Solutionnaire du chapitre 11

1. a) On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{\left(6,626\times10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 1,6749\times10^{-27}kg\cdot\left(2\times10^{-14}m\right)^2}\\ &= 8,192\times10^{-14}J\\ &= 0,511MeV\end{aligned}$$

L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned}E_1 &= 1^2\frac{h^2}{8mL^2}\\ &= 1\cdot 0,511MeV\\ &= 0,511MeV\end{aligned}$$

L'énergie du deuxième niveau est

$$\begin{aligned}E_2 &= 2^2\frac{h^2}{8mL^2}\\ &= 4\cdot 0,511MeV\\ &= 2,045MeV\end{aligned}$$

L'énergie du troisième niveau est

$$\begin{aligned}E_3 &= 3^2\frac{h^2}{8mL^2}\\ &= 9\cdot 0,511MeV\\ &= 4,602MeV\end{aligned}$$

b) Au niveau 1, la longueur d'onde du neutron est

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$\lambda_1 = \frac{2L}{1}$$
$$= \frac{2 \cdot 2\times10^{-14}m}{1}$$
$$= 4\times10^{-14}m$$

2. Cette onde est l'onde du 6[e] niveau. La longueur d'onde est

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$
$$\lambda_6 = \frac{2L}{6}$$
$$= \frac{2 \cdot 4\times10^{-9}m}{6}$$
$$= 1,333\times10^{-9}m$$

La quantité de mouvement de l'électron est

$$\lambda = \frac{h}{p}$$
$$1,333\times10^{-9}m = \frac{6,626\times10^{-34}Js}{p}$$
$$p = 4,9696\times10^{-25}\tfrac{kgm}{s}$$

3. La plus petite énergie correspond à n = 1. L'énergie de ce niveau est

$$E_1 = 1^2\frac{h^2}{8mL^2}$$
$$= \frac{\left(6,626\times10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 9,1094\times10^{-31}kg\cdot\left(1\times10^{-9}m\right)^2}$$
$$= 6,025\times10^{-20}J$$
$$= 0,376eV$$

4. On trouve la largeur avec la formule de l'énergie du 4e niveau.

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$
$$E_4 = 16\frac{h^2}{8mL^2}$$
$$10 \cdot 1,602\times 10^{-19} J = 16 \cdot \frac{\left(6,626\times 10^{-34} Js\right)^2}{8 \cdot 9,1094\times 10^{-31} kg \cdot L^2}$$
$$L = 7,757\times 10^{-10} m = 0,7757 nm$$

5. À partir de l'énergie du quatrième niveau, on peut trouver l'énergie de premier niveau

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$
$$E_4 = 4^2 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$
$$= 16 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$
$$= 16 \cdot E_1$$

On a donc

$$E_4 = 16 \cdot E_1$$
$$24eV = 16 \cdot E_1$$
$$E_1 = 1,5eV$$

Ensuite, on peut trouver l'énergie du troisième niveau à partir de l'énergie du premier niveau

$$\begin{aligned} E_n &= n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ E_3 &= 3^2 \cdot \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 9 \cdot \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 9 \cdot E_1 \\ &= 9 \cdot 1{,}5eV \\ &= 13{,}5eV \end{aligned}$$

6. L'énergie du niveau est

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= \left(3^2 + 4^2 + 2^2\right) \cdot \frac{\left(6{,}626 \times 10^{-34} Js\right)^2}{8 \cdot 9{,}1094 \times 10^{-31} kg \cdot \left(1 \times 10^{-9} m\right)^2} \\ &= 1{,}747 \times 10^{-18} J \\ &= 10{,}90eV \end{aligned}$$

7. a) L'énergie du premier niveau est de

$$E_1 = 1^2 \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{h^2}{8mL^2}$$

On sait qu'un niveau (n) a une énergie de 80 eV

$$\begin{aligned} E_n &= n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ 80eV &= n^2 E_1 \end{aligned}$$

et que le niveau suivant (n + 1) a une énergie de 96,8 eV

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \left(n+1\right)^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ 96{,}8eV &= \left(n+1\right)^2 E_1 \end{aligned}$$

On a alors 2 équations et 2 inconnues. En divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{96,8eV}{80eV} = \frac{(n+1)^2 E_1}{n^2 E_1}$$
$$1,21 = \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

ce qui donne

$$1,21n^2 = (n+1)^2$$
$$1,21n^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$0,21n^2 - 2n - 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont n = 10 et n = -10/21. Comme n peut seulement être un entier positif, la seule valeur acceptable pour n est n = 10.

