ce qui élimine toutes les valeurs de *m* négatives.

En isolant *d,* on arrive a

$$\frac{2\sqrt{(3\text{m})^2+d^2}-6\text{m}}{0,7\text{m}}\cdot 2 - 1 = 2m$$
$$\frac{2\sqrt{(3\text{m})^2+d^2}-6\text{m}}{0,7\text{m}}\cdot 2 = 2m+1$$
$$2\cdot\sqrt{(3\text{m})^2+d^2}-6\text{m} = \frac{2m+1}{2}\cdot 0,7\text{m}$$
$$2\cdot\sqrt{(3\text{m})^2+d^2} = \frac{2m+1}{2}\cdot 0,7\text{m}+6\text{m}$$
$$\sqrt{(3\text{m})^2+d^2} = \frac{2m+1}{4}\cdot 0,7\text{m}+3\text{m}$$
$$(3\text{m})^2+d^2 = \left(\frac{2m+1}{4}\cdot 0,7\text{m}+3\text{m}\right)^2$$
$$d^2 = \left(\frac{2m+1}{4}\cdot 0,7\text{m}+3\text{m}\right)^2-(3\text{m})^2$$

Voici ce qu'on obtient selon la valeur de *m.*

$m = 0$	$d^2 = 1{,}080625\ \text{m}^2$
$m = 1$ et plus	d^2 est plus grand que $1{,}080625\ \text{m}^2$

La valeur minimale se trouve donc avec $m = 0$. La distance est alors

$$d = \sqrt{1,080625m^2}$$
$$= 1,0395m$$

3. On va trouver l'intensité à partir de l'amplitude résultante. Cette amplitude est

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\phi) + A_2^2}$$

Mais avec la lumière, l'amplitude est notée E_0 plutôt que A. L'amplitude résultante est donc

$$E_{0tot} = \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\left(\Delta\phi\right) + E_{02}^2}$$

On doit donc trouver la différence de phase entre les ondes.

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi$$

On doit donc trouver les distances des sources. Les distances sont (en posant que l'onde 2 est celle qui se réfléchit sur le mur)

$$\begin{aligned} r_1 &= 6m \\ r_2 &= 2\sqrt{\left(3m\right)^2 + \left(2m\right)^2} \end{aligned}$$

La différence de marche est donc

$$\begin{aligned} \Delta r &= 2\cdot\sqrt{\left(3m\right)^2 + \left(2m\right)^2} - 6m \\ &= 1,211m \end{aligned}$$

et $\Delta\phi_T$ est

$$\begin{aligned} \Delta\phi_T &= -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi \\ &= -\frac{1,211m}{1,4m}\cdot 2\pi \\ &= -5,435rad \end{aligned}$$

L'onde réfléchie sur un mur étant inversée, $\Delta\phi_R$ est

$$\Delta\phi_R = \pi$$

Comme il n'y a pas de déphasage entre les sources, le déphasage total est

$$\Delta\phi = -5,435 + \pi = -2,294rad$$

Puisque $E_{02} = 0,7E_{01}$, l'amplitude est

$$\begin{aligned} E_{0tot} &= \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\Delta\phi) + E_{02}^2} \\ &= \sqrt{E_{01}^2 + 2\cdot E_{01}\cdot 0,7E_{01}\cdot\cos(-2,294) + (0,7\cdot E_{01})^2} \\ &= \sqrt{E_{01}^2\cdot\left(1 + 2\cdot 0,7\cdot\cos(-2,294) + (0,7)^2\right)} \\ &= \sqrt{E_{01}^2\cdot 0,5637} \\ &= E_{01}\cdot 0,7508 \end{aligned}$$

Ainsi, l'intensité est de

$$\begin{aligned} I_{tot} &= \frac{1}{2}cn\varepsilon_0 E_{0tot}^2 \\ &= \frac{1}{2}cn\varepsilon_0 (0,7508\cdot E_{01})^2 \end{aligned}$$

Sans réflexion, l'amplitude de l'onde aurait été simplement E_{01} et l'intensité aurait été de

$$I_1 = \frac{1}{2}cn\varepsilon_0 E_{01}^2$$

En divisant une intensité par l'autre, on a

$$\begin{aligned} \frac{I_{tot}}{I_1} &= \frac{\frac{1}{2}cn\varepsilon_0 (0,7508\cdot E_{01})^2}{\frac{1}{2}cn\varepsilon_0 E_{01}^2} \\ &= (0,7508)^2 \\ &= 0,5637 \end{aligned}$$

L'intensité est donc 56,37% de l'intensité qu'il y aurait s'il y avait seulement l'onde qui arrive directement de la source.

