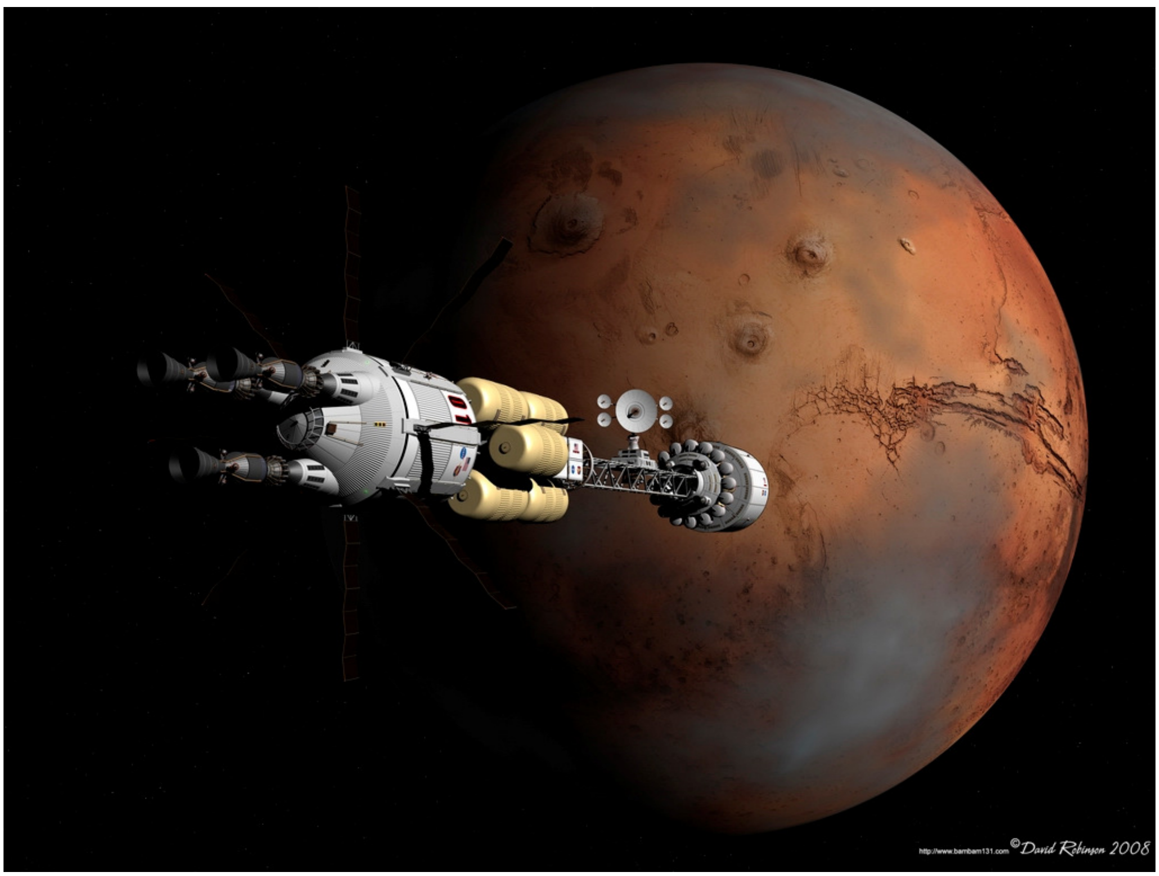
# E1 LA GRAVITATION

***Pour aller sur Mars, on n'a pas besoin d'utiliser des réacteurs tout le long du voyage (il serait très coûteux de le faire d'ailleurs). On a qu'à placer le vaisseau spatial sur une orbite de transfert de Hohmann ayant son périhélie à la Terre et son aphélie à Mars. Combien de temps durera ce voyage de la Terre jusqu'à Mars ?***




***spaceart1.ning.com/photo/destination-complete?context=user***

**Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.**

Nous avons vu précédemment, au chapitre 4, la formule de la force de gravitation. C'était une force d'attraction entre les masses dont la grandeur est

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

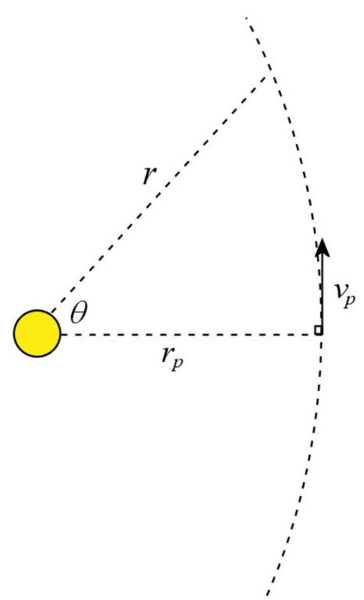
et où $G$ = 6,674 x $10^{-11}$ Nm²/kg². Notez que $r$ est la distance entre les centres des astres.

À partir de cette loi, nous avions trouvé qu'un objet peut avoir une orbite circulaire autour d'un astre. En réalité, l'orbite circulaire n'est qu'une des possibilités parmi les trajectoires possibles près d'une planète ou d'une étoile

# E1.1 TRAJECTOIRES PRÈS D'UN OBJET MASSIF

## Forme de la trajectoire

Considérons un objet qui suit une trajectoire près d'un astre.




Dans sa trajectoire, l'objet va, à un moment donné, passer à sa position la plus de la masse centrale (l'étoile ou la planète). La distance à ce moment entre l'objet et la masse centrale sera notée $r_p$ et la vitesse à ce point sera notée $v_p$. Notez également que la vitesse à cet endroit est perpendiculaire à la distance. Cette position sera notre point de référence pour l'angle $\theta$ utilisé pour donner la position.

On veut savoir la forme de la trajectoire, ce qui signifie qu'on veut savoir $r$ en fonction de $\theta$. Les détails du calcul de la forme de la trajectoire dépassent le cadre de cet ouvrage et on va se contenter d'en donner le résultat (on peut toutefois trouver cette démonstration dans le chapitre 1 des notes d'astrophysique). La forme de la trajectoire est

**Distance en fonction de $\theta$ pour un objet près d'une masse centrale**

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

où *e* est un facteur appelé *excentricité* qui vaut

**Excentricité**

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

La forme exacte de la trajectoire dépend de la valeur de *e*. Nous examinerons les différentes possibilités dans les sections suivantes.

## Énergie mécanique

Nous allons aussi trouver l'énergie mécanique de l'objet qui suit la trajectoire. Cette énergie est

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{-GM_c m}{r_p}$$

Selon la formule de l'excentricité, on a

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$
$$v_p^2 = \frac{GM_c(1+e)}{r_p}$$

Ainsi, l'énergie devient

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{-GM_c m}{r_p} \\ &= \frac{1}{2} m \frac{GM_c(1+e)}{r_p} + \frac{-GM_c m}{r_p} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_{mec} &= \left( \frac{1+e}{2} - 1 \right) \frac{GM_c m}{r_p} \\
&= \left( \frac{1+e-2}{2} \right) \frac{GM_c m}{r_p} \\
&= \left( \frac{-1+e}{2} \right) \frac{GM_c m}{r_p}
\end{aligned}
$$

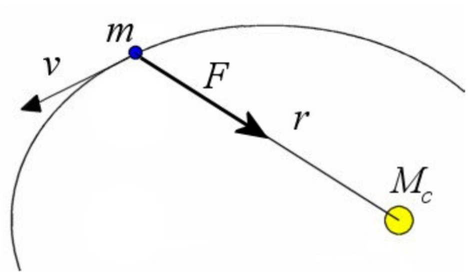
Ce qui nous donne

**Énergie mécanique**

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

## Le moment cinétique

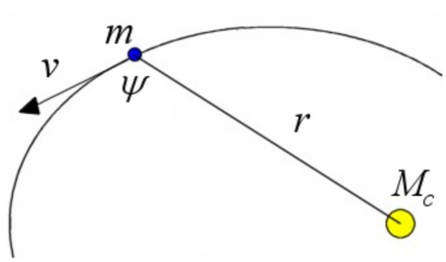
On se rappelle qu'il y a conservation du moment cinétique si la somme des moments de force externes est nulle. Sur la trajectoire, il n'y a qu'une seule force, la gravitation, qui agit sur le corps. Le moment de force, calculé à partir de la masse centrale, est




$$\tau = Fr \sin \phi$$

où $\phi$ est l'angle entre la force et une ligne allant de la masse centrale à l'objet en orbite (ligne $r$ sur la figure). Ce moment de force est nul, car la force est dirigée directement vers le corps central, donc dans la même direction que le rayon. L'angle $\phi$ est donc nul et la somme des moments de force est nulle.

Cela signifie que le moment cinétique, calculé à partir du corps central, est constant. On a donc




$$L = mrv \sin \psi = \text{constante}$$

$$rv \sin \psi = \frac{\text{constante}}{m}$$

Puisque la masse est constante, le terme de droite est une constante.

$$rv \sin \psi = \text{constante}$$

On peut facilement trouver cette constante en calculant ce qu'elle vaut au point le plus près de la masse centrale. À ce point, on a

$$rv\sin\psi = r_p v_p \sin 90°$$

Ce qui nous donne une première équation de conservation du moment cinétique.

**Conservation du moment cinétique**

$$rv\sin\psi = r_p v_p$$

À partir de la formule de l'excentricité,

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

on peut obtenir la vitesse

$$v_p^2 = \frac{GM_c(1+e)}{r_p}$$

Si on utilise cette valeur dans la loi de conservation, on arrive à

$$\begin{aligned} rv\sin\psi &= r_p\sqrt{\frac{GM_c(1+e)}{r_p}} \\ &= \sqrt{GM_c r_p(1+e)} \end{aligned}$$

**Conservation du moment cinétique**

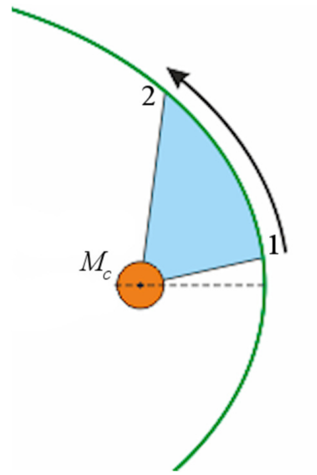
$$rv\sin\psi = \sqrt{GM_c r_p(1+e)}$$

Ces équations de conservation du moment cinétique sont deux formulations équivalentes à ce qu'on appelle *la deuxième loi de Kepler*.

## Les aires balayées

La deuxième loi de Kepler fut formulée très différemment par Kepler lorsqu'il la découvrit en 1608. La formulation de Kepler était

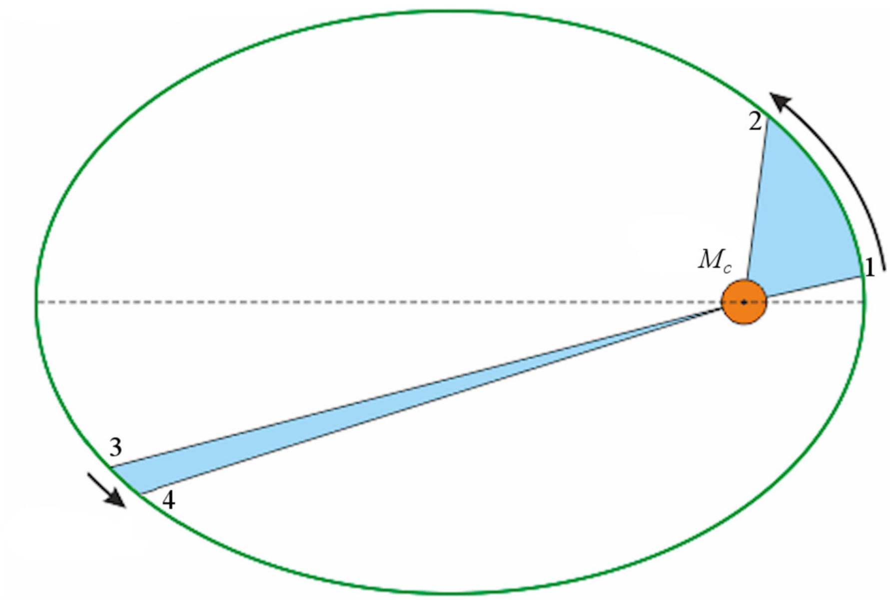
*Un segment de droite joignant une planète et le Soleil balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.*




Voyons ce que « aire balayée » signifie. Si l'objet passe d'une position 1 à une position 2, l'aire balayée est l'aire de la région délimitée par la trajectoire, une ligne qui va de la masse centrale à la position 1 et une autre ligne qui va de la masse centrale à la position 2 (figure).

La loi de Kepler spécifie que cette aire est toujours la même si le temps entre les positions 1 et 2 est le même.

Prenons un exemple pour illustrer. Une des formes possibles d'orbite est une ellipse, telle qu'illustrée sur la figure suivante.

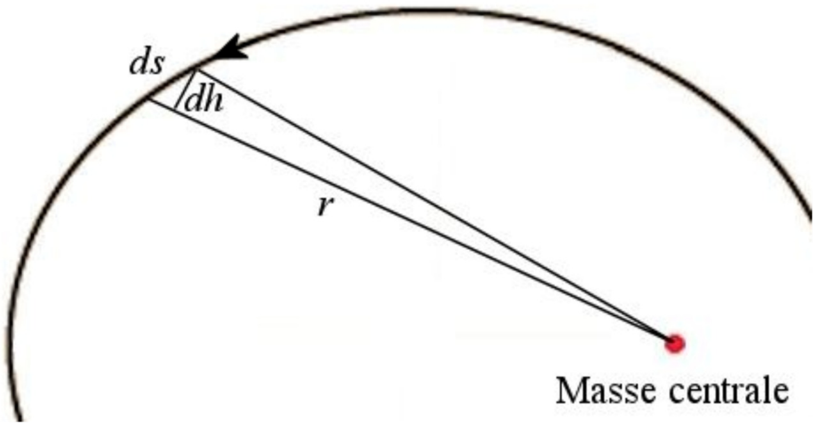



serge.bertorello.free.fr/astrophy/kepnew/kepnew.html

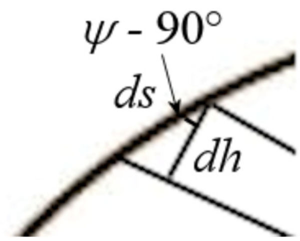
La 2$^e$ loi de Kepler spécifie alors que l'aire des deux régions montrées sur la figure est la même, à condition que le temps qu'il faut à l'objet pour passer de la position 1 à la position 2 soit le même qu'il lui faut pour passer de la position 3 à la position 4.

Pour prouver cette loi, et montrer le lien avec la conservation du moment cinétique, calculons l'aire balayée entre deux positions très près l'une de l'autre. On va en fait prendre deux points sur la trajectoire qui sont à une distance *ds* l'un de l'autre.

L'aire balayée est alors un triangle dont la hauteur est *dh*.




Comme $\psi$ est l'angle entre la vitesse (la trajectoire) et la distance *r*, la hauteur de ce triangle est




$$\begin{aligned} dh &= ds \cdot \cos(\psi - 90°) \\ &= ds \cdot \sin(\psi) \end{aligned}$$

L'aire du triangle alors

$$\begin{aligned} dA &= \frac{base \cdot hauteur}{2} \\ &= \frac{rdh}{2} \\ &= \frac{rds \sin\psi}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{rds \sin\psi}{2dt} \\ &= \frac{rv \sin\psi}{2} \end{aligned}$$

puisque *ds/dt* = *v*.

Or, selon la conservation du moment cinétique, on a

$$rv \sin\psi = \sqrt{GM_c r_p (1+e)}$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)}}{2}$$

Le terme de droite est une constante. Quand le rythme de variation est constant, on peut remplacer *dA/dt* par $\Delta A/\Delta t$, pour finalement obtenir

**Deuxième loi de Kepler**

$$\Delta A=\frac{\sqrt{GM_c r_p\left(1+e\right)}}{2}\Delta t$$

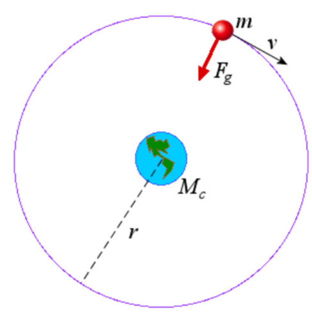
Ce résultat montre clairement que l'aire balayée est toujours la même si le temps est le même.

## E1.2 LES ORBITES CIRCULAIRES ($e$ = 0)

Si l'excentricité est nulle, alors la formule de la trajectoire devient

$$r=r_p$$

Cela nous indique que $r$ ne varie pas avec l'angle et que $r$ est une constante. Avec un rayon constant, on a une orbite circulaire.




www.ux1.eiu.edu/~addavis/3050/Ch09Gravity/Sat.html

Pour obtenir une telle excentricité nulle, on doit avoir

$$e=\frac{v_p^2 r_p}{GM_c}-1$$

$$0=\frac{v_p^2 r_p}{GM_c}-1$$

$$v_p=\sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$$

Cette formule était bien notre équation pour la vitesse sur une orbite. Il n'y avait pas d'indice $p$ auparavant, mais cela ne fait aucune différence puisqu'avec une orbite circulaire, la distance la plus près de la masse centrale est toujours la même et est égale au rayon de l'orbite. On peut donc écrire.

**La vitesse d'un objet sur une orbite circulaire**

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}}$$

Avec une excentricité nulle, l'énergie mécanique de l'objet en orbite est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} \\ &= -\frac{GM_c m}{2r_p} \end{aligned}$$

Puisque $r = r_p$ avec l'orbite circulaire, l'énergie est

**Énergie mécanique d'un objet sur une orbite circulaire**

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

(Qui est identique à la formule obtenue au chapitre 9.)