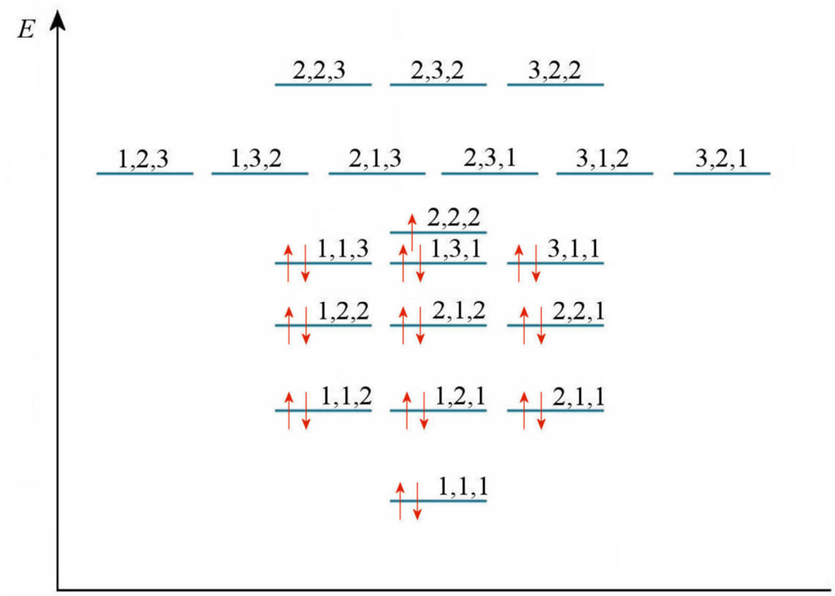
On peut maintenant trouver l'énergie du premier niveau.

$$80eV = n^2 E_1$$
$$80eV = 10^2 \cdot E_1$$
$$E_1 = 0,8eV$$

b) La largeur de la boite est

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$
$$0,8eV \cdot 1,602\times10^{-19} \tfrac{J}{eV} = \frac{(6,626\times10^{-34} Js)^2}{8 \cdot 9,1094\times10^{-31} kg \cdot L^2}$$
$$L = 6,856\times10^{-10} m$$
$$L = 0,6856nm$$

8. Plaçons les 21 électrons sur les niveaux.



Le dernier électron est au niveau 2, 2, 2, donc à $n_x = 2$, $n_y = 2$ et $n_z = 2$

9. Trouvons les niveaux d'énergie. On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{\left(6,626\times10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot1,6726\times10^{-27}kg\cdot\left(10^{-14}m\right)^2} \\ &= 3,281\times10^{-13}J \\ &= 2,048MeV \end{aligned}$$

L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned} E_1 &= 1^2\frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 1\cdot2,048MeV \\ &= 2,048MeV \end{aligned}$$

L'énergie du deuxième niveau est

$$\begin{aligned} E_2 &= 2^2\frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 4\cdot2,048MeV \\ &= 8,192MeV \end{aligned}$$

L’énergie du photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= E_2 - E_1 \\ &= 8{,}192MeV - 2{,}048MeV \\ &= 6{,}144MeV \end{aligned}$$

La longueur d’onde de ce photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\ 6{,}144\times10^{6}eV &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\ \lambda &= 2{,}018\times10^{-4}nm \end{aligned}$$

10. Trouvons les niveaux d’énergie. On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{\left(6{,}626\times10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 9{,}1094\times10^{-31}kg\cdot\left(2\times10^{-9}m\right)^2} \\ &= 1{,}506\times10^{-20}J \\ &= 0{,}094eV \end{aligned}$$