4. On sait que l'amplitude résultante est donnée par

$$E_{0tot} = \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\Delta\phi) + E_{02}^2}$$

Pour connaitre l'amplitude totale, on doit donc connaitre les amplitudes et le déphasage.

On peut facilement trouver l'amplitude de l'onde venant de la source A. Cette amplitude est

$$I_1 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_{01}^2$$
$$0,001\tfrac{W}{m^2} = \frac{1}{2}\cdot 3\times 10^8\ \tfrac{m}{s}\cdot 8,854\times 10^{-12}\ \tfrac{m^2}{NC^2}\cdot E_{0A}^2$$
$$E_{0A} = 0,8677\ \tfrac{N}{C}$$

Pour trouver l'amplitude de l'onde 2, on utilise le fait que l'intensité diminue avec le carré de la distance. Avec le rapport des intensités, on obtient

$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{\frac{1}{2} cn\varepsilon_0 E_{0B}^2}{\frac{1}{2} cn\varepsilon_0 E_{0A}^2}$$
$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{E_{0B}^2}{E_{0A}^2}$$
$$\frac{\frac{P}{4\pi r_B^2}}{\frac{P}{4\pi r_A^2}} = \frac{E_{0B}^2}{E_{0A}^2}$$
$$\frac{r_A^2}{r_B^2} = \frac{E_{0B}^2}{E_{0A}^2}$$
$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{E_{0B}}{E_{0A}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{E_{0B}}{E_{0A}} &= \frac{r_A}{r_B} \\ &= \frac{300m}{\sqrt{(300m)^2 + (200m)^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde 2 est donc

$$\begin{aligned} E_{0B} &= \frac{3}{\sqrt{13}} E_{0A} \\ &= \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 0,8677 \tfrac{N}{C} \\ &= 0,7220 \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Reste à trouver le déphasage. Comme il n'y a que le déphasage dû à la différence de distance, le déphasage est

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -\frac{r_B - r_A}{\lambda} 2\pi \\ &= \frac{\sqrt{(300m)^2 + (200m)^2} - 300m}{3\times 10^8 \tfrac{m}{s} / 100\,\text{MHz}} \cdot 2\pi \\ &= \frac{60,555m}{3m} \cdot 2\pi \\ &= 126,826 rad \end{aligned}$$

Ainsi, l'amplitude est

$$\begin{aligned} E_{0tot} &= \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\Delta\phi) + E_{02}^2} \\ &= \sqrt{\left(0,8677 \tfrac{N}{C}\right)^2 + 2 \cdot 0,8677 \tfrac{N}{C} \cdot 0,7220 \tfrac{N}{C} \cdot \cos(126,826) + \left(0,7220 \tfrac{N}{C}\right)^2} \\ &= 1,3311 \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$\begin{aligned} I_{tot} &= \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_{01}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3\times 10^8 \tfrac{m}{s} \cdot 8,854\times 10^{-12} \tfrac{m^2}{NC^2} \cdot \left(1,3311 \tfrac{N}{C}\right)^2 \\ &= 2,353\times 10^{-3} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