Finalement, on trouve le temps de révolution en divisant la circonférence de l'orbite par la vitesse de l'objet en orbite. Ce calcul avait été fait au chapitre 6 et on avait obtenu

**La période pour une orbite circulaire (3^e loi de Kepler)**

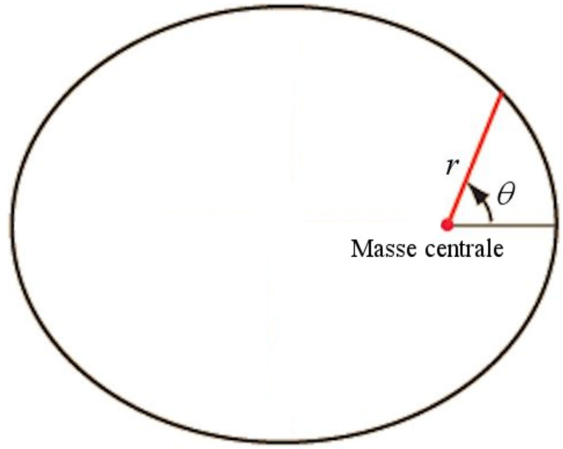
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_c}}$$

# E1.3 LES ORBITES ELLIPTIQUES ($0 < e < 1$)

Quand l'excentricité est entre 0 et 1, la valeur de $r$ change avec l'angle.

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Cette équation est l'équation d'une ellipse.




hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/math/ellipse.html

Pour obtenir une telle ellipse, la vitesse $v_p$ doit se situer entre deux valeurs. La valeur minimale se trouve avec l'excentricité minimale.

$$e > 0$$

$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 > 0$$

$$v_p > \sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$$

La valeur maximale se trouve avec l'excentricité maximale.

$$e < 1$$

$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 < 1$$

$$v_p < \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$$

## La première loi de Kepler

La forme elliptique des orbites fut découverte en 1608 par Johannes Kepler. En 1600, il se lança dans une étude très approfondie de l'orbite de Mars en utilisant les données d'observations de Tycho Brahé, les meilleures faites avant 1600.

Après 8 ans d'études, Kepler arriva à une conclusion révolutionnaire en 1608. Alors qu'on pensait depuis près de 20 siècles que les orbites des planètes devaient être des cercles parfaits, sous prétexte que les cieux devaient être parfaits pour refléter la perfection des dieux (ou du Dieu), Kepler montra que les orbites ont une forme elliptique. C'était une véritable révolution en astronomie, mais il fallut près d'un siècle avant qu'une majorité de savants soient convaincus de la véracité de cette loi.

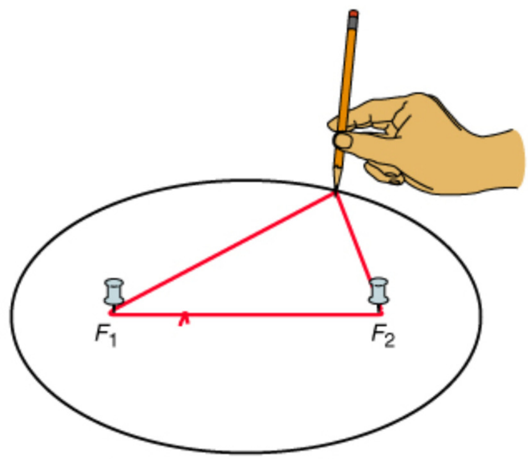
**Première loi de Kepler**

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

## L'ellipse

L'ellipse ressemble à un ovale, mais elle est particulière. Pour tracer une ellipse, il suffit de tenir un anneau de corde avec deux punaises plantées dans une planche. On prend alors un crayon et on trace alors la figure délimitée par la corde comme sur la figure.

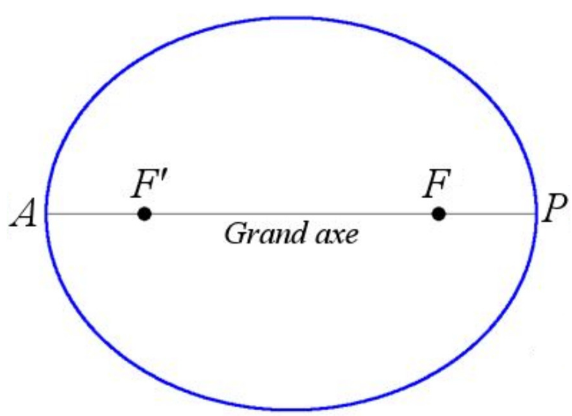
Les deux foyers $F_1$ et $F_2$ sont les deux endroits où on a planté les punaises.




members.shaw.ca/len92/astronomy.htm

Cela signifie que l'ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances du point jusqu'à chacun des foyers est constante. L'ellipse est plus ou moins allongée selon la distance entre les punaises et la longueur de la corde.

Les points $F$ et $F'$ sont les foyers. Ici, la masse centrale est située au foyer $F$. La ligne qui va d'un côté à l'autre de l'ellipse en passant par les foyers est le grand axe de l'ellipse. Les deux points où l'ellipse et le grand axe se croisent (points $A$ et $P$) sont les apsides. (Le grand axe est aussi appelé la ligne des apsides ou la ligne apsidiale.) Le point $A$ est le point de l'orbite le plus éloigné de la masse centrale, nommé en général apoapside (on utilise aussi les termes d'apside supérieure ou d'apoapse). Le point $P$ est le point de l'orbite le plus près de la masse centrale et est nommé en général la périapside (on utilise aussi les termes d'apside inférieure ou de périapse).




www.ck12.org/book/CK-12-PreCalculus-Concepts/r514/section/9.4/

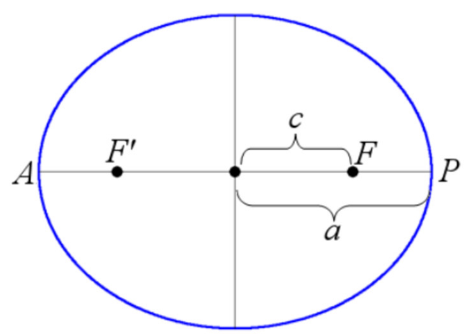
Il existe en fait tout un vocabulaire pour nommer ces points selon la masse centrale. Si l'orbite se fait autour du Soleil, le point le plus près est le périhélie et le point le plus loin est l'aphélie. Si l'orbite se fait autour de la Terre, le point le plus près est le périgée et le point le plus loin est l'apogée. La table suivante vous montre (à titre de curiosité) le nom de ces points selon la masse centrale. (Mais vous devriez vous rappeler de ceux qui sont soulignés.)

| Masse centrale | Périapside | Apoapside |
|---|---|---|
| **Galaxie** | Périgalacticon | Apogalacticon |
| **Trou noir** | Périmélasme | Apomélasme |
| **Étoile** | Périastre | Apoastre |
| **Soleil** | **<u>Périhélie</u>** | **<u>Aphélie</u>** |
| **Mercure** | Périherme | Apherme |
| **Vénus** | Péricythère | Apocythère |
| **Terre** | **<u>Périgée</u>** | **<u>Apogée</u>** |
| **Lune** | Périsélène | Aposélène |
| **Mars** | Périarée | Apoarée |
| **Jupiter** | Périzène | Apozène |
| **Saturne** | Périkrone | Apokrone |
| **Uranus** | Périourane | Apourane |
| **Neptune** | Périposéide | Apoposéide |
| **Pluton** | Périhade | Aphade |

## L'excentricité

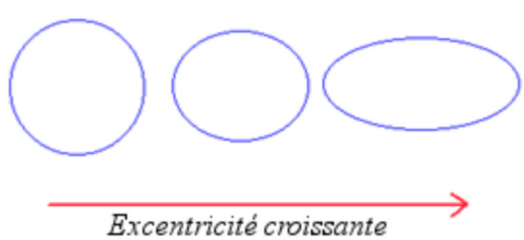
L'excentricité de l'ellipse est définie par le rapport

$$e = \frac{FF'}{AP} = \frac{c}{a}$$




où $c$ la distance entre le centre de l'ellipse et un des foyers et $a$ la distance entre le centre de l'ellipse et une des apsides ($a$ porte le nom de demi-grand axe).

Si les deux foyers sont au centre, alors l'excentricité est nulle et on obtient un cercle. Plus l'excentricité est élevée, plus les foyers sont distants l'un de l'autre et plus l'ellipse est allongée.




www.astro-tom.com/technical_data/elliptical_orbits.htm

La valeur de l'excentricité d'une ellipse est nécessairement inférieure à 1 puisque, si c'était le cas, les foyers ne seraient pas à l'intérieur de l'ellipse.

Comme on peut le constater avec le tableau suivant, l'excentricité des orbites planétaires est en général peu élevée.

| Planète | Excentricité de l'orbite |
|---|---|
| **Mercure** | 0,206 |
| **Vénus** | 0,007 |
| **Terre** | 0,017 |
| **Mars** | 0,093 |
| **Jupiter** | 0,048 |
| **Saturne** | 0,056 |
| **Uranus** | 0,047 |
| **Neptune** | 0,009 |

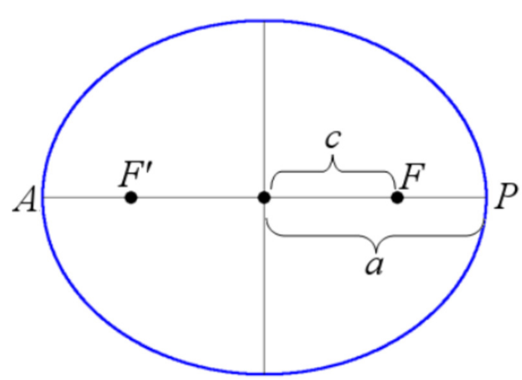
À l'exception de Mercure, les orbites planétaires ne dévient que très peu d'une forme circulaire. L'excentricité de l'orbite de Mars est relativement élevée et c'est ce qui permit à Kepler, qui étudia le mouvement de Mars, de se rendre compte que les orbites sont elliptiques. Mais ces valeurs d'excentricité ne sont rien en comparaison de l'excentricité de l'orbite de certains objets ayant des orbites très allongées telles que des comètes. Par exemple, l'orbite de la comète la plus connue, la comète de Halley, a une excentricité de 0,970.

## Les distances entre l'objet en orbite et la masse centrale

*Les distances à l'apoapside et à la périapside*

Nous pouvons maintenant trouver des relations entre les distances à l'apoapside et à la périapside d'une part et l'excentricité et le demi-grand axe de l'ellipse d'autre part. Les distances de l'apoapside et de la périapside en fonction du demi-grand axe $a$ et de l'excentricité $e$ sont

$$\begin{aligned} r_a &= a + c \\ &= a + ea \\ &= a(1+e) \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} r_p &= a - c \\ &= a - ea \\ &= a(1-e) \end{aligned}$$

**$r_a$ et $r_p$ en fonction de $a$ et $e$ pour une orbite elliptique**

$$r_a = a(1+e)$$
$$r_p = a(1-e)$$

Nous pouvons également inverser ces relations précédentes pour obtenir les relations entre le demi-grand axe et l'excentricité en fonction des distances à l'apoapside et à la périapside.

**$a$ et $e$ en fonction de $r_a$ et $r_p$ pour une orbite elliptique**

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad\qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

*La distance à n'importe quel endroit sur l'orbite*

On a déjà la formule qui donne la position de l'objet en orbite en fonction de l'angle.

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Puisque $r_p = a\ (1 - e)$, la distance peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} r &= a(1-e)\frac{1+e}{1+e\cos\theta} \\ &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \end{aligned}$$

Ainsi, 2 formules peuvent être utilisées pour trouver $r$ en fonction de $\theta$.

**$r$ en fonction de $\theta$ pour une orbite elliptique**

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

## La vitesse orbitale

*La vitesse doit varier*

Il est évident que la vitesse des corps ne peut pas être constante le long d'une orbite elliptique parce que l'énergie mécanique doit être conservée. En effet, pour un objet de masse $m$ en orbite autour d'un autre objet de masse $M_c$, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

Ainsi, lorsque l'objet en orbite s'approche de la masse centrale, son énergie gravitationnelle diminue et son énergie cinétique doit donc augmenter. La vitesse de la planète doit donc la plus grande à la périapside et la plus petite à l'apoapside.

Pour trouver la vitesse, il nous faut la valeur de l'énergie mécanique. La formule générale de l'énergie est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

Avec une orbite elliptique, on a

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} \\ &= -\frac{GM_c m(1-e)}{2ra(1-e)} \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à

**Énergie mécanique d'un objet sur une orbite elliptique**

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$

De là, on peut trouver la vitesse en fonction de $r$ avec la loi de conservation de l'énergie mécanique.

$$-\frac{GM_c m}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

Si on isole $v$ dans cette formule, on arrive à la formule suivante qui donne la vitesse n'importe où sur l'orbite.

**La vitesse d'un objet sur une orbite elliptique**

$$v^2 = GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

*La vitesse à l'apoapside et à la périapside*

À la périapside, $r = a\,(1 - e)$ et la vitesse est

$$\begin{aligned} v_p^2 &= GM_c\left(\frac{2}{a(1-e)}-\frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2}{1-e}-1\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2-(1-e)}{1-e}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e} \end{aligned}$$

À l'apoapside, $r = a\,(1 + e)$ et la vitesse est

$$\begin{aligned} v_a^2 &= GM_c\left(\frac{2}{a(1+e)}-\frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2}{1+e}-1\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\left(\frac{2-(1+e)}{1+e}\right) \\ &= \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e} \end{aligned}$$

**Vitesse d'un objet à la périapside et à l'apoapside**

$$v_p^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}$$

$$v_a^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

## La période

On va trouver la période avec la deuxième loi de Kepler.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} \Delta t$$

En une période, on balaye l'ellipse au complet. Comme l'aire de l'ellipse est

$$A = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

on a

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} T$$

En utilisant le fait que $r_p = a(1-e)$, on arrive à

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c a(1-e)(1+e)}}{2} T$$

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GM_c a(1-e^2)}}{2} T$$

$$\pi a^2 = \frac{\sqrt{GM_c a}}{2} T$$

Ce qui donne

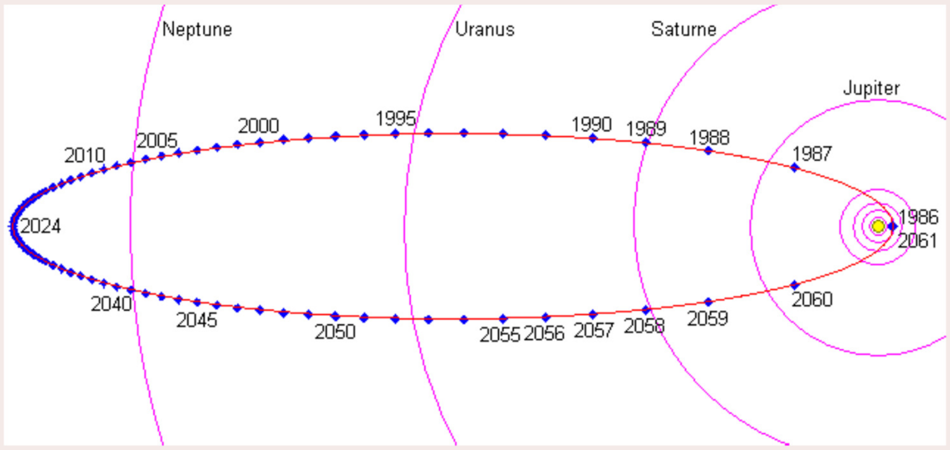
**Période pour une orbite elliptique (3e loi de Kepler)**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

C'est exactement la même formule que celle du mouvement circulaire dans laquelle *a* remplace *r*.

## Exemple E1.3.1

La comète de Halley se déplace sur orbite dont les distances à l'aphélie et au périhélie sont de $r_a$ = 35,295 UA et $r_p$ = 0,587 UA (1 UA (unité astronomique) est une unité de distance égale à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil et qui vaut 1,5 x $10^{11}$ m). La masse du Soleil est 2 x $10^{30}$ kg.




www.uwgb.edu/dutchs/PLANETS/Comets.HTM

a) Quelle est l'excentricité de cette orbite ?

L'excentricité est

$$\begin{aligned} e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \\ &= \frac{35,295UA - 0,587UA}{35,295UA + 0,587UA} \\ &= 0,9673 \end{aligned}$$

b) Quel est le demi-grand axe ($a$) de cette orbite ?

Le demi-grand axe est

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_a + r_p}{2} \\ &= \frac{35,295UA + 0,587UA}{2} \\ &= 17,941UA \end{aligned}$$

c) Quelle est la période de la comète ?

La période vaut

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}\\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(17{,}941UA\cdot 1{,}5\times 10^{11}\,\frac{m}{UA}\right)^3}{6{,}674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times 10^{30}\,kg}}\\ &= 2{,}401\times 10^{9}\,s\\ &= 76{,}08 \text{ ans}\end{aligned}$$

d) Quelle est la vitesse au périhélie ?

La vitesse au périhélie est

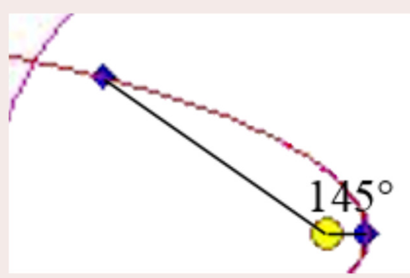
$$\begin{aligned}v_p &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}}\\ &= \sqrt{\frac{6{,}674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times 10^{30}\,kg}{17{,}941UA\cdot 1{,}5\times 10^{11}\,\frac{m}{UA}}\frac{1+0{,}9673}{1-0{,}9673}}\\ &= 54{,}61\,\tfrac{km}{s}\end{aligned}$$

e) Quelle est la vitesse à l'aphélie ?