L’énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned} E_1 &= 1^2\frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 1\cdot 0{,}094eV \\ &= 0{,}094eV \end{aligned}$$

L’énergie du quatrième niveau est

$$\begin{aligned} E_4 &= 4^2\frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 16\cdot 0{,}094eV \\ &= 1{,}504eV \end{aligned}$$

Pour passer du niveau 1 au niveau 4, l’énergie du photon doit être

$$\begin{aligned} E_\gamma &= E_4 - E_1 \\ &= 1,504eV - 0,094eV \\ &= 1,410eV \end{aligned}$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\ 1,41eV &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\ \lambda &= 879nm \end{aligned}$$

11. Trouvons les niveaux d'énergie. On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{\left(6,626\times10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 9,1094\times10^{-31}kg\cdot\left(0,5\times10^{-9}m\right)^2} \\ &= 2,410\times10^{-19}J \\ &= 1,504eV \end{aligned}$$

L'énergie du niveau de départ est

$$\begin{aligned} E_i &= \left(2^2+2^2+2^2\right)\frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 12\cdot 1,504eV \\ &= 18,049eV \end{aligned}$$

L'énergie du niveau final est

$$\begin{aligned} E_f &= \left(1^2+1^2+1^2\right)\frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 3\cdot 1,504eV \\ &= 4,512eV \end{aligned}$$

L'énergie du photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= E_i - E_f \\ &= 18,049eV - 4,512eV \\ &= 13,537eV \end{aligned}$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$E_\gamma = \frac{1240eVnm}{\lambda}$$
$$13,537eV = \frac{1240eVnm}{\lambda}$$
$$\lambda = 91,60nm$$

12. a) L'énergie $E_{1\infty}$ est

$$\begin{aligned} E_{1\infty} &= \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= \frac{\left(6,626\times10^{-34}Js\right)^2}{8\cdot 9,1094\times10^{-31}kg\cdot\left(0,6\times10^{-9}m\right)^2} \\ &= 1,674\times10^{-19}J \\ &= 1,0445eV \end{aligned}$$

La valeur de u est donc

$$U = u^2 E_{1\infty}$$
$$20eV = u^2\cdot 1,0445eV$$
$$u = 4,3758$$

Comme u + 1 = 5,3758, il y a 5 niveaux.

b) On doit résoudre les équations

$$v\tan\left(\tfrac{\pi v}{2}\right) = \sqrt{4,3758^2 - v^2}$$
$$-v\cot\left(\tfrac{\pi v}{2}\right) = \sqrt{4,3758^2 - v^2}$$

Selon le site Wolfram, les solutions de ces équations sont :

La première équation donne 4,1875, 2,5957 et 0,8722
La deuxième équation donne 3,4272 et 1,7397

(On voit qu'il y a bien 5 niveaux et qu'il y a une valeur de v entre 0 et 1, une valeur de v entre 1 et 2, une valeur de v entre 2 et 3 et ainsi de suite.)

Les niveaux d'énergie, donnés par $E = v^2 E_{1\infty}$, sont donc

$$\begin{aligned}E_1 &= (0,8722)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 0,795eV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_2 &= (1,7397)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 3,161eV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_3 &= (2,5957)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 7,038eV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_4 &= (3,4272)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 12,27eV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_5 &= (4,1875)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 18,32eV\end{aligned}$$

c) Pour sortir de la boite, l'énergie de la particule doit être plus grande que 20 eV. On a donc

$$E_f > 20eV$$

Au minimum, l'énergie est 20 eV.