5. Le déphasage est

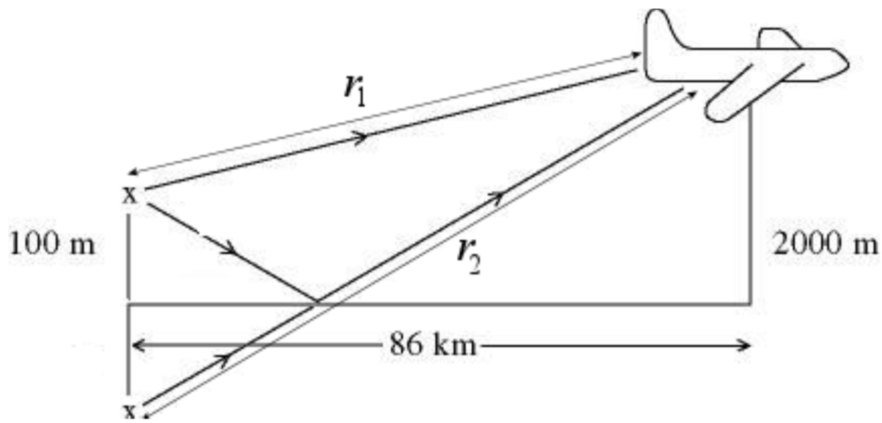
$$\Delta\phi = \Delta\phi_T + \Delta\phi_S + \Delta\phi_R$$

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi$$

On doit trouver la différence de marche et la longueur d'onde.

Les distances sont (en posant que l'onde 2 est celle qui se réfléchie)



$$r_1 = \sqrt{(86000m)^2 + (1900m)^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(86000m)^2 + (2100m)^2}$$

La différence de marche est donc

$$\begin{aligned}\Delta r &= \sqrt{(86000m)^2 + (2100m)^2} - \sqrt{(86000m)^2 + (1900m)^2} \\ &= 4,6499m\end{aligned}$$

La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{c}{f} \\ &= \frac{3\times10^8 \frac{m}{s}}{120\times10^6 Hz} \\ &= 2,5m\end{aligned}$$

$\Delta\phi_T$ est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi_T &= -\frac{\Delta r}{\lambda}2\pi \\ &= -\frac{-4,6499m}{2,5m}\cdot 2\pi \\ &= -11,686rad\end{aligned}$$

$\Delta\phi_S$ est nulle puisque les deux ondes proviennent de la même source.

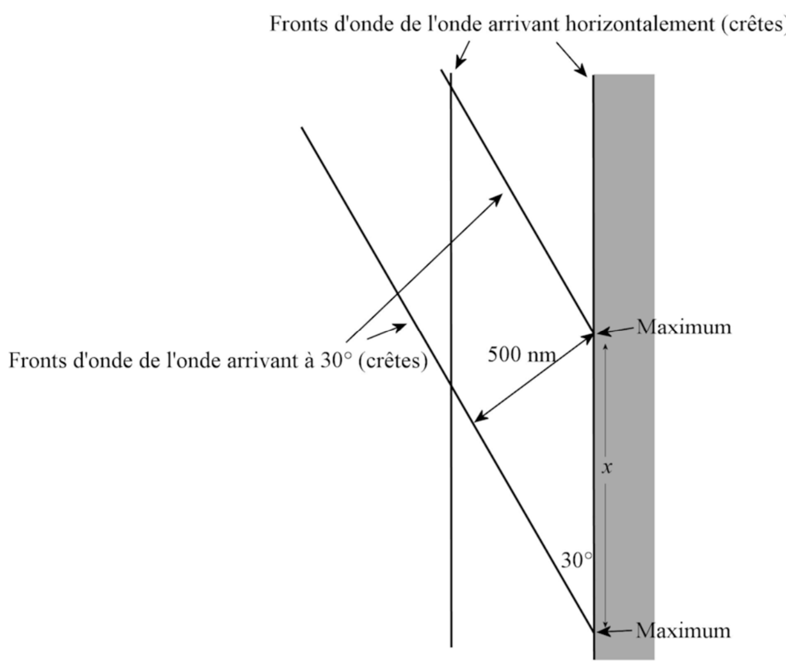
Puisque l'onde réfléchie est inversée, $\Delta\phi_R$ est

$$\Delta\phi_R = \pi$$

Le déphasage total est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= -11,686rad + \pi \\ &= -8,545rad\end{aligned}$$

6. Il y a de l'interférence constructive quand les crêtes se croisent. Si on considère que les fronts d'onde sont les crêtes, la distance entres les maximums sur l'écran est donc égale à la distance entre deux endroits où les fronts d'ondes se croisent.