La vitesse à l'aphélie est

$$\begin{aligned}v_a &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}}\\ &= \sqrt{\frac{6{,}674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times 10^{30}\,kg}{17{,}941UA\cdot 1{,}5\times 10^{11}\,\frac{m}{UA}}\frac{1-0{,}9673}{1+0{,}9673}}\\ &= 0{,}908\,\tfrac{km}{s}\end{aligned}$$

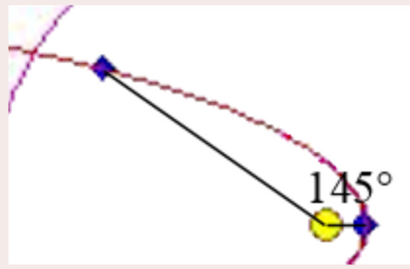
f) Quelle est la distance entre le Soleil et la comète quand elle est à cette position ?




La distance à cette position est

$$\begin{aligned} r &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \\ &= \frac{17{,}941UA\cdot\left(1-0{,}9673^2\right)}{1+0{,}9673\cdot\cos\left(145°\right)} \\ &= 5{,}559UA \end{aligned}$$

g) Quelle est la vitesse de la comète quand elle est à cette position ?



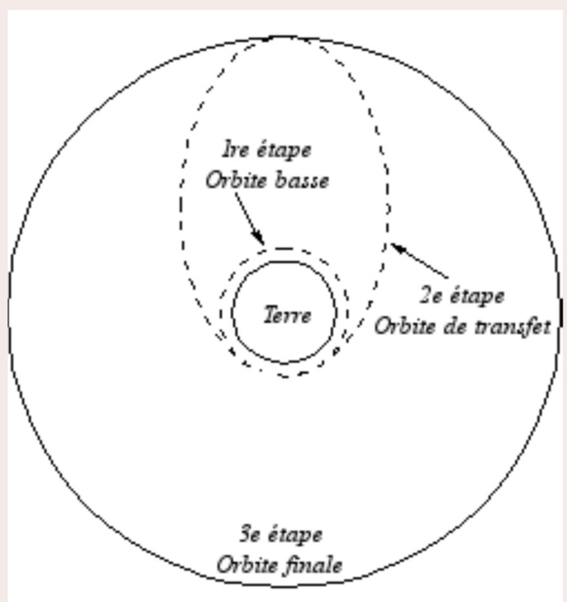

La vitesse à cette position est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)} \\ &= \sqrt{6{,}674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg\left(\frac{2}{5{,}559\cdot1{,}5\times10^{11}m}-\frac{1}{17{,}941\cdot1{,}5\times10^{11}m}\right)} \\ &= 16{,}45\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

## Exemple E1.3.2

<u>*La mise en orbite par étape*</u>

Lorsqu'on veut placer un satellite sur une orbite assez éloignée de la Terre, on procède par étape. Premièrement, on place le satellite sur une orbite circulaire assez basse. Dans la deuxième étape, on actionne à nouveau les réacteurs pour augmenter la vitesse de la fusée de telle façon que son orbite devienne elliptique. Il s'agit de l'orbite de transfert. On veut alors que la distance à l'apogée soit exactement égale à la distance à laquelle on veut mettre le satellite en orbite. Finalement, à la troisième étape, on actionne à nouveau les réacteurs lorsque le satellite est à l'apogée de telle façon que l'orbite devienne à nouveau circulaire.




www.radio-electronics.com/info/satellite/satellite-orbits/satellite-launching.php

Trouvez la vitesse et l'énergie mécanique d'un satellite de 75 kg sur ces orbites si la petite orbite circulaire est 300 km au-dessus de la surface de la Terre et si la grande orbite circulaire est l'orbite des satellites géostationnaires dont le rayon est de 42 300 km. (Pour l'orbite elliptique, donnez simplement les vitesses au périgée et à l'apogée.) Le rayon de la Terre est de 6380 km et la masse de la Terre est 5,98 x $10^{24}$ kg.

*Première étape* : Le satellite est sur une orbite circulaire à 300 km d'altitude.

La vitesse sur cette orbite est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_c}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times10^{24}kg}{6,68\times10^{6}m}} \\ &= 7,73\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

et l'énergie est

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM_c m}{2r} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times10^{24}kg\cdot 75kg}{2\times 6,68\times10^{6}m} \\ &= -2,24\times10^{9}J \end{aligned}$$

*Deuxième étape* : Le satellite en orbite elliptique (orbite de transfert).

Pour amener le satellite sur l'orbite géostationnaire, on doit avoir une orbite elliptique avec les valeurs $r_a$ = 42 300 km et $r_p$ = 6680 km.

Le demi-grand axe et l'excentricité de cette orbite sont

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{4,23\times10^{7}m + 6,68\times10^{6}m}{2} = 2,449\times10^{7}m$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{4,23\times10^{7}m - 6,68\times10^{6}m}{4,23\times10^{7}m + 6,68\times10^{6}m} = 0,7272$$

La vitesse au périgée est donc

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg}{2,449\times10^7m}\frac{1+0,7272}{1-0,7272}} \\ &= 10,16\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Il faudra donc augmenter la vitesse de 7,73 km/s à 10,16 km/s pour transformer l'orbite circulaire en orbite elliptique qui va amener le satellite à 42 300 km de la Terre.

La vitesse à l'apogée est

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg}{2,449\times10^7m}\frac{1-0,7272}{1+0,7272}} \\ &= 1,61\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

L'énergie sur la nouvelle orbite est

$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM_cm}{2a} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg\cdot75kg}{2\cdot2,449\times10^7m} \\ &= -6,11\times10^8J \end{aligned}$$

Il faut donc donner une énergie de $-6,11\times10^8J--2,24\times10^9J=1,63\times10^9J$ pour rendre l'orbite elliptique.

<u>*Troisième étape*</u> : Le satellite est sur une orbite circulaire géostationnaire.

La vitesse sur cette orbite circulaire est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_c}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,98\times10^{24}kg}{4,23\times10^7m}} \\ &= 3,07\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Il faudra donc faire passer la vitesse de 1,61 km/s à 3,07 km/s pour transformer l'orbite elliptique en orbite circulaire ayant un rayon de 42 300 km.

L'énergie sur l'orbite géostationnaire est

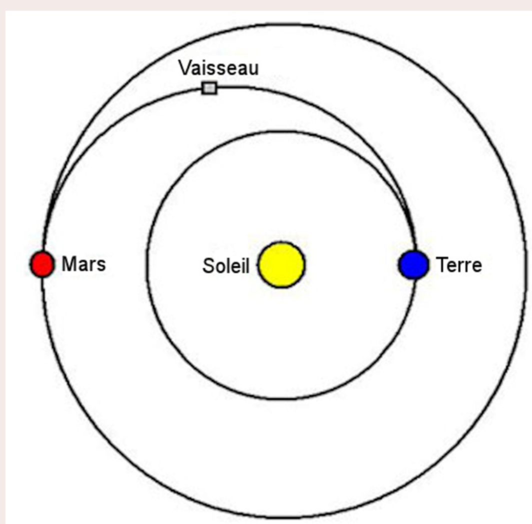
$$\begin{aligned} E &= -\frac{GM_c m}{2r} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,98\times10^{24}kg\cdot 75kg}{2\cdot 4,23\times10^{7}m} \\ &= -3,54\times10^{8}J \end{aligned}$$

Il faut donc donner une énergie de $-3,54\times10^{8}J - -6,11\times10^{8}J = 2,57\times10^{8}J$ au satellite pour le placer en orbite circulaire géostationnaire.

Une orbite elliptique utilisée pour passer d'une orbite circulaire à une autre porte le nom d'*orbite de transfert de Hohmann.*

## Exemple E1.3.3

Pour aller sur Mars, on n'a pas besoin d'utiliser des réacteurs tout le long du voyage (il serait très coûteux de le faire d'ailleurs). On a qu'à placer le vaisseau spatial sur une orbite de transfert de Hohmann ayant son périhélie à la Terre et son aphélie à Mars. Combien de temps durera ce voyage de la Terre jusqu'à Mars ? La masse du Soleil est 2 x $10^{30}$ kg. La distance entre la Terre et le Soleil est 1,5 x $10^{11}$ m et la distance entre Mars et le Soleil est 2,3 x $10^{11}$ m.




www.teachengineering.org/view_activity.php?url=collection/cub_/activities/cub_mars/cub_mars_lesson04_activity1.xml

Au périhélie, le vaisseau est à la même distance du Soleil que la Terre et $r_p$ = 1,5 x $10^{11}$ m. À l'aphélie, le vaisseau est à la même distance du Soleil que Mars et $r_a$ = 2,3 x $10^{11}$ m. Le temps que dure le voyage est égal à la moitié de la période puisqu'on ne parcourt que la moitié de l'orbite.

Le demi-grand axe de cette orbite de transfert est

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{2,3\times10^{11}m + 1,5\times10^{11}m}{2} = 1,9\times10^{11}m$$

Le temps sera donc de

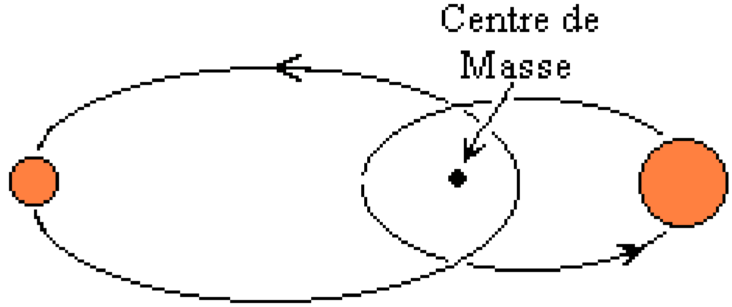
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\ &= \pi\sqrt{\frac{\left(1,9\times10^{11}m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2\times10^{30}kg}} \\ &= 2,25\times10^{7}s \\ &= 261\,jours \end{aligned}$$

Bien sûr, il faut s'assurer que Mars est bien au rendez-vous lorsque le vaisseau arrive à l'aphélie. On ne peut donc pas lancer le vaisseau n'importe quand. La période propice au lancement est appelée la *fenêtre de lancement*.

## Orbites de deux objets de masse comparable

Nous avons examiné ici des orbites dans des cas où la masse centrale est beaucoup plus grande que la masse de l'objet en orbite. Dans ce cas, la masse centrale ne bouge pas beaucoup et la petite masse décrit une orbite autour de la masse la plus grande.

Mais que se produit-il si les deux objets ont des masses similaires ? Alors, les forces gravitationnelles sont suffisamment grandes pour faire bouger les deux masses et la situation n'est plus aussi simple qu'auparavant. La solution de ce problème est quand même relativement simple. Les deux objets décrivent des orbites elliptiques avec le centre de masse à l'un des foyers.



Bien que les formules pour étudier ce genre de système ne sont tellement plus compliquées que celle pour un système où une masse est beaucoup plus grande que l'autre, nous n'étudierons pas ce genre de système dans ces notes.

## E1.4 LES TRAJECTOIRES PARABOLIQUES ($e$ = 1)

Si l'excentricité est exactement égale à 1, alors la formule

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

devient

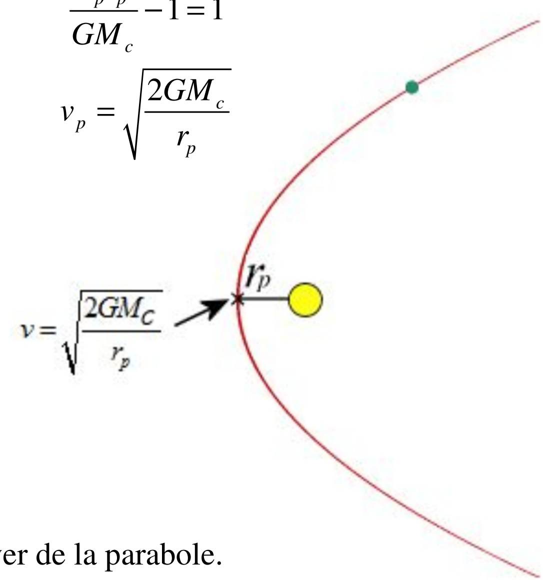
$$r = 2r_p \frac{1}{1+\cos\theta}$$

Cette équation est l'équation d'une parabole. Pour avoir une telle trajectoire, il faut que la vitesse au point le plus près soit donnée par

$$e = 1$$

$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 = 1$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$$




La masse centrale est alors au foyer de la parabole.

en.wikibooks.org/wiki/Astrodynamics/Orbit_Basics

*L'énergie mécanique*

L'énergie mécanique de l'objet sur la trajectoire parabolique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Énergie pour une trajectoire parabolique**

$$E_{mec} = 0$$

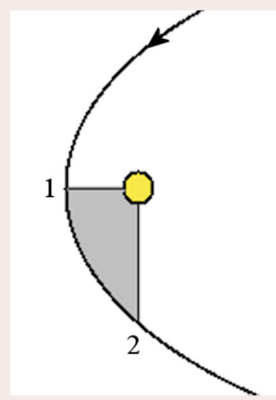
On a ce genre d'orbite quand un corps, comme un objet, initialement très loin du Soleil avec une vitesse pratiquement nulle, s'approche de la masse centrale pour faire un seul passage. Il s'éloigne ensuite pour retourner à une distance très grande où il arrivera avec une vitesse pratiquement nulle. L'objet ne revient pas puisque son énergie n'est pas négative, ce qui signifie que l'objet n'est pas lié à la masse centrale.

*La vitesse*

La vitesse de l'objet se trouve facilement à partir de la position en utilisant la formule de l'énergie mécanique.

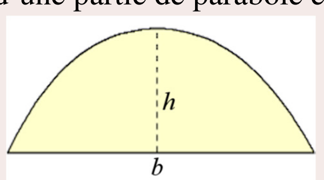
$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

## Exemple E1.4.1




Une comète suit une trajectoire parabolique autour du Soleil ($M$ = 2 x $10^{30}$ kg). Combien faut-il de temps pour que la comète passe de la position 1 à la position 2, sachant que la vitesse au point le plus près du Soleil est de 100 km/s ?

Indice : l'aire d'une partie de parabole est




$$A = \frac{2bh}{3}$$

On peut trouver le temps avec la deuxième loi de Kepler.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p(1+e)}}{2}\Delta t$$

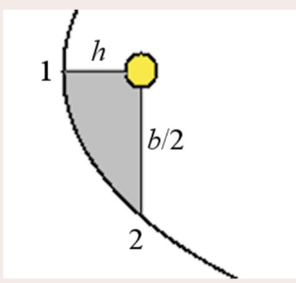
Toutefois, pour pouvoir appliquer cette formule, on doit savoir la distance de la comète au point le plus près du Soleil. On trouve cette distance avec l'énergie mécanique.

$$0=\frac{1}{2}mv_p^2-\frac{GM_c m}{r_p}$$
$$0=\frac{1}{2}v_p^2-\frac{GM_c}{r_p}$$
$$0=\frac{1}{2}\left(100\,000\tfrac{m}{s}\right)^2-\frac{6,674\times10^{-11}\tfrac{kgm^2}{s^2}\cdot2\times10^{30}kg}{r_p}$$
$$r_p=2,6696\times10^{10}m$$

On a donc

$$\Delta A=\frac{\sqrt{GM_c r_p(1+e)}}{2}\Delta t$$
$$\Delta A=\frac{\sqrt{6,674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot2\times10^{30}kg\cdot2,6696\times10^{10}m(1+1)}}{2}\Delta t$$
$$\Delta A=1,3348\times10^{15}\tfrac{m^2}{s}\Delta t$$

Pour l'aire de la parabole, on a




$$h=r_p$$

$$\frac{b}{2}=r_p\frac{1+e}{1+r\cos90°}=r_p\frac{2}{1+\cos90°}=2r_p$$

L'aire est la moitié de la partie de parabole donnée par la formule de l'aire.

$$\Delta A=\frac{1}{2}\frac{2bh}{3}=\frac{1}{2}\frac{2(4r_p)\cdot(r_p)}{3}=\frac{4r_p^2}{3}=\frac{4\left(2,6696\times10^{10}m\right)^2}{3}=9,5024\times10^{20}m^2$$

Le temps est donc

$$\Delta A=1,3348\times10^{15}\tfrac{m^2}{s}\Delta t$$
$$9,5024\times10^{20}m^2=1,3348\times10^{15}\tfrac{m^2}{s}\Delta t$$
$$\Delta t=711\,893s$$
$$\Delta t=197,7h$$

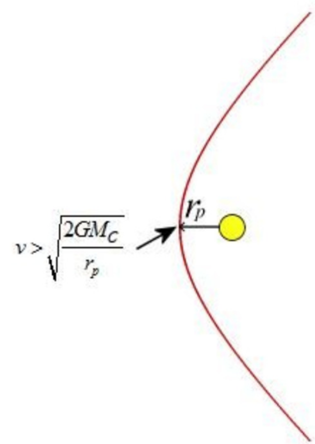
# E1.5 LES TRAJECTOIRES HYPERBOLIQUES ($e$ > 1)

Si l'excentricité est supérieure à 1, alors la formule

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

décrit une hyperbole. Pour avoir une telle trajectoire, il faut que la vitesse au point le plus près soit donnée par

$$e > 1$$
$$\frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 > 1$$
$$v_p > \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$$




en.wikibooks.org/wiki/Astrodynamics/Orbit_Basics

Alors, l'énergie de l'objet sur la trajectoire hyperbolique est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} > 0$$

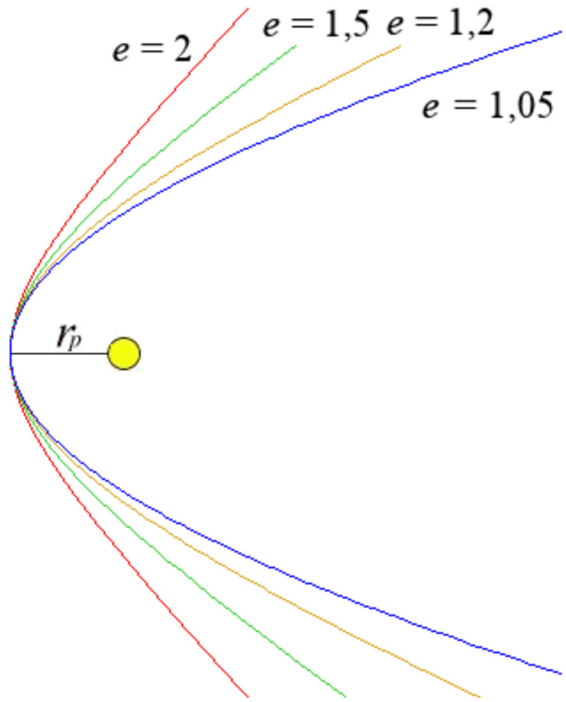
**Énergie pour une trajectoire hyperbolique**

$$E_{mec} > 0$$

L'objet ne revient pas puisque son énergie n'est pas négative, ce qui signifie que l'objet n'est pas lié à la masse centrale.