L'énergie minimale du photon est donc

$$\begin{aligned}E_{\gamma\, min} &= E_f - E_i \\ &= 20eV - 3,161eV \\ &= 16,839eV\end{aligned}$$

La longueur d'onde maximale est donc

$$\begin{aligned}E_{\gamma\, min} &= \frac{1240eVnm}{\lambda_{max}} \\ 16,839eV &= \frac{1240eVnm}{\lambda_{max}} \\ \lambda_{max} &= 73,64nm\end{aligned}$$

13. La probabilité est

$$T = \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2\alpha L}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi\sqrt{8m(U-E)}}{h} \\ &= \frac{\pi\sqrt{8\cdot 9,1094kg\cdot(10eV-3eV)\cdot 1,602\times 10^{-19}\,\frac{J}{eV}}}{6,626\times 10^{-24}\,Js} \\ &= 1,3555\times 10^{10} m^{-1}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}T &= \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2\alpha L} \\ &= \frac{16\cdot 3eV(10eV-3eV)}{(10eV)^2} e^{-2\cdot 1,3555\times 10^{10} m^{-1}\cdot 0,3\times 10^{-9} m} \\ &= \frac{16\cdot 3eV(10eV-3eV)}{(10eV)^2}\cdot 0,002938 \\ &= 0,000987 \\ &= 0,0987\%\end{aligned}$$

14. La probabilité est

$$T = \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2\alpha L}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi\sqrt{8m(U-E)}}{h} \\ &= \frac{\pi\sqrt{8\cdot 9,1094kg\cdot(12eV-4eV)\cdot 1,602\times 10^{-19}\,\frac{J}{eV}}}{6,626\times 10^{-24}\,Js} \\ &= 1,4491\times 10^{10} m^{-1}\end{aligned}$$

On a donc

$$0,05=\frac{16\cdot 4eV\cdot\left(12eV-4eV\right)}{\left(12eV\right)^2}e^{-2\cdot 1,4491\times 10^{10}m^{-1}\cdot L}$$
$$0,05=\tfrac{32}{9}\cdot e^{-2,8981\times 10^{10}m^{-1}\cdot L}$$
$$\tfrac{9}{640}=e^{-2,8981\times 10^{10}m^{-1}\cdot L}$$
$$\ln\left(\tfrac{9}{640}\right)=-2,8981\times 10^{10}m^{-1}\cdot L$$
$$L=1,471\times 10^{-10}m$$
$$L=0,1471nm$$

15. La probabilité est

$$T=\frac{16E\left(U-E\right)}{U^2}e^{-2\alpha L}$$

Au départ, on a

$$0,1=\frac{16\cdot 4eV\cdot\left(8eV-4eV\right)}{\left(8eV\right)^2}e^{-2\alpha L}$$
$$0,1=4\cdot e^{-2\alpha L}$$
$$e^{-2\alpha L}=0,025$$

Si on double la largeur, on a

$$\begin{aligned}T&=\frac{16\cdot 4eV\cdot\left(8eV-4eV\right)}{\left(8eV\right)^2}e^{-2\alpha(2L)}\\&=4\cdot\left(e^{-2\alpha L}\right)^2\\&=4\cdot\left(0,025\right)^2\\&=0,0025\\&=0,25\%\end{aligned}$$

16. Avec une période de 4 x 10^{-15} s, la fréquence d'oscillation est

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{4\times 10^{-15}s}=2,5\times 10^{14}Hz$$

a) La plus petite énergie est au niveau $n = 0$.

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)hf \\ E_0 &= \left(0+\tfrac{1}{2}\right)hf \\ &= \frac{1}{2}\cdot 6,626\times 10^{-34}\,Js\cdot 2,5\times 10^{14}\,Hz \\ &= 8,283\times 10^{-20}\,J \\ &= 0,517eV \end{aligned}$$

b) La longueur d'onde du photon se trouve avec l'énergie du photon. Cette énergie est

$$E_\gamma = E_i - E_f$$

E_i est l'énergie du niveau $n = 3$.

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)hf \\ E_3 &= \left(3+\tfrac{1}{2}\right)hf \\ &= \frac{7}{2}hf \\ &= 7\cdot\frac{1}{2}hf \\ &= 7\cdot E_0 \\ &= 7\cdot 0,517eV \\ &= 3,619eV \end{aligned}$$

E_f est l'énergie du niveau $n = 1$

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n+\tfrac{1}{2}\right)hf \\ E_1 &= \left(1+\tfrac{1}{2}\right)hf \\ &= \frac{3}{2}hf \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}hf \\ &= 3\cdot E_0 \\ &= 3\cdot 0,517eV \\ &= 1,551eV \end{aligned}$$