On forme alors un triangle rectangle (en bas à droite). On a alors

$$\sin 30° = \frac{500nm}{x}$$
$$x = 1000nm$$

7. La distance entre les fentes se trouve avec

$$d \sin\theta = m\lambda$$

Pour la trouver, il nous faut l'angle du 4e maximum.

L'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{1cm}{200cm}$$
$$\theta = 0,2865°$$

On trouve ensuite la distance avec

$$d \sin\theta = m\lambda$$
$$d \cdot \sin(0,2865°) = 4 \cdot 600nm$$
$$d = 4,8\times 10^{-4} m = 0,48mm$$

8. On va trouver la position à partir de l'angle. L'angle est donné par

$$d \sin\theta = m\lambda$$
$$0,1\times 10^{-3} m \cdot \sin\theta = 5 \cdot 500nm$$
$$\theta = 1,4325°$$

La position du maximum est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(1,4325°) = \frac{y}{160cm}$$
$$y = 4,001cm$$

9. On va trouver la longueur d'onde avec

$$d\sin\theta = m\lambda$$

On ne connait pas d et l'angle, mais on peut trouver ce que vaut $d\sin\theta$ avec ce qu'on sait concernant la lumière qui a une longueur d'onde de 550 nm puisque les maximums sont à la même position.

Avec la longueur d'onde de 550 nm, on a

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$d\sin\theta = 5\cdot 550nm$$
$$d\sin\theta = 2750nm$$

Pour la lumière ayant une longueur d'onde inconnus, on a donc

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$2750nm = 4\lambda$$
$$\lambda = 687{,}5nm$$

10. On va trouver la distance de l'écran avec

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$

La figure nous montre que y = 11,5 mm pour le troisième minimum (m =2). Il nous manque l'angle.

L'angle est du 3^{e} minimum est

$$d\sin\theta = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\lambda$$
$$0{,}2\times10^{-3}m\cdot\sin\theta = \left(2+\tfrac{1}{2}\right)\cdot 632\times10^{-9}m$$
$$\theta = 0{,}4526°$$

On a donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\left(0{,}4526°\right) = \frac{1{,}15cm}{L}$$
$$L = 145{,}6cm$$

11. Dans l'expérience de Young, on peut trouver la différence de marche avec le déphasage avec

$$\Delta\phi = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$
$$2 = \left| -\frac{\Delta r}{450\times10^{-9} m} \cdot 2\pi \right|$$
$$\Delta r = 143,24nm$$

Comme la différence de marche est

$$\Delta r = d \sin\theta$$

on a

$$143,24\times10^{-9} m = 0,2\times10^{-3} m \cdot \sin\theta$$
$$\theta = 0,041°$$

La position se trouve alors avec

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(0,041°) = \frac{y}{240cm}$$
$$y = 0,1719cm$$

12. a)

Il y a 9 fentes puisqu'il y a 7 petits maximums. (Le nombre de fentes est toujours égal au nombre de petits maximums + 2.)

b) On va trouver la distance entre les fentes à partir de la position d'un grand maximum sur l'écran qui est donnée par

$$d \sin\theta = m\lambda$$

Il nous faut l'angle.

On peut prendre n'importe quel maximum. Ici on va prendre le maximum d'ordre 2 qui est à y = 5 cm. À cette position, l'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{5cm}{30cm}$$
$$\theta = 9,46°$$

De là, on trouve la distance avec

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$d\cdot\sin(9,46°) = 2\cdot 500\times10^{-9}m$$
$$d = 6,083\times10^{-6}m = 6,083\mu m$$

c) L'intensité étant $N^2 I_1$ avec N fentes, l'intensité est $81I_1$ avec 9 fentes.

13. a) La valeur maximale de *m* est

$$m < \frac{d}{\lambda} = \frac{\frac{1}{300}\times10^{-3}m}{650\times10^{-9}m} = 5,13$$

La valeur maximale de *m* est donc de 5. Il y a donc 11 maximums au total (les maximums m = 1 à m = 5 à droite, les maximums m = 1 à m = 5 à gauche et le maximum central).

b) On trouve la distance avec

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$

On a déjà L, on doit trouver l'angle.