Dans ce cas, un objet, parti d'une distance très grande avec une certaine vitesse, s'approche de la masse centrale pour faire un seul passage. Il s'éloigne ensuite pour retourner à une distance très grande où il arrivera avec une certaine vitesse.

Voici comment change la forme de l'orbite hyperbolique en fonction de l'excentricité.




Très peu d'objets observés suivent des trajectoires hyperboliques avec une excentricité élevée. Pour toutes les comètes connues, la plus grande valeur d'excentricité observée fut de 1,057.

# E1.6 RÉSUMÉ DES TRAJECTOIRES POSSIBLES

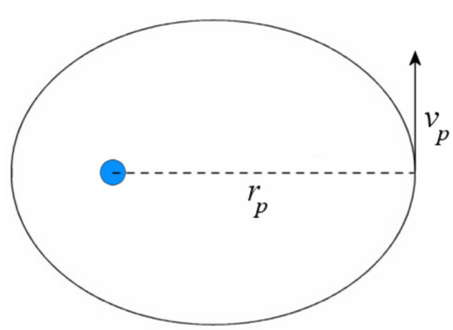
Voici un petit résumé des trajectoires possibles selon la vitesse au point le plus près ou de l'excentricité.

| Vitesse | Trajectoire | Excentricité | Énergie mécanique |
|---|---|---|---|
| $v_p = \sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$ | Circulaire | $e = 0$ | Négative |
| $\sqrt{\frac{GM_c}{r_p}} < v_p < \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$ | Elliptique | $0 < e < 1$ | Négative |
| $v_p = \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$ | Parabolique | $e = 1$ | Nulle |
| $v_p > \sqrt{\frac{2GM_c}{r_p}}$ | Hyperbolique | $e > 1$ | Positive |

On peut alors se demander ce qui arrive si

$$v_p < \sqrt{\frac{GM_c}{r_p}}$$

En fait, cette situation est impossible. Si on a une vitesse inférieure à celle qu'on doit avoir pour une orbite circulaire, alors il y a trop de force centripète par rapport à ce qu'on doit avoir à cette vitesse et l'objet va se rapprocher de la masse centrale. On obtiendra alors l'orbite elliptique suivante.



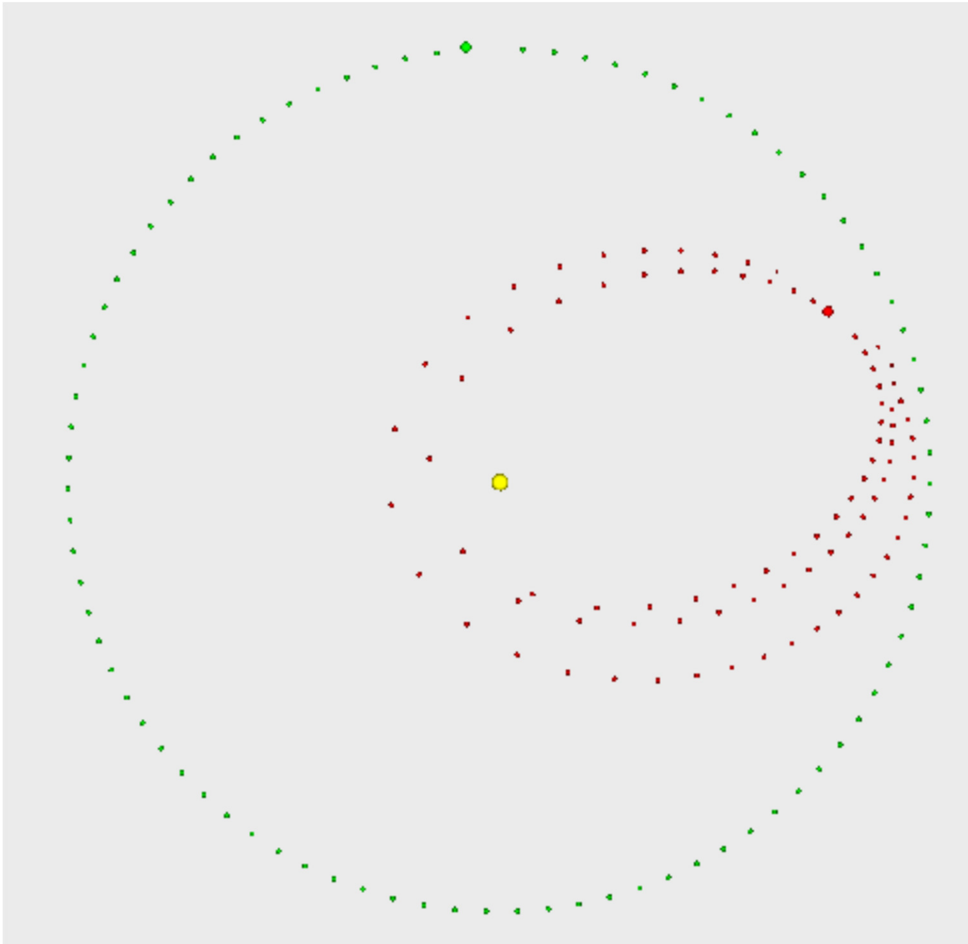

Cette situation est impossible parce qu'on a défini $r_p$ comme étant la distance la plus près de la masse centrale, ce qui n'est pas le cas sur cette figure. On ne peut donc pas avoir une vitesse inférieure à celle de l'orbite circulaire au point le plus près de la masse centrale.

## E1.7 LES PERTURBATIONS

La forme des orbites est encore plus complexe que ce qui a été vu précédemment. Par exemple, les orbites elliptiques ne sont jamais des ellipses, des paraboles ou des hyperboles parfaites. S'il n'y avait que deux astres dans l'univers, alors leurs orbites seraient parfaites. Dès qu'il y a d'autres corps assez près, les perturbations faites par ces autres corps modifient lentement les orbites des objets.

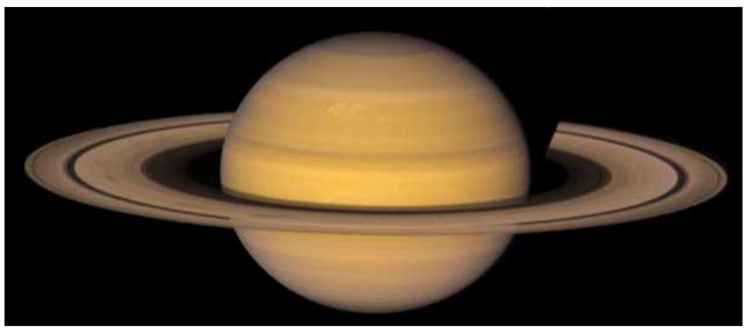
Dans le système solaire, le mouvement de toutes les planètes est perturbé par la force gravitationnelle exercée par les autres planètes. Notons que plus une planète est légère, plus il est facile de la dévier de sa trajectoire. Les comètes étant des corps relativement légers, leurs trajectoires sont facilement modifiées, spécialement si elles passent près d'une planète massive comme Jupiter. Les astéroïdes sont également fortement influencés par la force gravitationnelle de Jupiter. Bien qu'ils ne passent pas nécessairement très près de Jupiter, la force gravitationnelle qu'exerce cette dernière est suffisamment grande pour avoir des effets à long terme.

On peut voir sur cette figure les modifications faites (sur une période de 50 ans) à l'orbite d'un astéroïde (en rouge) qui vient passer trop près de Jupiter (en vert).



C'est d'ailleurs grâce aux perturbations que fut découverte la planète Neptune en 1846. William Herschell avait découvert la planète Uranus tout à fait par hasard en 1781 et on étudia son orbite à partir de ce moment. En 1820, il était clair qu'il y avait un problème avec l'orbite de cette planète. Elle semblait dévier de l'orbite prévue. Certains pensèrent alors qu'une autre planète inconnue (qu'on appellera Neptune) située au-delà de l'orbite d'Uranus perturbait de mouvement de celle-ci. (Effectivement, en 1821, Uranus et Neptune étaient le plus près l'un de l'autre et la force de perturbation était alors à son maximum.) John Couch Adams et Urbain Le Verrier se lancèrent alors tous deux dans le calcul de la position de l'objet perturbateur et arrivèrent sensiblement à la même position pour Neptune. Le résultat était un peu approximatif, car il y avait quelques suppositions à faire, comme la distance de cette nouvelle planète par exemple. Lorsqu'Adams envoya ses résultats à l'observatoire de Greenwich en septembre 1845, on ne parvint pas à confirmer ses résultats. Il faut dire qu'on mit peu d'effort pour y arriver, car le directeur de l'observatoire n'était pas tellement impressionné par la méthode employée. Il aurait fallu mettre beaucoup d'effort pour un résultat incertain, disait-il. Puis, en juin 1846, Le Verrier publia le résultat de ses calculs. La similarité de ses résultats avec ceux d'Adams parvint à convaincre alors les observateurs de Greenwich que ce qu'Adams avait fait était peut-être bon et ils se lancèrent dans une recherche plus soutenue de la planète. Pendant ce temps, le Verrier envoya ses résultats à l'observatoire de Berlin en septembre 1846, après avoir tenté en vain d'intéresser les astronomes français. Or, l'Observatoire de Berlin possédait une excellente carte du ciel de l'endroit où devrait se trouver Neptune selon Le Verrier, ce qui leur permettait de facilement détecter le moindre changement dans cette région du ciel. Ainsi, en moins d'une heure, les astronomes de Berlin découvrirent Neptune à environ un degré de la position prévue par Le Verrier. Après l'annonce de cette découverte, les astronomes de Greenwich purent s'apercevoir qu'ils avaient observé Neptune deux fois sans s'en rendre compte… Tout ça pour dire que la loi de la gravitation nous a permis de découvrir Neptune par calcul. C'est un des plus grands succès de la théorie de la gravitation de Newton.

Bien souvent, les effets des perturbations se compensent au cours du temps et l'orbite, bien que perturbée, est assez stable. Mais si les perturbations se font toujours au même endroit, à intervalle régulier, alors l'orbite ne sera pas stable. Ainsi, si un astéroïde a une période exactement égale à la moitié de celle de Jupiter, le maximum des perturbations, qui se produit quand l'astéroïde et Jupiter sont le plus près un de l'autre, arrive toujours au même endroit sur l'orbite de l'astéroïde, soit à toutes les deux révolutions de l'astéroïde sur son l'orbite. Alors, au lieu de se compenser au cours du temps, les perturbations s'additionnent toujours et l'astéroïde est lentement déplacé de cette orbite. C'est ce qu'on appelle le phénomène de résonance gravitationnelle. Si on examine la distribution des astéroïdes dans le système solaire, on remarque effectivement qu'il n'y a pas d'astéroïdes sur des orbites ayant un demi-grand axe qui correspondent aux orbites dont la période à un rapport simple avec la période de Jupiter. Le même phénomène se produit dans les anneaux de Saturne. Les perturbations des satellites empêchent certaines orbites pour les petites roches formant l'anneau, ce qui explique les bandes noires des anneaux.



www.lasam.ca/billavf/nineplanets/saturn.html

Les perturbations affectent également les objets plus massifs comme la Terre. À cause des perturbations faites par les autres planètes, l'excentricité de l'orbite de la Terre varie au cours du temps. Les planètes n'étant pas des sphères uniformes, les autres planètes exercent également un moment de force qui peut modifier la direction de l'axe de rotation des planètes. Ainsi, il peut même arriver que l'axe s'inverse complètement et qu'ainsi la planète tourne à l'envers des autres, comme c'est le cas actuellement pour Vénus. Pour la Terre, un tel changement drastique ne peut pas se produire, car la présence de la Lune a tendance à stabiliser l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre de sorte qu'il ne peut que varier que de quelques degrés. Tous ces changements du mouvement de la Terre ont une énorme influence sur le climat de la Terre et sont en grande partie responsables des glaciations.

Il est impossible ici de donner des équations pour décrire le mouvement des planètes en tenant compte des perturbations. Il a été montré qu'il est impossible de donner une solution exacte dès qu'il y a 3 corps ou plus en interaction. On peut cependant faire des approximations et des simulations sur ordinateurs.

# E1.8 LE CHAMP GRAVITATIONNEL

## Définition du champ gravitationnel

Si on place un objet à un endroit et qu'il subit une force gravitationnelle, alors il y a un champ gravitationnel à cet endroit. Puisque n'importe quelle masse placée près de la Terre subit une force, on peut conclure qu'il y a un champ gravitationnel autour de la Terre.

On notera ce champ par $g$. Par définition, le champ a les caractéristiques suivantes :

1) Plus le champ est fort, plus la force est grande.
2) Plus on place une masse importante dans un champ, plus la force est grande.

La deuxième caractéristique se remarque facilement à la surface de la Terre. Si on place une petite roche à un endroit, elle subit une certaine force. Si on place une masse deux fois plus grande au même endroit, elle subit une force deux fois plus grande.

La valeur du champ peut varier d'un endroit à l'autre. C'est d'ailleurs pour ça qu'on dit que c'est un champ, car en mathématiques, un champ est une quantité dont la valeur peut varier d'un endroit à l'autre.

Selon les deux caractéristiques mentionnées précédemment, on peut résumer la définition du champ gravitationnel avec la formule suivante.

**Force sur un objet de masse *m* dans un champ gravitationnel**

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

Comme la force est un vecteur, $g$ doit aussi être un vecteur. Ce vecteur pointe dans la direction de la force que subira une masse si on la place à cet endroit. Le champ gravitationnel est donc un champ vectoriel.

L'unité du champ est le N/kg ou encore le m/s² (qui sont deux unités équivalentes).

## Qu'est-ce qui fait le champ ?

On peut se demander d'où vient le champ s'il y a un champ à un endroit. La réponse n'est pas si compliquée. S'il y a un champ gravitationnel à un endroit, c'est qu'une masse va subir une force gravitationnelle si on la place à cet endroit. Or, si elle subit une force gravitationnelle, c'est qu'elle est attirée par d'autres corps. Donc s'il y a un champ à un endroit, c'est qu'il y a des masses dans le voisinage de cet endroit. Cela veut donc dire que

**Les masses font un champ gravitationnel autour d'elles.**

Par exemple, il y a un champ gravitationnel dans votre chambre parce qu'il y a un corps très important tout près de votre chambre qui fait un champ autour de lui : La Terre.

## Champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M*

Si les masses font un champ autour d'elles, on doit être en mesure de déterminer la grandeur de ce champ. Commençons par un cas simple. On va déterminer quel est le champ gravitationnel fait par une masse ponctuelle de masse $M$.

On sait que si on a deux masses ponctuelles (de masses $M$ et $m$), la force entre les deux est

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

On peut aussi considérer qu'il y a une force sur la masse $m$ parce qu'elle est dans le champ gravitationnel créé par la masse $M$. Dans ce cas, la force est

$$F = mg$$

Comme ces deux façons de voir la force gravitationnelle doivent donner le même résultat, on a

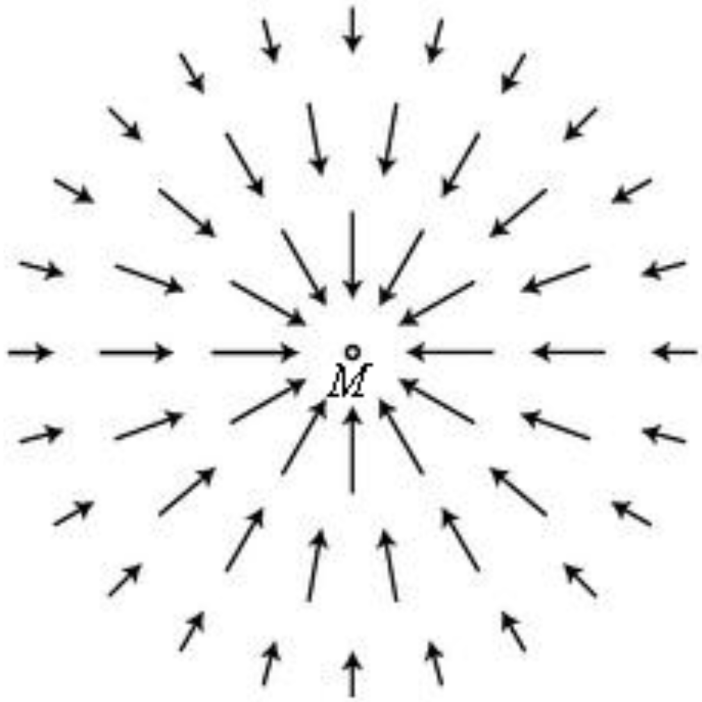
$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

ce qui nous donne

**Grandeur du champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M***

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

On voit que le champ gravitationnel diminue rapidement à mesure qu'on s'éloigne de la masse. Aussi, plus la masse sera importante, plus le champ gravitationnel sera important autour de la masse. La direction du champ à différents endroits autour de la masse $M$ est illustrée sur la figure.