L'énergie du photon est donc

$$\begin{aligned} E_\gamma &= E_3 - E_1 \\ &= 3,619eV - 1,551eV \\ &= 2,068eV \end{aligned}$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda} \\ 2,068eV &= \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda} \\ \lambda &= 599,6nm \end{aligned}$$

17. On va trouver la période avec la fréquence d'oscillation qui elle-même se trouve avec l'énergie de l'électron

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)hf$$

Comme l'énergie du photon est

$$E_\gamma = E_i - E_f$$

et que l'énergie du photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\ &= \frac{1240eVnm}{496nm} \\ &= 2,5eV \end{aligned}$$

on arrive à

$$\begin{aligned} E_\gamma &= E_5 - E_2 \\ 2,5eV &= \left(5 + \tfrac{1}{2}\right)hf - \left(2 + \tfrac{1}{2}\right)hf \\ 2,5eV &= 5hf + \tfrac{1}{2}hf - 2hf - \tfrac{1}{2}hf \\ 2,5eV &= 3hf \end{aligned}$$

On a donc

$$2,5eV = 3hf$$
$$2,5 \cdot 1,602 \times 10^{-19} J = 3 \cdot 6,626 \times 10^{-34} Js \cdot f$$
$$f = 2,015 \times 10^{14} Hz$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ &= \frac{1}{2,015 \times 10^{14} Hz} \\ &= 4,963 \times 10^{-15} s \end{aligned}$$

18. La longueur d'onde se trouve à partir de l'énergie du photon qui elle-même se trouve à partir de

$$E_\gamma = E_i - E_f$$

L'énergie du 5^e niveau est

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{-13,598eV}{n^2} \\ E_5 &= \frac{-13,598eV}{5^2} \\ &= -0,54392eV \end{aligned}$$

L'énergie du 2^e niveau est

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{-13,598eV}{n^2} \\ E_2 &= \frac{-13,598eV}{2^2} \\ &= -3,3995eV \end{aligned}$$

L'énergie du photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= E_i - E_f \\ &= -0,54392eV - -3,3995eV \\ &= 2,85558eV \end{aligned}$$

La longueur d'onde de la lumière est donc

$$E_\gamma = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$
$$2,85558eV = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$
$$\lambda = 434,2nm$$

19. La longueur d'onde se trouve à partir de l'énergie du photon. Pour que le photon soit absorbé, son énergie doit être exactement égale à l'écart d'énergie entre les niveaux 1 et 6.

L'énergie du 1er niveau est

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$
$$E_1 = \frac{-13,598eV}{1^2}$$
$$= -13,598eV$$

L'énergie du 6e niveau est

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$
$$E_2 = \frac{-13,598eV}{6^2}$$
$$= -0,37772eV$$

L'énergie que le photon doit avoir est

$$E_\gamma = E_f - E_i$$
$$= -0,37773eV - -13,598eV$$
$$= 13,2203eV$$

La longueur d'onde de la lumière doit donc être de

$$E_\gamma = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$
$$13,2203eV = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$
$$\lambda = 93,80nm$$

20. a) L'énergie du 1er niveau est

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$
$$E_1 = \frac{-13,598eV}{1^2}$$
$$= -13,598eV$$

L'énergie du niveau final est

$$E_\gamma = E_f - E_i$$
$$13eV = E_f - -13,598eV$$
$$E_f = -0,598eV$$

Voyons à quel niveau correspond cette énergie

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$
$$-0,598 = \frac{-13,598eV}{n^2}$$
$$n = 4,769$$

Comme n peut seulement être une valeur entière, il n'y a pas de niveau ayant cette énergie. Les photons ne peuvent donc pas être absorbés et les électrons restent toujours sur le niveau $n = 1$.

b) Si on bombarde avec des électrons, n'importe quelle énergie entre 0 et 13 eV peut être transférée lors de la collision. En a), on a trouvé qu'un ajout de 13 eV nous amène quelque part entre le 4e et le 5e niveau. L'électron peut donc monter au niveau 2, au niveau 3 et au niveau 4.