L'angle du premier maximum est

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$\tfrac{1}{300}\times10^{-3}m\cdot\sin\theta = 1\cdot 650\times10^{-9}m$$
$$\theta = 11,24°$$

La position est alors

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(11,24°) = \frac{y}{240cm}$$
$$y = 47,7cm$$

14. a) On va trouver la longueur d'onde avec

$$d\sin\theta = m\lambda$$

On a déjà d, on doit trouver l'angle.

L'angle du premier maximum est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{43,6cm}{100cm}$$
$$\theta = 23,56°$$

On a donc

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$\tfrac{1}{800}\times 10^{-3}m\cdot\sin(23,56°) = 1\cdot\lambda$$
$$\lambda = 499,6nm$$

b) On va trouver la position de 2^{e} maximum avec

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$

On a déjà L, on doit trouver l'angle.

L'angle du deuxième maximum est

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$\tfrac{1}{800}\times 10^{-3}m\cdot\sin\theta = 2\cdot 499,6nm$$
$$\theta = 53,07°$$

La position est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(53{,}07°) = \frac{y}{100cm}$$
$$y = 133{,}02cm$$

La distance entre le maximum d'ordre 2 et le maximum d'ordre 1 est donc

$$x = 133{,}02cm - 43{,}6cm = 89{,}42cm$$

c) La valeur maximale de *m* est

$$m < \frac{d}{\lambda} = \frac{\frac{1}{800}\times10^{-3}m}{499{,}6\times10^{-9}m} = 2{,}50$$

La valeur maximale de *m* est donc de 2. Il y a donc 5 maximums au total (les maximums *m* = 1 et *m* = 2 à droite, les maximums *m* = 1 et *m* = 2 à gauche et le maximum central).

15. On va trouver la position des maximums avec

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$

On a déjà *L*, on doit trouver l'angle.

Pour la première longueur d'onde, l'angle de premier maximum est

$$d\sin\theta = m\lambda$$
$$\tfrac{1}{300}\times10^{-3}m\cdot\sin\theta = 1\cdot589{,}0nm$$
$$\theta = 10{,}1776°$$

La position est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(10{,}1776°) = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 35{,}9050cm$$

Pour la deuxième longueur d'onde, l'angle de premier maximum est

$$d \sin \theta = m\lambda$$
$$\tfrac{1}{300} \times 10^{-3} m \cdot \sin \theta = 1 \cdot 589,6nm$$
$$\theta = 10,1881°$$

La position est donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(10,1881°) = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 35,9427cm$$

La distance entre ces maximums est donc

$$x = 35,9427cm - 35,9050cm = 0,0377cm$$

16. On va trouver la position du maximum d'ordre 2 avec

$$\tan \theta_2 = \frac{y}{L}$$

On a déjà *L*, mais on doit trouver l'angle (qu'on appelle ici θ_2)

L'angle du 2e maximum se trouve avec

$$d \sin \theta = m\lambda$$
$$d \sin \theta_2 = 2\lambda$$

Toutefois, on ne connait pas d et λ.

On peut trouver l'angle avec ce qu'on sait du premier maximum. Pour le premier maximum, on a

$$d \sin \theta = m\lambda$$
$$d \sin \theta_1 = \lambda$$

On a donc les 2 équations suivantes.

$$d \sin \theta_2 = 2\lambda$$
$$d \sin \theta_1 = \lambda$$

En divisant les équations, on a

$$\frac{d\sin\theta_2}{d\sin\theta_1}=\frac{2\lambda}{\lambda}$$
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=2$$

Pour trouver l'angle, on a donc besoin de l'angle de premier maximum. Cet angle est

$$\tan\theta_1=\frac{y}{L}$$
$$\tan\theta_1=\frac{35cm}{100cm}$$
$$\theta_1=19,29°$$

On a donc

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=2$$
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin(19,29°)}=2$$
$$\theta_2=41,35°$$