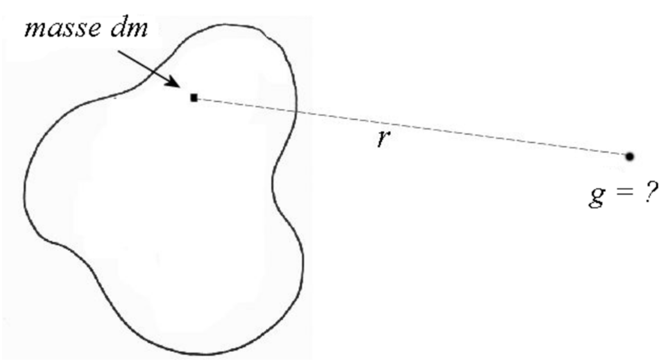



www.vias.org/physics/bk4_06_03.html

Le champ pointe toujours vers la masse *M,* car c'est la direction de la force que fait la masse *M* sur les masses autour d'elle puisque la force gravitationnelle est toujours attractive.

## Champ gravitationnel d'un objet non ponctuel

Pour calculer le champ fait par un objet de forme quelconque, on va le séparer en petits morceaux infinitésimaux. Le champ fait par chacun de ces petits morceaux ponctuels de masse *dm* sera identique au champ fait par une masse ponctuelle. La grandeur de ce champ est



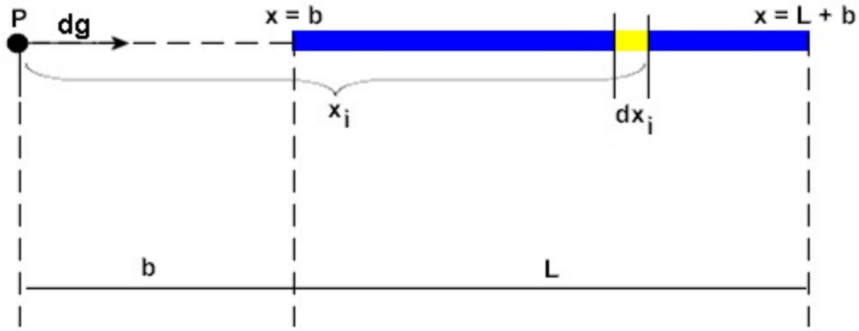

$$dg = \frac{Gdm}{r^2}$$

Finalement, on va faire une somme vectorielle de tous les champs faits par les petites masses pour obtenir le champ total. Cette somme d'infinitésimaux est une intégrale.

Comme on l'a dit précédemment, vous n'êtes pas tout à fait prêt pour faire des intégrales dans des objets en deux ou trois dimensions. On peut cependant le faire pour des objets en une dimension comme des tiges.

<u>*Champ gravitationnel d'une tige ayant une densité constante*</u>

On veut ici le champ gravitationnel au point P situé à une distance *b* d'une tige rectiligne uniforme de longueur *L*. Pour calculer ce champ, on sépare la tige en petits morceaux de longueur *dx*.




online.cctt.org/physicslab/content/phyapc/lessonnotes/Efields/EchargedRods.asp

La grandeur du champ gravitationnel fait par un petit morceau, que nous appellerons *dg*, est

$$dg = G\frac{dm}{x^2}$$

où *dm* est la masse du petit morceau et *x* est la distance entre le petit morceau et le point P. (Le point P est à l'origine.)

Si la tige est de densité uniforme alors la masse est $dm = \lambda dx$, où $\lambda$ étant la masse linéique de la tige. Le champ gravitationnel fait par le petit morceau est donc

$$dg = G\frac{\lambda dx}{x^2}$$

La grandeur du champ total est simplement la somme des champs faits par chacun des petits morceaux.

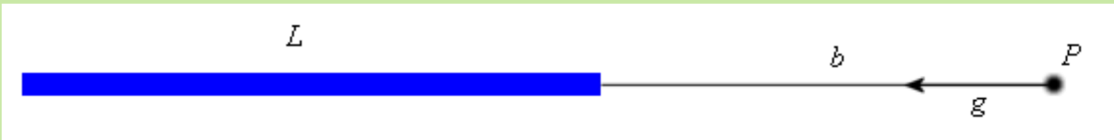
$$\begin{aligned} g &= \int_b^{b+L} G\frac{\lambda dx}{x^2} \\ &= G\lambda\left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_b^{b+L} \\ &= G\lambda\left[\frac{-1}{b+L} - \frac{-1}{b}\right] \\ &= G\lambda\left[\frac{-b}{b(b+L)} + \frac{b+L}{b(b+L)}\right] \\ &= \frac{G\lambda L}{b(b+L)} \end{aligned}$$

Puisque $\lambda L$ est la masse de la tige, le champ est donc

**Champ gravitationnel d'une tige uniforme**

$$g = \frac{GM}{b(b+L)}$$

Dans la direction suivante




Ce calcul est de loin le plus simple qu'on peut faire pour trouver le champ d'un objet non ponctuel. Dans la plupart des cas, il faut, en plus, séparer le vecteur $dg$ en composantes avant de faire les intégrales pour chaque composante. C'est de toute beauté.

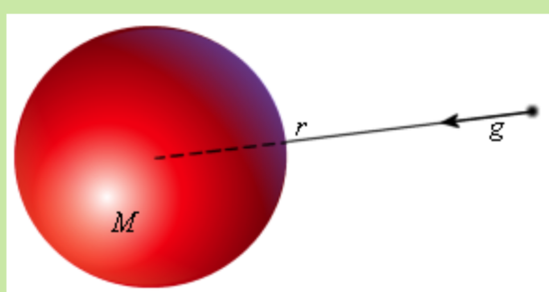
## Le champ gravitationnel d'une sphère

Le champ gravitationnel d'une sphère est d'une importance capitale puisque c'est la forme des planètes et des étoiles, seuls objets qui ont une masse suffisante pour générer des forces gravitationnelles non négligeables. On pourrait même dire que le calcul du champ gravitationnel pour toutes autres formes que la sphère n'est qu'un simple exercice intellectuel dont la seule utilité est de nous divertir.

On trouve le champ résultant d'une sphère de la même façon que ce qu'on a fait avec la tige : on sépare la sphère en petits morceaux et on trouve le champ fait par chacun des petits morceaux. On somme ensuite à l'aide d'une intégrale les champs faits par chacun des petits morceaux pour obtenir le champ total. Le résultat de ce calcul assez complexe, qu'on vous épargne, est étonnamment simple. À l'extérieur d'une sphère, le champ gravitationnel est identique à celui fait par une masse ponctuelle de même masse qui serait située au centre de la sphère. Autrement dit, le champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère est donné par

**Champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère**

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

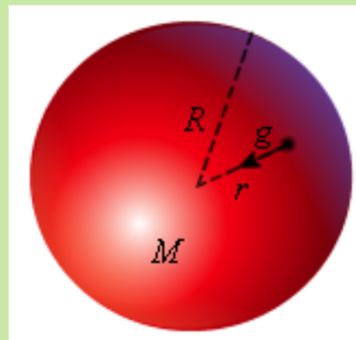


où $r$ est la distance à partir du centre de la sphère. (Ce résultat, de même que ceux qui suivront, est valide uniquement si la sphère est symétrique, ce qui veut dire qu'elle est identique dans toutes les directions à partir du centre. La densité peut varier, mais elle ne peut varier qu'en fonction de la distance du centre de la sphère.)

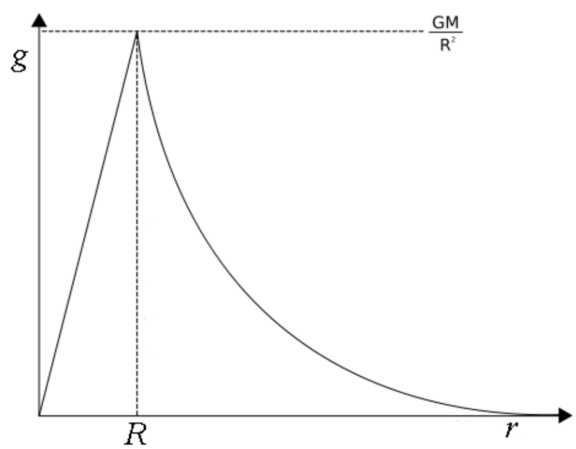
À l'intérieur de la sphère, le champ gravitationnel dépend de la façon dont la masse est répartie. Si la masse est répartie uniformément, on a

**Champ gravitationnel à l'intérieur d'une sphère de densité constante**

$$g = \frac{GMr}{R^3}$$




Le graphique de l'intensité du champ en fonction de la distance du centre de la sphère est donc

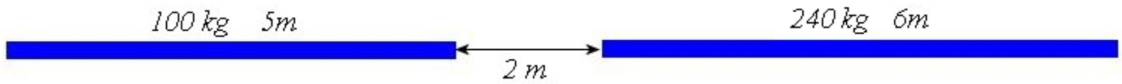



en.wikibooks.org/wiki/A-level_Physics_(Advancing_Physics)/Gravitational_Fields/Worked_Solutions

Le champ gravitationnel d'une sphère uniforme atteint donc sa valeur maximale à la surface de la sphère.

## Pourquoi utiliser le champ gravitationnel ?

Le champ va nous permettre de séparer le calcul de la force entre deux objets en deux étapes, ce qui va grandement nous faciliter la vie. Par exemple, il serait extrêmement difficile de calculer directement la force gravitationnelle entre ces deux tiges avec la loi de la gravitation.




On fait ce genre de calcul en séparant le calcul en deux parties.

1) On calcule le champ gravitationnel fait par un des objets

   On trouve le champ avec la formule du champ fait par cet objet. Si on n'a pas de formule pour un objet de cette forme, on la trouve avec une intégrale.

   Ici, le champ fait par la tige de gauche se trouve facilement puisqu'on a la formule du champ fait par une tige. Le champ est

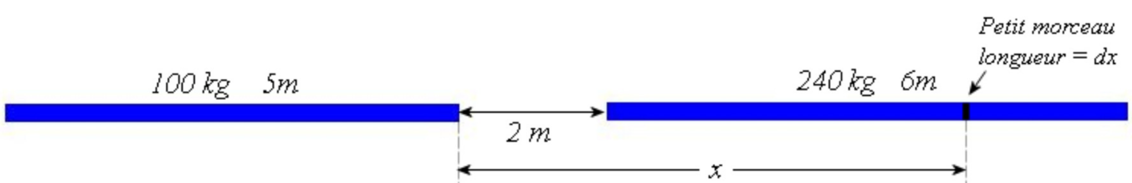
$$g = \frac{G \times 100kg}{x(x+5m)}$$

   On a utilisé $x$ pour la distance, car les atomes de la tige de droite ne sont pas tous à la même distance de la tige de gauche.

2) On trouve la force sur l'autre objet avec $F = mg$

   Ça peut être facile, mais ça peut aussi être compliqué. En effet, si l'objet n'est pas dans un champ uniforme, il faudra séparer l'objet en petits morceaux et calculer la force sur chacun des morceaux. On trouvera ensuite la force totale en sommant, à l'aide d'une intégrale, les forces sur chacun des morceaux.

   Ici, le champ de gauche ne fait pas un champ uniforme. La tige de droite doit donc être séparée en petits morceaux infinitésimaux de longueur $dx$.




   La force sur le petit morceau est

$$dF = -gdm$$

   Elle est négative, car elle est vers la gauche puisque l'autre tige attire le morceau de masse. En utilisant la masse du petit morceau ($dm = \lambda dx$) et la formule du champ, on obtient

$$\begin{aligned} dF &= -g dm \\ &= -\frac{G\times 100kg}{x(x+5m)}\lambda_2 dx \end{aligned}$$

Comme la masse linéique de la deuxième tige est $\lambda_2$ = 240 kg/6 m= 40 kg/m, on a

$$dF = -\frac{G\times 100kg}{x(x+5m)} 40\tfrac{kg}{m} dx = -\frac{G\times 4000\frac{kg^2}{m}}{x(x+5m)} dx$$

La force totale est donc

$$F = \int_{2m}^{8m} \frac{-G\times 4000\frac{kg^2}{m}}{x(x+5m)} dx$$

Les bornes vont de 2 m à 8 m, car la tige de droite commence à 2 m du bout de la tige de gauche et se termine à 8 m du bout de la tige de gauche. Cette intégrale donne

$$\begin{aligned} F &= \frac{-G\times 4000\frac{kg^2}{m}}{5m}\left[\ln(x) - \log(x+5m)\right]_{2m}^{8m} \\ &= \frac{-G\times 4000\frac{kg^2}{m}}{5m}\left[\ln\left(\frac{x}{x+5m}\right)\right]_{2m}^{8m} \\ &= \frac{-G\times 4000\frac{kg^2}{m}}{5m}\left[\ln\left(\frac{8}{13}\right) - \ln\left(\frac{2}{7}\right)\right] \\ &= -1{,}192\times 10^{-7} N \end{aligned}$$

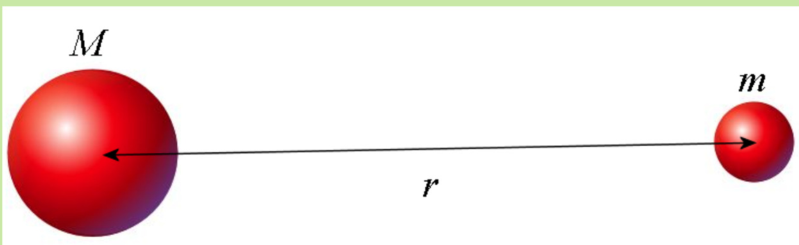
En utilisant le champ gravitationnel, on a pu trouver la force en faisant deux intégrales l'une après l'autre. Imaginez ce que ce calcul aurait donné si on avait tenté de calculer directement la force sans passer par le champ. On aurait alors tenté de faire deux intégrales imbriquées l'une dans l'autre… Sachez aussi que l'exemple donné était relativement simple puisque c'était un problème en une dimension. Imaginez donc ce que peuvent donner toutes ces intégrales triples imbriquées les unes dans les autres quand on tente de calculer directement la force entre deux objets en trois dimensions. En passant par le champ, on simplifie un peu les calculs.

## La force entre deux sphères

On peut maintenant calculer la force entre deux sphères. Le calcul se fait en deux étapes, comme le calcul de force entre deux tiges fait précédemment. On commence par calculer le champ gravitationnel fait par une des sphères. On connait le résultat dans ce cas : un champ identique à celui d'une masse ponctuelle située au centre de la sphère. On doit ensuite calculer la force sur la deuxième sphère en calculant la force sur chaque atome de la deuxième sphère causée par le champ de la première sphère et en sommant toutes ces forces en faisant une intégrale. Le résultat est encore une fois remarquablement simple. La force entre les sphères est la même que celle qu'on aurait si toute la masse de chaque sphère était concentrée au centre de la sphère ! Ce calcul a demandé de faire deux intégrales assez complexes (une pour le calcul de g pour le champ de la première sphère et une autre pour la force sur la deuxième sphère), mais le résultat est tout simple. La force entre deux sphères est donnée par

**Force entre deux sphères**

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$




où $r$ est la distance entre les centres des sphères.

## Application : Champ à la surface ou près de la surface d'une planète

## Exemple E1.8.1

Quelle est la grandeur du champ gravitationnel…

a) à la surface de la Terre si elle a une masse de 5,972 x $10^{24}$ kg et un rayon de 6378 km ?

À la surface, on est à 6378 km du centre de la Terre. En prenant la formule du champ fait par une sphère, on obtient donc

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg}{\left(6,378\times10^{6}\,m\right)^2} = 9,80\,\frac{N}{kg}$$

b) à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre si elle a une masse de 5,972 x $10^{24}$ kg et un rayon de 6378 km ?

À 1000 km de la surface, on est à 7378 km du centre de la Terre. En prenant la formule du champ fait par une sphère, on obtient donc

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg}{\left(7,378\times10^6\,m\right)^2} = 7,32\,\frac{N}{kg}$$

On peut voir que le champ gravitationnel diminue à mesure qu'on s'éloigne de la Terre.

c) à la surface de la Lune si elle a une masse de 7,35 x $10^{22}$ kg et un rayon de 1738 km ?

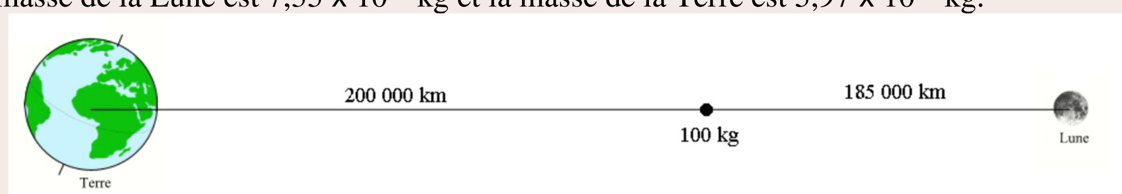
À la surface, on est à 1738 km du centre de la Lune. En prenant la formule du champ fait par une sphère, on obtient donc

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,35\times10^{22}\,kg}{\left(1,738\times10^6\,m\right)^2} = 1,62\,\frac{N}{kg}$$

Ce champ est environ le sixième du champ à la surface de la Terre.