21. À un niveau n, les valeurs de l peuvent prendre les valeurs entières entre 0 et $n - 1$.

Pour chaque valeur de l, m peut prendre de valeurs entières entre $-l$ et l. On a donc

1 valeur pour $l = 0$ ($m = 0$)
3 valeurs pour $l = 1$ ($m = -1, 0$ et 1)
5 valeurs pour $l = 2$ ($m = -2, -1, 0, 1$ et 2)
7 valeurs pour $l = 3$ ($m = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ et 3)
…et ainsi de suite.

On retrouve ici la suite des nombres impairs. Le dernier nombre impair sera $2l_{max} + 1$.

Comme l_{max} est égal à $n - 1$, le dernier nombre impair sera

$$\begin{aligned} 2l_{max} + 1 &= 2(n-1) + 1 \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

Le nombre total de niveaux se trouve donc en additionnant ces n nombres impairs.

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$$

Si $n = 1$, $N = 1$. Si $n = 2$, $N = 4$. Si $n = 3$, $N = 9$. Si $n = 4$, $N = 16$. On semble voir que le nombre de niveau est bien n^2.

Peut-on faire une preuve plus solide que cette somme de nombres impairs est égal à n^2 ? Bien sûr.

On va additionner ces 2 suites de nombres

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1)$$

et

$$N = (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + \ldots + 7 + 5 + 3 + 1$$

Si on additionne ensemble les premiers termes de chaque série, on obtient $2n$.
Si on additionne ensemble les deuxièmes termes de chaque série, on obtient $2n$.
Si on additionne ensemble les troisièmes termes de chaque série, on obtient $2n$.
…
L'addition des termes 2 à 2 nous donne une suite de $2n$.

$$2N = 2n + 2n + 2n + \ldots + 2n$$

Comme il y a n termes dans la série, on a

$$\begin{aligned} 2N &= n \cdot 2n \\ 2N &= 2n^2 \\ N &= n^2 \end{aligned}$$

22. a) L'énergie est

$$E_n = -\frac{Z^2 \cdot 13,60eV}{n^2}$$
$$E_1 = -\frac{3^2 \cdot 13,60eV}{1^2}$$
$$= -122,4eV$$

b) Pour ioniser, il faut amener l'électron à une énergie de 0 eV. Comme l'électron est à -122,4 eV au départ, il faut donc lui donner une énergie de 122,4 eV pour ioniser l'atome. L'énergie d'ionisation est donc de 122,4 eV.

c) La longueur d'onde se trouve à partir de l'énergie du photon qui elle-même se trouve à partir de

$$E_\gamma = E_i - E_f$$

L'énergie du 2e niveau est

$$E_n = -\frac{Z^2 \cdot 13,60eV}{n^2}$$
$$E_2 = -\frac{3^2 \cdot 13,60eV}{2^2}$$
$$= -30,6eV$$

On sait déjà que l'énergie du 1er niveau est -122,4 eV.

L'énergie du photon est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= E_i - E_f \\ &= -30,6eV - -122,4eV \\ &= 91,8eV \end{aligned}$$

La longueur d'onde de la lumière est donc

$$E_\gamma = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$
$$91,8eV = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$
$$\lambda = 13,51nm$$

23. L'énergie du photon absorbé est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\ &= \frac{1240eVnm}{250nm} \\ &= 4,96eV \end{aligned}$$

L'énergie de l'électron a donc augmenté de 4,96 eV.

En émettant un premier photon, l'électron perd l'énergie de ce photon. Cette énergie est

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\ &= \frac{1240eVnm}{800nm} \\ &= 1,55eV \end{aligned}$$

Comme l'électron avait gagné 4,96 eV et qu'il vient de perdre 1,55 eV, il lui reste 3,41 eV à perdre pour revenir à son niveau d'énergie initiale. Il devra donc émettre un photon de 3,41 eV, ce qui correspond à la longueur d'onde donnée par cette formule.

$$E_\gamma = \frac{1240eVnm}{\lambda}$$
$$3,41eV = \frac{1240eVnm}{\lambda}$$
$$\lambda = 363,6nm$$