La position est donc

$$\tan\theta_2=\frac{y}{L}$$
$$\tan(41,35°)=\frac{y}{100cm}$$
$$y=88,02cm$$

17. a) L'intensité de la lumière avec *N* fentes est

$$I_N=I_1\frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

Le maximum commence et se termine quand l'intensité est nulle. On a une intensité nulle quand le sinus au numérateur est nul (mais sans que le dénominateur soit nulle, car alors on a 0/0 qui ne fait pas 0). On a donc

$$\sin\left(\tfrac{N\Delta\phi}{2}\right)=0$$
$$\frac{N\Delta\phi}{2}=M\pi$$
$$\frac{\Delta\phi}{2}=\frac{M}{N}\pi$$

où M est un entier (mais qui ne peut pas être un nombre entier de N, car le dénominateur est alors nul et cela correspond au déphasage des grands maximums).

Le grand maximum d'ordre 1 est à

$$\frac{\Delta\phi}{2}=\pi$$

Cela signifie que le maximum au premier ordre se produit quand $M = N$. Le minimum qui précède est donc à $M = N - 1$ et celui qui suit est donc à $M = N + 1$. L'écart de différence de phase entre les deux minimums (qui est la largeur du maximum central) est donc

$$\frac{\Delta\phi_{\text{min après}}}{2}-\frac{\Delta\phi_{\text{min avant}}}{2}=\frac{N+1}{N}\pi-\frac{N-1}{N}\pi$$
$$\frac{\Delta\phi_{\text{min après}}}{2}-\frac{\Delta\phi_{\text{min avant}}}{2}=\frac{2\pi}{N}$$
$$\Delta\phi_{\text{min après}}-\Delta\phi_{\text{min avant}}=\frac{4\pi}{N}$$

Avec des fentes, le déphasage est

$$\Delta\phi=\frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi$$

On a donc

$$\frac{d\sin\theta_{\text{min après}}}{\lambda}2\pi - \frac{d\sin\theta_{\text{min avant}}}{\lambda}2\pi = \frac{4\pi}{N}$$
$$\sin\theta_{\text{min après}} - \sin\theta_{\text{min avant}} = \frac{2\lambda}{Nd}$$
$$\Delta(\sin\theta) = \frac{2\lambda}{Nd}$$

Puisque l'écart entre les angles est petit, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Delta(\sin\theta) &= \frac{d\sin\theta}{d\theta}\Delta\theta \\ &= \cos\theta\Delta\theta\end{aligned}$$

L'angle est donc

$$\cos\theta\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd}$$
$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd\cos\theta}$$

On voit bien que la largeur des maximums diminue avec N.

Note: On pourrait simplifier davantage puisque

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$$

Ainsi, on aurait pu écrire

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \frac{2\lambda}{Nd\cos\theta} \\ &= \frac{2\sin\theta}{N\cos\theta} \\ &= \frac{2\tan\theta}{N}\end{aligned}$$

b) Trouvons de combien change l'angle du maximum d'ordre 1 quand on change un peu la longueur d'onde. On cherche donc $\Delta\theta$ quand $\Delta\lambda$ est petit. On le trouve avec

$$\Delta\theta = \frac{d\theta}{d\lambda}\Delta\lambda$$

Puisque l'angle d'un maximum au premier ordre est donné par

$$d\sin\theta = \lambda$$

on a

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{\lambda}{d} \\
\frac{d\sin\theta}{d\theta} &= \frac{1}{d}\frac{d\lambda}{d\theta} \\
\cos\theta &= \frac{1}{d}\frac{d\lambda}{d\theta} \\
\frac{d\theta}{d\lambda} &= \frac{1}{d\cos\theta}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= \frac{d\theta}{d\lambda}\Delta\lambda \\
\Delta\theta &= \frac{1}{d\cos\theta}\Delta\lambda
\end{aligned}$$

Or, cet écart d'angle doit être (approximativement) supérieur ou égal à la moitié de la largeur du maximum central. On a donc

$$\frac{1}{d\cos\theta}\Delta\lambda \geq \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$$

En simplifiant, on arrive à

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda}{N}$$

Le nombre de fentes est donc

$$\begin{aligned}
0,59nm &\geq \frac{589,00nm}{N} \\
N &\geq 998,3\,fentes
\end{aligned}$$

Approximativement, il faut 1000 fentes pour voir les maximums séparément.