## Exemple E1.8.2

Un satellite de 100 kg est entre la Terre et la Lune, à l'endroit indiqué sur la figure. La masse de la Lune est 7,35 x $10^{22}$ kg et la masse de la Terre est 5,97 x $10^{24}$ kg.




a) Quel est le champ à cet endroit ?

Le champ total est la somme des champs faits par chaque planète. Comme le champ est toujours vers la planète qui cause le champ, le champ fait par la Terre est vers la gauche et le champ fait par la Lune est vers la droite.

On a donc

$$\begin{aligned} g &= -\frac{GM_{Terre}}{r_{Terre}^2} + \frac{GM_{Lune}}{r_{Lune}^2} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\times10^{24}\,kg}{\left(2\times10^8\,m\right)^2} + \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,35\times10^{22}\,kg}{\left(1,85\times10^8\,m\right)^2} \\ &= -0,009961\,\frac{N}{kg} + 0,000144\,\frac{N}{kg} \\ &= -0,009817\,\frac{N}{kg} \end{aligned}$$

La valeur négative signifie que le champ gravitationnel est vers la Terre.

b) Quelle est la force sur le satellite ?

La force est

$$\begin{aligned} F &= mg \\ &= 100kg \times -0{,}009817\tfrac{N}{kg} \\ &= -0{,}9817N \end{aligned}$$

Comme la force est négative, elle est dirigée vers la Terre.

## Correction au champ gravitationnel à la surface de la Terre

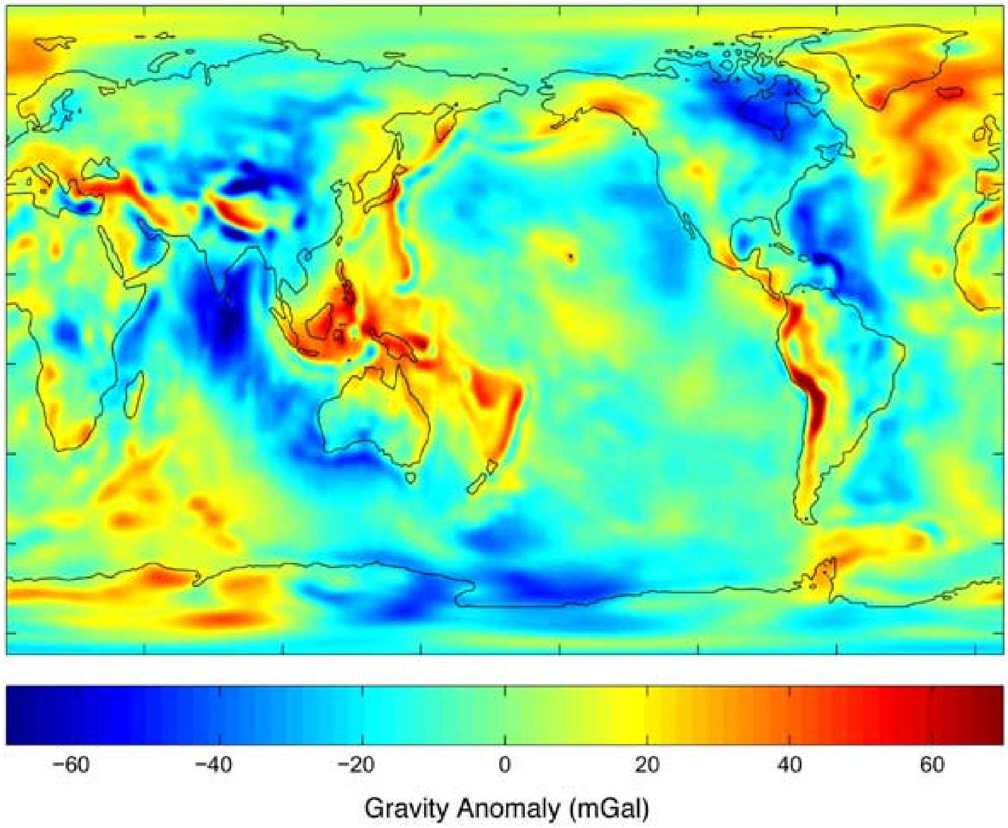
On a trouvé dans un exemple précédent que si la Terre était une sphère parfaite alors le champ gravitationnel à la surface serait partout de 9,80 N/kg.

Toutefois, la Terre n'est pas une sphère parfaite. Elle a plutôt la forme d'une sphère légèrement aplatie. Ainsi, l'intensité du champ gravitationnelle varie avec la latitude. Le calcul de la valeur du champ dans ce cas est assez difficile, mais un bon résultat approximatif est

$$g = \left(9{,}780327 + 0{,}0516323\sin^2\varphi + 0{,}0002269\sin^4\varphi\right)\tfrac{N}{kg}$$

où $\phi$ est la latitude. Québec étant aux alentours de $\phi = 46^0$, on a un champ gravitationnel de 9,8071 N/kg.

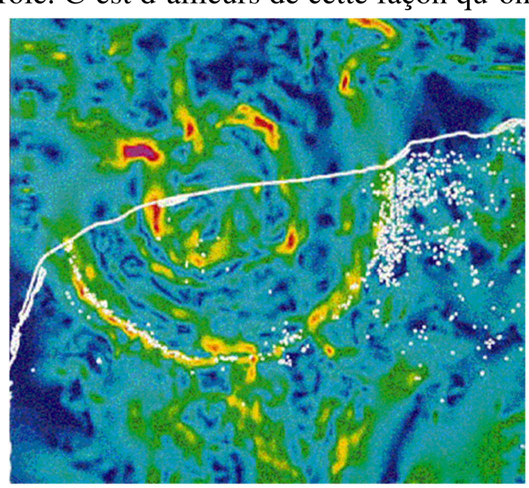
Nous pouvons encore avoir des déviations de l'ordre de $10^{-3}$ N/kg par rapport aux valeurs données par la dernière formule puisque la Terre n'est pas un ellipsoïde de révolution parfait (il y a des variations d'altitude) et n'a pas une composition parfaitement uniforme. La valeur de *g* peut donc changer selon la structure géologique locale. C'est ce qu'on appelle l'anomalie de la gravitation. La carte suivante vous montre l'anomalie à la surface de la Terre (le Gal est une unité valant 0,01 N/kg).




www.zonu.com/detail-en/2009-11-19-11208/Gravity-anomalies-in-the-world.html

On peut donc estimer que l'anomalie à Québec est environ de -20 mGal et l'intensité du champ à 9,8071 N/kg – 0,00020 N/kg = 9,8069 N/kg.

L'anomalie de gravitation n'est jamais très grande, de l'ordre de $10^{-3}$ N/kg au maximum, mais peut être suffisante pour permettre de détecter certaines structures géologiques d'intérêt dans le sol telles que des nappes de pétrole. C'est d'ailleurs de cette façon qu'on a trouvé le cratère du météorite qui a contribué à l'extinction des dinosaures il y a 65 millions d'années. Il est sur la péninsule du Yucatan au Mexique (figure de droite).



planets.agu.org/Interview-with-Dr-Wasson.php

Pour découvrir ces éléments, il faut des appareils très précis. Sachez qu'il existe actuellement des appareils pouvant détecter des variations aussi faibles que $10^{-8}$ N/kg dans le champ gravitationnel terrestre. Ces appareils sont si sensibles qu'ils détectent un changement du champ gravitationnel si on les soulève d'à peine 5 mm !

## Le champ gravitationnel à l'intérieur d'une planète

### Exemple E1.8.3

Quel est le champ gravitationnel à 500 km sous la surface de la Terre (si on suppose que la densité de la Terre est la même partout) ? La masse de la Terre est 5,97 x $10^{24}$ kg et son rayon est 6380 km.

Le champ est

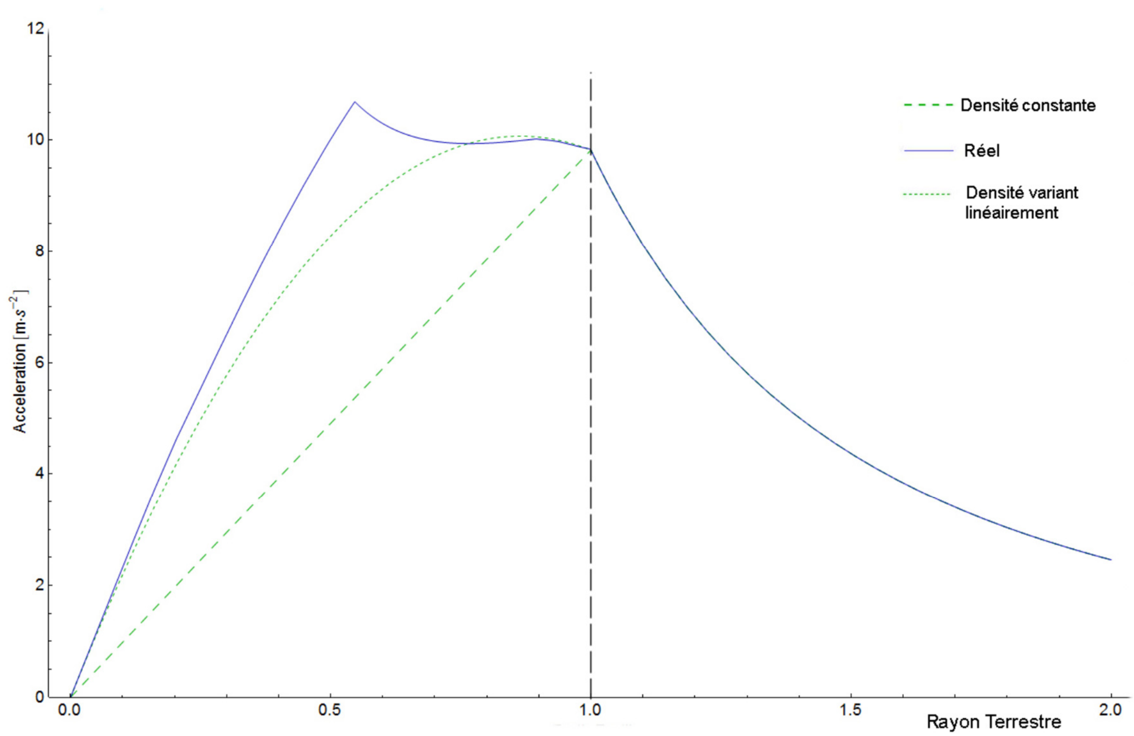
$$\begin{aligned} g &= \frac{GMr}{R^3} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\times5,97\times10^{24}kg\times5,88\times10^6m}{\left(6,38\times10^6m\right)^3} \\ &= 9,02\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

À partir de la formule du champ à l'intérieur d'une sphère, on pourrait donc croire que le champ gravitationnel diminue lorsqu'on pénètre à l'intérieur de la Terre. Toutefois, ce n'est pas le cas puisque la Terre n'est pas uniforme. La densité étant plus élevée au centre de la Terre que près de la surface, le champ gravitationnel augmente encore un peu lorsqu'on se dirige vers le centre de la Terre à partir de la surface et ne commence à diminuer que plus profondément à l'intérieur.

| Profondeur<br>km | $g$<br>m/s² | Profondeur<br>km | $g$<br>m/s² |
|---|---|---|---|
| 0 | 9,82 | 1400 | 9,88 |
| 33 | 9,85 | 1600 | 9,86 |
| 100 | 9,89 | 1800 | 9,85 |
| 200 | 9,92 | 2000 | 9,86 |
| 300 | 9,95 | 2200 | 9,90 |
| 413 | 9,98 | 2400 | 9,98 |
| 600 | 10,01 | 2600 | 10,09 |
| 800 | 9,99 | 2800 | 10,26 |
| 1000 | 9,95 | 2900 | 10,37 |
| 1200 | 9,91 | 4000 | 8,00 |

On ne connait pas la variation exacte de $g$ au-delà de 4000 km, mais on sait qu'il doit être égal à 0 au centre de la Terre (6380 km).

Ce qui donne le graphique suivant.

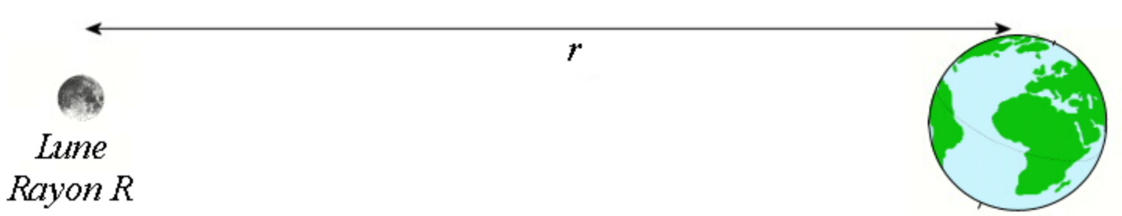



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/86/EarthGravityPREM.jpg

# E1.9 LES MARÉES

## Grandeur de la force de marée

Les marées sont dues au fait qu'un objet non ponctuel se retrouve dans un champ gravitationnel qui n'est pas uniforme. Pour montrer l'origine des marées, on va examiner les forces exercées sur la Lune par la Terre.

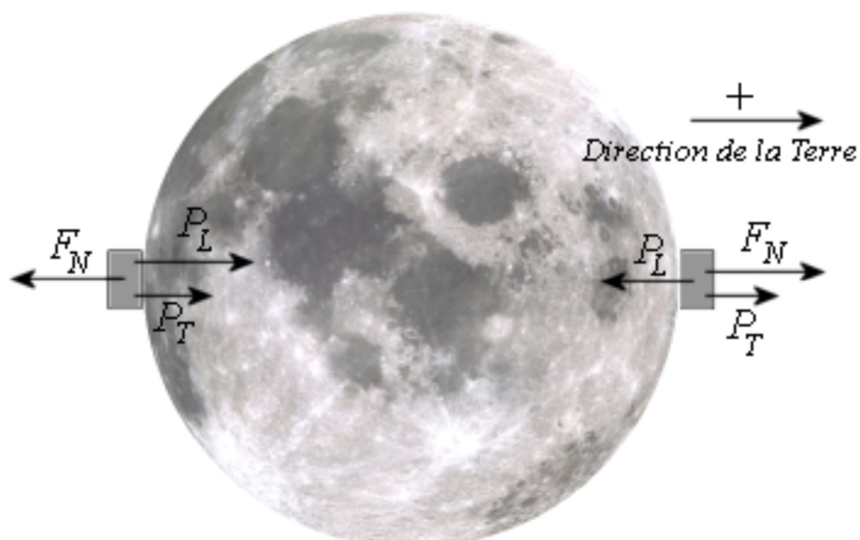



La Lune se retrouve dans le champ gravitationnel de la Terre qui diminue avec la distance. Calculons la différence d'intensité du champ gravitationnel entre le centre de la Lune et un point sur la surface directement en face de la Terre. Comme la Lune n'est pas très grande, on va supposer que le taux de variation du champ est constant.

$$\begin{aligned}\Delta g &= (\text{taux de variation de g})\times(\text{distance})\\ &= \left|\frac{dg}{dr}R\right|\\ &= \left|\frac{d\left(\frac{GM_{Terre}}{r^2}\right)}{dr}R\right|\\ &= \frac{2GM_{Terre}}{r^3}R\end{aligned}$$


Comme on suppose que le taux est constant, c'est aussi la différence entre le champ au centre de la Lune et le champ à la surface opposée de la Lune.

Regardons maintenant l'effet de cette variation de champ sur deux objets placés sur la Lune. Chacun de ces objets est attiré par la Lune et par la Terre. De plus, chacun de ces objets subit une normale faite par la surface de la Lune.




Pour écrire l'équation de force des objets, on doit connaitre l'accélération des objets. La Lune, et tout ce qu'il y a dessus, accélère vers la Terre puisqu'elle fait un mouvement circulaire. Cette accélération est causée par la force de gravitation de la Terre et elle vaut

$$\frac{GM_{Terre}M_{Lune}}{r^2} = M_{Lune}a$$
$$a = \frac{GM_{Terre}}{r^2}$$

Du côté droit (face du côté de la Terre), on a

$$F_N + P_T - P_L = ma$$
$$F_N + mg_{Terre} - P_L = ma$$
$$F_N + m\left(g_{\text{Terre au centre de Lune}} + \Delta g\right) - P_L = ma$$
$$F_N + m\left(\frac{GM_{Terre}}{r^2} + \frac{2GM_{Terre}R}{r^3}\right) - P_L = m\frac{GM_{Terre}}{r^2}$$

On voit que le premier terme de la parenthèse est annulé par le côté droit de l'équation. On obtient alors

$$F_N + \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3} - P_L = 0$$
$$F_N = P_L - \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3}$$

On voit que la normale est plus petite que ce qu'on aurait eu sans la présence de la Terre (sans la Terre, la normale aurait été égale au poids). Une personne sur la Lune (s'il y en avait une) aurait alors l'impression qu'il y a une force qui tente de soulever l'objet de la surface. Cette force est la force de marée.

De ce côté de la Lune, l'objet fait un mouvement circulaire avec un rayon légèrement plus petit que celui de la Lune, ce qui fait que la force centripète nécessaire pour faire ce mouvement est un peu plus petite. Par contre, la force de gravitation faite par la Terre est un peu plus grande parce qu'on est plus près de la Terre. La force vers le centre est donc plus grande que la force centripète nécessaire pour faire le mouvement circulaire. Cette trop grande force faite par la Terre est compensée par une diminution de la normale, et cela permet à l'objet de suivre le mouvement circulaire de la Lune.