24. Dans la boite, on a une onde stationnaire qui est identique à une onde stationnaire dans une corde. L'amplitude de l'onde sera donc identique à celle d'une onde stationnaire sur une corde.

$$\psi = 2A\sin kx$$

Au niveau n = 1, la longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2L}{1}\\ &= 2L\\ &= 2\cdot 10nm\\ &= 20nm\end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\psi = 2A\sin kx$$
$$\psi = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$
$$\psi = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$

Premièrement, on doit avoir

$$\int\limits_{\substack{\text{toutes les}\\ \text{positions possibles}}} \psi^2 dx = 1$$

Comme les seules positions possibles sont entre 0 nm et 10 nm, cette équation devient

$$\int_{0nm}^{10nm}\left(2A\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)\right)^2 dx = 1$$

Cette intégrale nous permet de trouver la valeur de A.

$$\int_{0nm}^{10nm} 4A^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)dx = 1$$
$$4A^2\left[\frac{x}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}x\right)\right]_{0nm}^{10nm} = 1$$
$$4A^2\left[\frac{10nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}10nm\right)\right]-A^2\left[\frac{0nm}{2}-\frac{10nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}0nm\right)\right]=1$$
$$4A^2\left[\frac{10nm}{2}-\frac{20nm}{8\pi}\sin(2\pi)\right]-A^2\left[0-\frac{10nm}{8\pi}\sin(0)\right]=1$$
$$4A^2\cdot 5nm = 1$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{5nm}}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\psi = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5nm}}\sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$

Ainsi, la probabilité de trouver la particule entre x = 0 nm et x = 3 nm est

$$\begin{aligned}
P &= \int_{0nm}^{3nm} \frac{1}{5nm}\sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)dx \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{x}{2} - \frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}x\right)\right]_{0nm}^{3nm} \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}3nm\right)\right] - \frac{1}{5nm}\left[\frac{0nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{20nm}0nm\right)\right] \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi}\sin(0,6\pi)\right] - \frac{1}{5nm}\left[0 - \frac{20nm}{8\pi}\sin(0)\right] \\
&= \frac{1}{5nm}\left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi}\sin(1,2\pi)\right] \\
&= \frac{3}{10} - \frac{1}{2\pi}\sin(0,6\pi) \\
&= 0,1486
\end{aligned}$$

La probabilité est donc de 14,86 %

25. L'équation de Schrödinger avec le potentiel U=½kx^2 est

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$$

Vérifions si

$$\psi = Ae^{-Bx^2}$$

est une solution. Pour le vérifier, il nous faut la deuxième dérivée de cette fonction

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dx} &= Ae^{-Bx^2}\left(-2Bx\right)\\ &= 2ABxe^{-Bx^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-2ABxe^{-Bx^2}\right)\\ &= -2ABxe^{-Bx^2}\left(-2Bx\right) + -2ABe^{-Bx^2}\\ &= 4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2}\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$$

$$4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)Ae^{-Bx^2} = 0$$

$$4B^2x^2 - 2B + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right) = 2B - 4B^2x^2$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{mk}{\hbar^2}x^2 = 2B - 4B^2x^2$$

La fonction est une solution si les deux côtés sont égaux. Pour qu'ils soient égaux, il faut que les termes constants soient égaux et que les termes avec x^2 soient aussi égaux. On a donc

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 2B \qquad \text{et} \qquad \frac{mk}{\hbar^2}x^2 = 4B^2x^2$$

La deuxième équation donne

$$\begin{aligned}\frac{mk}{\hbar^2}x^2 &= 4B^2x^2\\ \frac{mk}{4\hbar^2} &= B^2\end{aligned}$$

Si on remplace dans la première équation, on a

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 2B$$

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 2\sqrt{\frac{mk}{4\hbar^2}}$$

$$\frac{m}{\hbar^2}E = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

$$E = \frac{\sqrt{mk}}{2m}\hbar$$

$$E = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\hbar$$

Pour une oscillation harmonique, on a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}2\pi f \\ &= \frac{1}{2}hf \end{aligned}$$