Du côté gauche (face du côté opposé à la Terre), on a

$$-F_N + P_T + P_L = ma$$
$$-F_N + mg_{Terre} + P_L = ma$$
$$-F_N + m\left(g_{\text{Terre au centre de Lune}} - \Delta g\right) + P_L = ma$$
$$-F_N + m\left(\frac{GM_{Terre}}{r^2} - \frac{2GM_{Terre}R}{r^3}\right) + P_L = m\frac{GM_{Terre}}{r^2}$$

On voit encore une fois que le premier terme de la parenthèse est annulé par le côté droit de l'équation. On obtient alors

$$-F_N - \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3} + P_L = 0$$
$$F_N = P_L - \frac{2GM_{Terre}mR}{r^3}$$

On remarque encore une fois que la normale est plus petite que ce qu'on aurait eu sans la présence de la Terre. La force de marée fait donc une force qui tente de soulever l'objet de la surface. On remarque que la grandeur de cette force de marée est identique à ce qu'on avait de l'autre côté de la Lune.

De ce côté de la Lune, l'objet fait un mouvement circulaire avec un rayon légèrement plus grand que celui de la Lune, ce qui fait que la force centripète nécessaire pour faire ce mouvement est un peu plus grande. Par contre, la force de gravitation faite par la Terre est un peu plus petite parce qu'on est plus loin de la Terre. La force vers le centre est donc plus petite que la force centripète nécessaire pour faire le mouvement circulaire. Ce manque de force faite par la Terre est compensé par une diminution de la normale, et cela permet à l'objet de suivre le mouvement circulaire de la Lune.

Jusqu'ici, on pourrait croire que ce raisonnement ne s'applique que pour la Lune, mais on a vu que la situation n'est pas aussi simple. Ce n'est pas simplement la Lune qui tourne autour de la Terre, mais plutôt les deux qui sont en rotation autour du centre de masse. La situation de la Terre est donc tout à fait identique à celle de la Lune et la Terre subit donc les forces de marées de la Lune exactement comme la Lune subit les forces de marée de la Terre.

De façon générale, toutes les planètes ou les étoiles près d'un autre corps font des forces de marées sur ce corps. La force de marées est

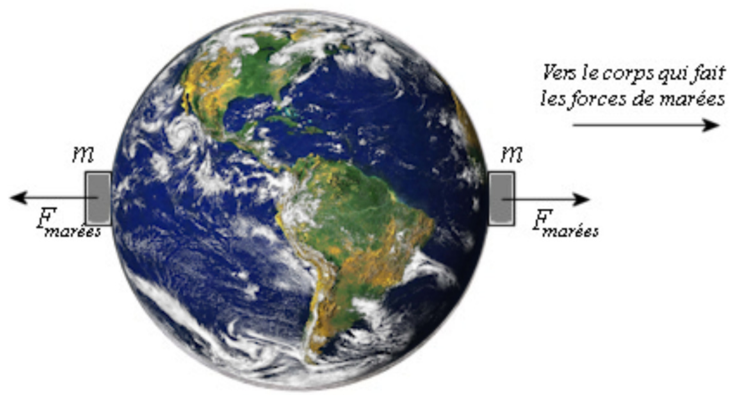
**Force de marées**

$$F_{marées} = \frac{2GMmR}{r^3}$$

où $M$ est la masse de la planète (ou étoile) qui exerce les forces de marée, $m$ est la masse de l'objet qui subit les forces de marée, $R$ est le rayon de la planète sur laquelle est situé l'objet qui subit les forces de marée et $r$ est la distance entre les planètes.

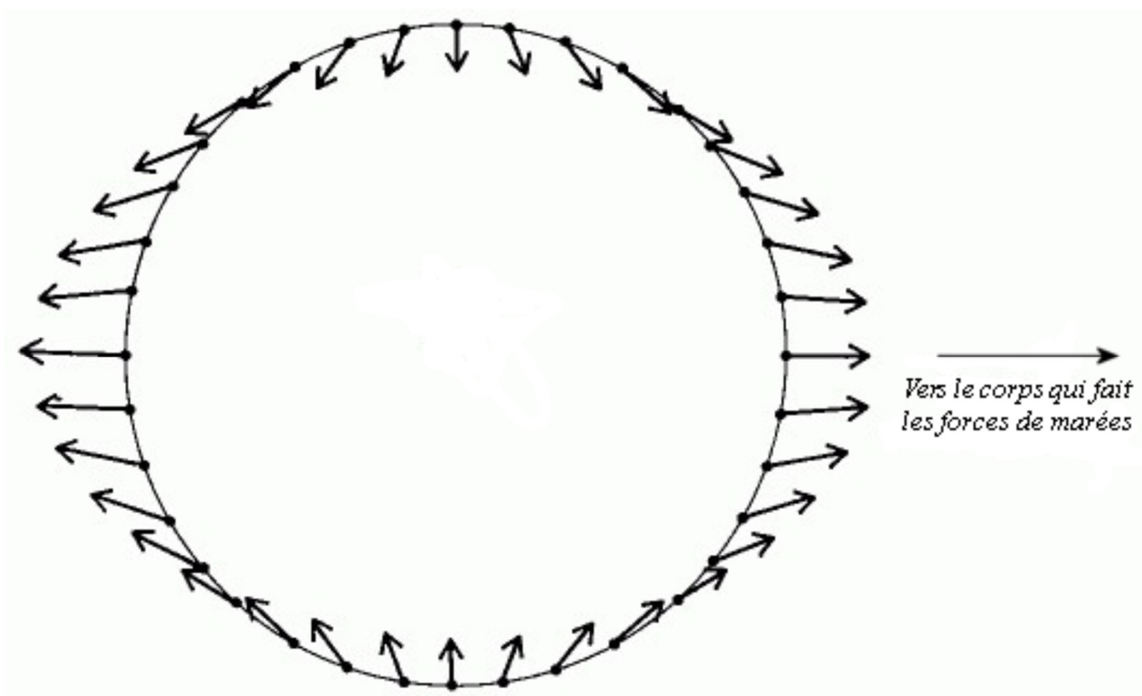
Le Soleil exerce donc aussi des forces de marées sur la Terre, mais celles-ci sont environ la moitié de celles exercées par la Lune même si la masse du Soleil est plus grande. Ces forces sont plus faibles parce que le Soleil est beaucoup plus loin que la Lune et que les forces de marées diminuent rapidement avec la distance.

La direction des forces de marées de chaque côté de la planète est




www.oassf.com/en/earth.html

On a fait le calcul à seulement deux endroits à la surface de la planète, mais cette force existe partout dans la planète et à la surface de la planète. Quand on fait ce calcul, on obtient les directions suivantes pour la force de marées à la surface de la planète. (Le calcul de ces forces est dans les notes d'astrophysique, chapitre sur la Lune, pour ceux que ça intéresse.)




physics.stackexchange.com/questions/66400/how-you-feel-in-outer-space-vs-orbit

## Exemple E1.9.1

Quelle est la force de marée faite par la Lune sur un objet de 100 kg à la surface de la Terre (du côté de la Lune ou opposé à la Lune) ? La masse de la Lune est 7,35 x $10^{22}$ kg, le rayon de la Terre est de 6378 km et la distance entre la Lune et la Terre est de 384 000 km.

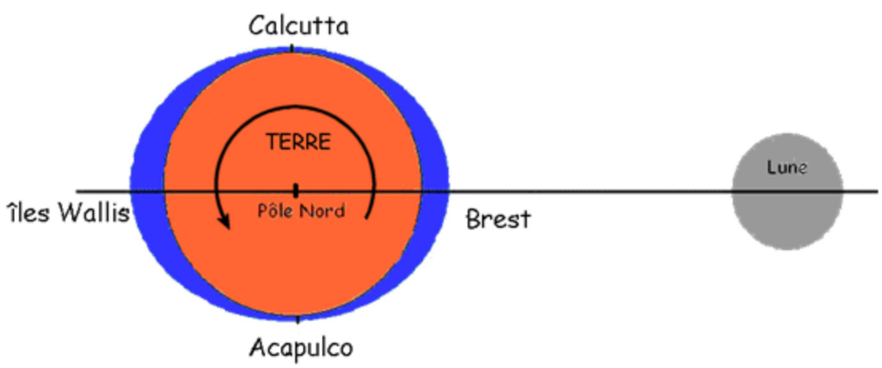
La force est

$$F_{marées} = \frac{2GMmR}{r^3}$$
$$= \frac{2\times 6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\times 7,35\times 10^{22}kg\times 100kg\times 6,378\times 10^6 m}{\left(3,84\times 10^8 m\right)^3}$$
$$= 1,1\times 10^{-4}N$$

Ce n'est pas beaucoup (près de 10 millions de fois plus petit que le poids de la masse), mais ce sera suffisant pour que certains effets paraissent.

## Les changements de niveaux de la mer faits par les forces de marée

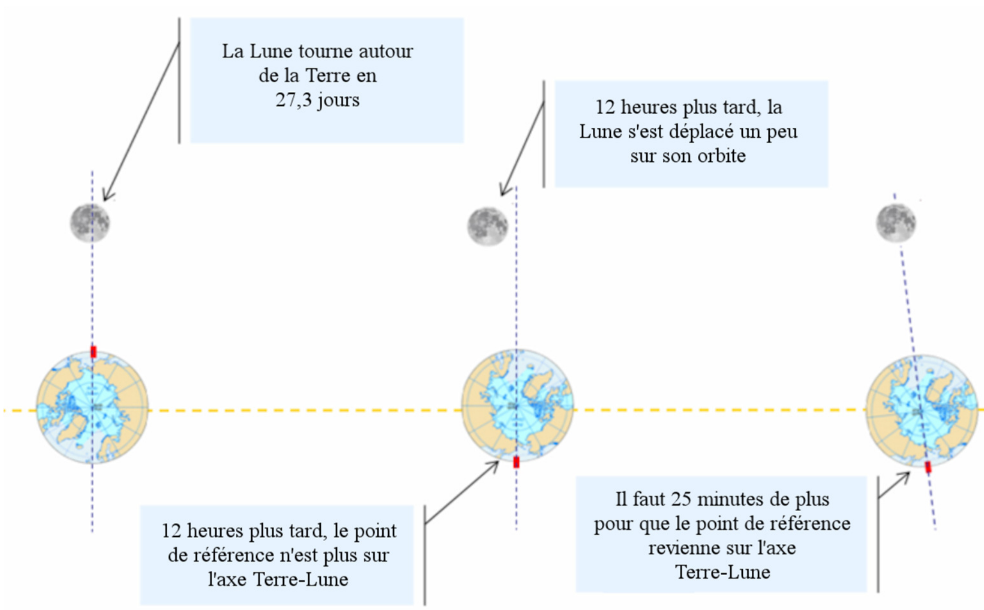
L'image précédente nous montre que les forces de marées cherchent à étirer l'objet qui subit les forces de marées dans une direction parallèle à la direction du corps qui fait les forces de marée et à le comprimer dans une direction perpendiculaire. Si le corps est déformable, on pourra voir cet allongement. Pour la Terre, les océans sont facilement déformables et l'eau sera déplacée par ces forces. On voit donc apparaître à la surface de la Terre des régions où l'eau s'accumule et des régions où il y a moins d'eau. On aura alors la situation suivante.




tpelesmarees.pagesperso-orange.fr/phenomene_maree.html

Dans cette situation, il y a beaucoup d'eau à Brest et c'est la marée haute à cet endroit. Il y a peu d'eau à Acapulco et c'est la marée basse à cet endroit. Comme la Terre tourne, Acapulco arrivera dans la région où il y a beaucoup d'eau (face à la Lune) dans 6 heures puis ira dans l'autre région où il y a peu d'eau 6 heures plus tard pour ensuite aller dans l'autre région où il y a beaucoup d'eau (opposée à la Lune) 6 heures plus tard pour revenir à la région où il y a peu d'eau un autre 6 heures plus tard. En 24 heures, on a donc eu 2 marées hautes et 2 marées basses.

En fait, c'est 24 h et 50 min parce que la Lune tourne autour de la Terre et change donc d'orientation par rapport à la Terre, comme vous le montre cette figure.

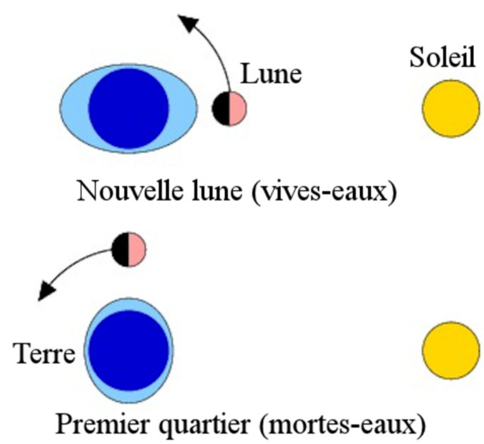



www.je-comprends-enfin.fr/index.php?/Eau-ondes-et-mouvement/eau-terre-lune-soleil-et-marees/id-menu-14.html

En réalité, il n'y a pas que la Lune qui fait des forces de marées sur la Terre. Tous les autres corps célestes du système solaire en font une. En pratique, on peut négliger tous ces corps sauf la Lune et le Soleil, qui fait une force de marée valant environ la moitié de celle faite par la Lune. L'importance de l'accumulation d'eau sera donc bien différente selon l'orientation de la Lune et de la Terre.

Quand la Lune, la Terre et le Soleil sont alignés (pleine lune ou nouvelle lune), les forces de marées faites par la Lune et par le Soleil s'additionnent, ce qui donne une accumulation d'eau importante. Les marées auront alors une amplitude maximale. On parle alors de marée de vives-eaux.

Quand la Lune, la Terre et le Soleil forment un angle de 90° (on dit alors que le Soleil et la Lune sont en quadrature), les forces de marées du Soleil se soustraient à celle de la Lune. Les forces de marées résultantes sont alors plus faibles et les accumulations d'eau sont moins importantes. L'amplitude des marées est donc plus petite et on parle alors de marée de mortes-eaux.




www.ifremer.fr/lpo/cours/maree/forces.html

Ensuite, la distance de la Lune n'est pas toujours la même puisque son orbite est elliptique. La distance ne varie que de 7 % par rapport à la distance moyenne, mais cela entraîne une variation des forces de marées de près de 20 % puisque les effets de marées varient avec le cube de la distance. On devrait donc s'attendre à des forces de marées faites par la Lune 20 % plus grande quand la Lune est à son plus près de la Terre. Si cela se produit lors de la pleine Lune ou de la nouvelle Lune, l'amplitude des marées pourra alors être exceptionnelle.

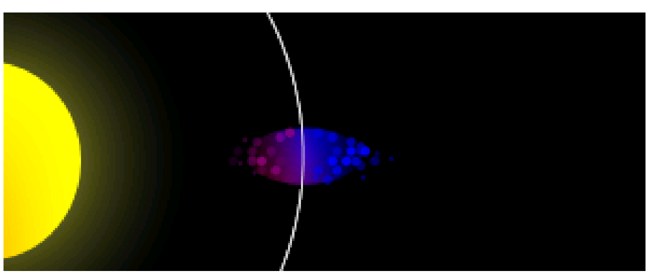
Un calcul plus poussé, tenant compte de la Lune et du Soleil, montre que la variation du niveau de l'eau devrait être d'environ 50 cm. En réalité, l'amplitude des marées est encore moindre puisque les forces de marée ne font pas que soulever les océans, elles soulèvent aussi la croûte terrestre d'environ 20 cm. Ainsi, si le niveau des mers augmente de 50 cm et que les continents se soulèvent de 20 cm, il ne reste qu'un écart de 30 cm, ce qui en gros l'amplitude des marées dans les océans. Parfois, la forme du rivage va amplifier, par divers mécanismes, cet effet de marée et on peut avoir beaucoup plus d'amplitude. Les plus grandes marées du monde se produisent dans la baie de Fundy, où il peut y avoir une variation de 17 mètres entre la marée basse et la marée haute.

bayoffundy.blogspot.ca/2010/09/biggest-tides-of-year-today.html

Vous pouvez également voir les changements du niveau de l'eau dans la baie de Fundy dans ces clips.
http://www.youtube.com/watch?v=5W2sM1Ma7YA
http://www.youtube.com/watch?v=u3LtEF9WPt4

## La limite de Roche

Il est à noter que les forces de marées augmentent très rapidement lorsque la distance entre une planète et la masse centrale diminue. Si une planète est trop près de la masse centrale, les forces de marées sur une pierre à la surface de la planète peuvent excéder le poids de cette pierre. Dans ce cas, la pierre se soulèvera de la surface de la planète et cette dernière se détruira lentement.



fr.wikipedia.org/wiki/Limite_de_Roche

Voyons à quelle distance cela va se produire si une planète s'approche trop d'une masse centrale. La masse de la planète sera notée $M_p$. À la limite, appelée la *limite de Roche,* la force de marée qui cherche à soulever l'objet est égale à la force de gravitation qui attire l'objet vers le sol. On a donc

$$F_{marées} = F_g$$
$$\frac{2GM_c mR_p}{r^3} = mg$$
$$\frac{2GM_c mR_p}{r^3} = m\frac{GM_p}{R_p^2}$$
$$\frac{2M_c R_p}{r^3} = \frac{M_p}{R_p^2}$$
$$r^3 = \frac{2M_c R_p^3}{M_p}$$

On va maintenant relier les masses à la densité de la masse centrale et de la planète, en supposant qu'ils sont sphériques, on a

$$M_c = \frac{4}{3}\pi R_c^3 \rho_c \qquad\qquad M_p = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho_p$$

On a alors

$$r^3 = \frac{2M_c R_s^3}{M_p}$$
$$r^3 = \frac{2\left(\frac{4}{3}\pi R_c^3 \rho_c\right) R_s^3}{\left(\frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho_p\right)}$$
$$r^3 = \frac{2\rho_c R_c^3}{\rho_c}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{2\rho_c}{\rho_p}} R_c$$
$$r = 1,26\sqrt[3]{\frac{\rho_c}{\rho_p}} R_c$$

En fait, Édouard Roche fit une meilleure analyse en tenant compte du fait que le satellite allait se déformer sous l'effet des forces de marées, perdant sa forme sphérique. Une meilleure solution est donc

**Limite de Roche**

$$r = 2,42285\sqrt[3]{\frac{\rho_c}{\rho_p}}R_c$$

$\rho_c$ est la densité de l'astre qui exerce les forces de marée
$\rho_p$ est la densité de l'astre qui subit les forces de marée
$R_c$ est le rayon de l'astre qui exerce les forces de marée

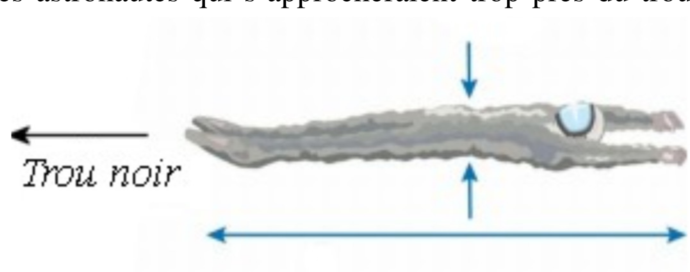
Si les densités de la masse centrale et de la planète sont identiques, la limite de Roche est simplement 2,42285 fois le rayon de la masse centrale. Dans le cas de la Terre ($R_c$ = 6378 km), cette limite est donc à 15 450 km du centre de la Terre.

Ainsi, si la Lune s'approchait à une distance inférieure à 15 450 km du centre de la Terre, elle serait lentement détruite par les forces de marée puisque les forces qui cherchent à étirer la Lune seraient plus grandes que la force de gravitation qui cherche à garder ensemble les matériaux de la Lune. La Lune étant à 384 400 km de distance, elle est bien loin de cette limite de Roche.

Les forces de marées empêchent aussi la matière de s'agglomérer par la force de gravitation pour former un satellite plus gros si cette matière est à l'intérieur de la limite de Roche.

Remarquez que vous êtes actuellement à l'intérieur de la limite de Roche de la Terre. Vous ne vous faites pas déchirer par les forces de marées parce que ce n'est pas la force de gravitation qui garde vos cellules ensemble, mais plutôt la force électrique. Cette force étant beaucoup plus grande que les forces de marées que vous subissez, vous ne vous faites pas déchirer.

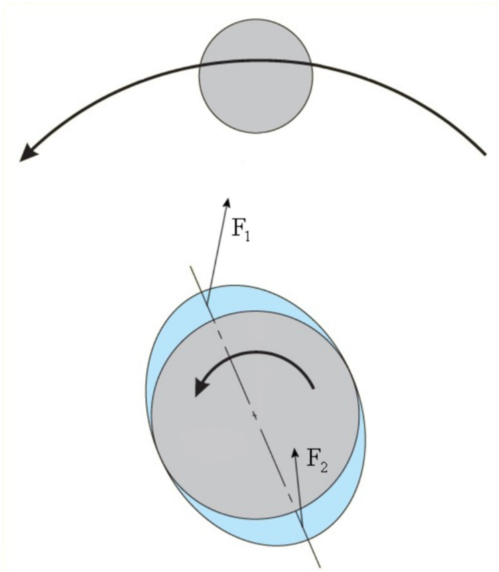
Les forces de marées peuvent devenir encore plus fortes dans des régions où le champ gravitationnel varie très rapidement. Près d'un trou noir, les forces de marées sont si grandes qu'elles détruiraient tous les astronautes qui s'approcheraient trop près du trou noir. Comme les forces cherchent à étirer l'objet dans un sens et à compresser l'objet dans l'autre, l'astronaute va s'étirer et s'amincir sous l'effet des forces, un effet appelé « spaghettification »




community.emc.com/people/ble/blog/2011/11/06/holographic-principle-to-multiverse-reality

## Les effets à long terme des forces de marée

*<u>L'allongement du jour</u>*




www.aerospaceweb.org/question/astronomy/q0262.shtml

La rotation de la Terre sur elle-même a pour effet d'entraîner avec elle les deux bosses faites par les forces de marées. Ainsi, les deux bosses de marées ne sont pas directement en ligne avec la Lune, mais elles sont décalées d'environ 3 ° par rapport à la direction de la Lune. Regardons l'attraction gravitationnelle faite par la Lune sur ces bosses de marées.

Chacune de ces forces fait un moment de force sur la Terre, mais le moment de force sur la bosse du côté de la Lune est plus important parce que la force y est plus grande puisque cette bosse est plus près de la Lune. Les deux moments de force ne s'annulent donc pas et il reste un petit moment de force qui s'exerce sur la Terre. Ce moment de force s'oppose à la rotation de la Terre et ralentit donc lentement cette rotation. Le changement n'est pas très important, puisqu'actuellement le jour s'allonge d'environ 2 ms par siècle, mais à l'échelle géologique, cela peut représenter une variation considérable, surtout que l'effet était un peu plus important auparavant. Comme l'effet est cumulatif, on peut ainsi calculer que le 20e siècle a duré environ 0,1 seconde de plus que le 19e siècle. Lors de la formation de la Terre, il y a 4 milliards d'années, le jour avait alors une durée d'environ 15 heures. Il y a 380 millions d'années, le jour durait 22 heures et il est maintenant de 24 heures. Le jour continuera ainsi à s'allonger et atteindrait une durée de 47 jours dans 50 milliards d'années (mais cela ne se produira pas puisque la Terre et la Lune seront détruites par le Soleil dans 5 milliards d'années).

Le même phénomène s'est produit sur la Lune, mais avec plus d'intensité. Même s'il n'y a pas d'eau sur la Lune, il y a quand même des bosses de marées qui peuvent être faites par un soulèvement du sol. Le ralentissement de la rotation de la Lune est toutefois beaucoup plus prononcé puisque son moment d'inertie est nettement plus petit. Le ralentissement de la rotation de la Lune fut si rapide que la Lune est finalement arrivée à ce que tentent de faire les forces de marées : arrêter la rotation par rapport à l'autre corps. C'est pour ça que la Lune a toujours la même face tournée vers la Terre.

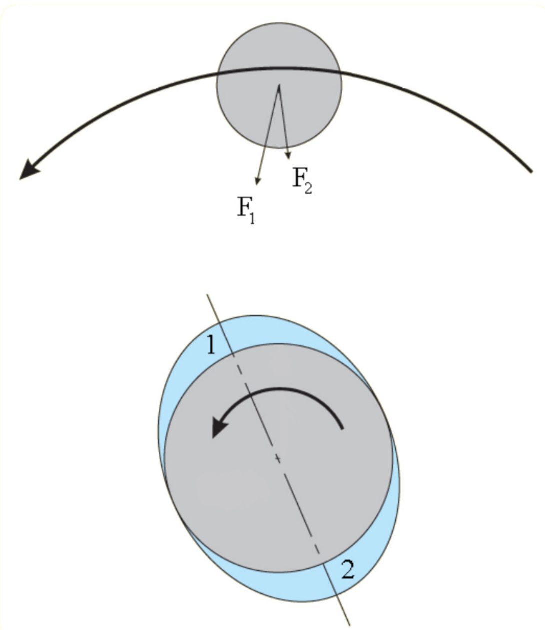
Ce phénomène est assez courant. Les quatre plus gros satellites de Jupiter ont également toujours la même face tournée vers Jupiter. C'est la position d'équilibre à atteindre et, si on dispose de suffisamment de temps, tous les systèmes à deux corps finiront par avoir toujours les mêmes faces tournées l'un vers l'autre. Le seul exemple connu dans lequel les deux corps ont atteint cette position d'équilibre est le système de Pluton et de son satellite

Charron. Les prochains à le faire dans le système solaire devraient en théorie être la Terre et la Lune (mais ils n'y arriveront pas, car le Soleil va mourir avant.)

Si l'orbite est elliptique, il peut se produire des situations légèrement différentes. Mercure, la planète subissant les plus grandes forces de marée faites par le Soleil, n'a pas toujours la même face tournée vers le Soleil. La période de rotation sur elle-même est exactement les deux tiers de la période de révolution autour du Soleil. Ainsi, deux points opposés sur Mercure alternent pour être en direction du Soleil au périhélie.

*L'éloignement de la Lune*

Si la Lune exerce une force sur les bosses de marées, alors les bosses de marées exercent aussi une force sur la Lune. Une bonne partie de cette force est dirigée vers la Terre et contribue à faire la force centripète, mais il reste cependant une petite composante tangentielle dirigée dans le même sens que le mouvement de la Lune autour de la Terre.



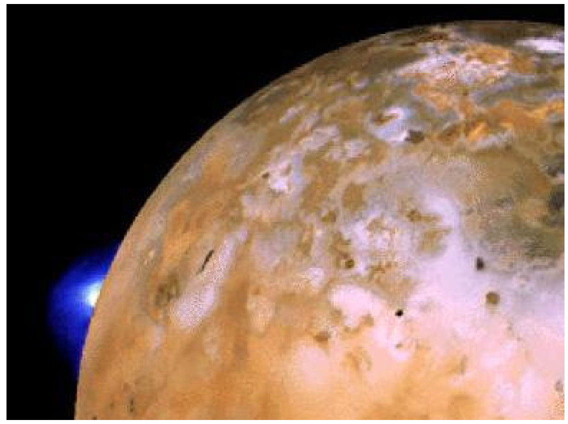

www.aerospaceweb.org/question/astronomy/q0262.shtml

Cette force accélère la Lune et lui permet de gagner de l'énergie. La Lune peut donc s'éloigner lentement de la Terre, à un rythme de 3 à 4 cm par année. Le rayon de l'orbite de la Lune augmente continuellement ce qui a pour effet d'augmenter la durée du mois. Ce processus se poursuivra jusqu'à ce que la période de révolution de la Lune autour de la Terre atteigne une durée de 47 jours dans 50 milliards d'années. La distance entre la Lune et la Terre sera alors d'un peu plus de 550 000 km. (Elle est de 384 400 km en ce moment.)

Si la période de révolution du satellite autour de la planète est plus petite que la période de rotation de la planète, les deux effets des forces de marées sont dans le sens contraire : la planète tournera de plus en plus vite et le satellite se rapprochera de la planète jusqu'à s'écraser sur elle. C'est ce qui se produit actuellement avec le plus gros des satellites de Mars, Phobos.

Les forces de marées génèrent beaucoup de chaleur. Dans le cas de la Terre, la chaleur est générée par la hausse et la baisse continuelle des océans et des continents. Cela génère environ 2 % de la chaleur interne de la Terre (estimé à $2 \times 10^{19}$ J par an comparativement à $10^{21}$ J par an pour les désintégrations radioactives). Cette contribution devait être plus importante dans le passé puisque la Lune était plus près. La chaleur générée par les forces de marées est cependant plus importante pour les satellites, bien qu'elle diminue beaucoup une fois que le satellite atteint sa position d'équilibre en ayant toujours la même face tournée vers la planète. Les forces de marées ne chauffent donc que très peu l'intérieur de la Lune en ce moment.

Dans le cas des satellites de Jupiter, on pourrait s'attendre à ce que les forces de marées chauffent peu les satellites puisqu'ils ont tous atteint la situation d'équilibre. Mais les perturbations entre les quatre gros satellites font que les bosses de marée oscillent autour de la position d'équilibre, ce qui génère beaucoup de chaleur. Il n'est donc pas très surprenant que Io, le satellite le plus près de Jupiter et donc celui qui subit les effets de marées les plus intenses, soit chauffé par la friction engendrée par les forces de marées au point d'avoir des volcans à sa surface.



planetarygeomorphology.wordpress.com

# RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

**Distance en fonction de $\theta$ pour un objet près d'une masse centrale**

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

**Excentricité**

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

**Énergie mécanique**

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

**Conservation du moment cinétique**

$$r v \sin\psi = r_p v_p$$

$$r v \sin\psi = \sqrt{GM_c r_p (1+e)}$$

**Deuxième loi de Kepler**

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2} \Delta t$$

**La vitesse d'un objet sur une orbite circulaire**

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}}$$

**Énergie mécanique d'un objet pour une orbite circulaire**

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

**La période pour une orbite circulaire (3e loi de Kepler)**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_c}}$$

**Première loi de Kepler**

Les orbites sont des ellipses. La masse centrale occupe un des foyers.

**$r_a$ et $r_p$ en fonction de $a$ et $e$ pour une orbite elliptique**

$$r_a = a(1+e)$$
$$r_p = a(1-e)$$

**$a$ et $e$ en fonction de $r_a$ et $r_p$ pour une orbite elliptique**

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

**$r$ en fonction de $\theta$ pour une orbite elliptique**

$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

**Énergie mécanique d’un objet sur une orbite elliptique**

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2a}$$

**La vitesse d’un objet sur une orbite elliptique**

$$v^2 = GM_c\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

**Vitesse d’un objet à la périapside et à l’apoapside**

$$v_p^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}$$

$$v_a^2 = \frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

**Période pour une orbite elliptique (3e loi de Kepler)**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

**Trajectoire parabolique**

$$e = 1$$
$$E_{mec} = 0$$

**Trajectoire hyperbolique**

$$e > 1$$
$$E_{mec} > 0$$

**Force sur un objet de masse *m* dans un champ gravitationnel**

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

**Grandeur du champ gravitationnel d'une masse ponctuelle de masse *M***

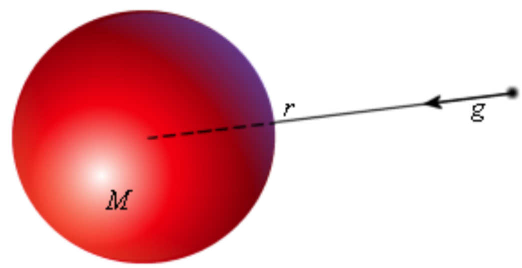
$$g = \frac{GM}{r^2}$$

**Champ gravitationnel d'une tige uniforme**

$$g = \frac{GM}{b(b+L)}$$

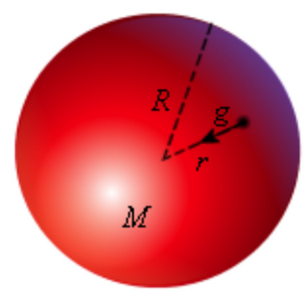

**Champ gravitationnel à l'extérieur d'une sphère**

$$g = \frac{GM}{r^2}$$




**Champ gravitationnel à l'intérieur d'une sphère de densité constante**

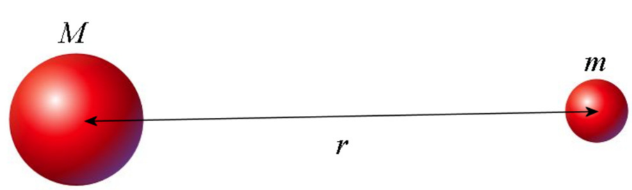
$$g = \frac{GMr}{R^3}$$




**Force entre deux sphères**

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

où $r$ est la distance entre les <u>centres</u> des sphères



**Force de marées**

$$F_{marées} = \frac{2GMmR}{r^3}$$

**Limite de Roche**

$$r = 2,42285\sqrt[3]{\frac{\rho_c}{\rho_p}}R_c$$

$\rho_c$ est la densité de l'astre qui exerce les forces de marée
$\rho_p$ est la densité de l'astre qui subit les forces de marée
$R_c$ est le rayon de l'astre qui exerce les forces de marée

# EXERCICES

Utilisez les données suivantes pour ces exercices.

Terre
Masse = 5,972 x $10^{24}$ kg
Rayon = 6371 km
Demi-grand axe de l'orbite ($a$) = 1 UA = 149 600 000 km
Excentricité de l'orbite = 0,016 71

Lune
Masse = 7,34 x $10^{22}$ kg
Rayon = 1737 km
Distance entre la Terre et la Lune = 384 400 km

Soleil
Masse = 1,9885 x $10^{30}$ kg
Rayon = 695 500 km

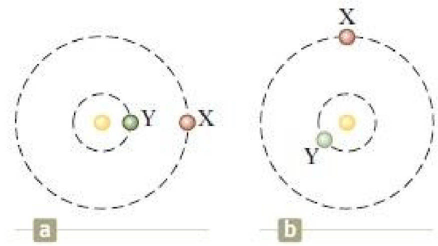
## E1.1 Trajectoire près d'un objet massif

1. À son point le plus près du Soleil, un objet a une vitesse de 70 km/s. La distance entre l'objet et le Soleil est alors de 50 millions de km.

   a) Quelle est l'excentricité de son orbite ?
   b) L'orbite est-elle circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique ?
   c) À quelle distance du Soleil sera l'objet quand l'angle sera de 90° par rapport à sa position la plus près ?

## E1.2 Les orbites circulaires

2. Deux planètes sont en orbite circulaire autour d'une étoile. Le rayon de l'orbite de la planète *X* est 3 fois plus grand que le rayon de la planète *Y*. En 5 ans, la planète *X* fait un quart de cercle autour de l'étoile (changement entre les figures a et b). De quel angle la planète *Y* s'est-elle déplacée durant ce même temps?




www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/two-planets-x-y-travel-counterclockwise-circular-orbits-star-shown-figure--radii-orbits-ra-q900222

## E1.3 Les orbites elliptiques

3. Quelle est la distance entre la Terre et le Soleil au périhélie ?

4. Quelle est la distance entre la Terre et le Soleil à l'aphélie ?

5. Quelle est la vitesse de la Terre au périhélie ?

6. Quelle est la vitesse de la Terre à l'aphélie ?

7. Quelle est la période de rotation de la Terre autour du Soleil ?

8. Quelle est l'énergie mécanique de la Terre sur son orbite ?

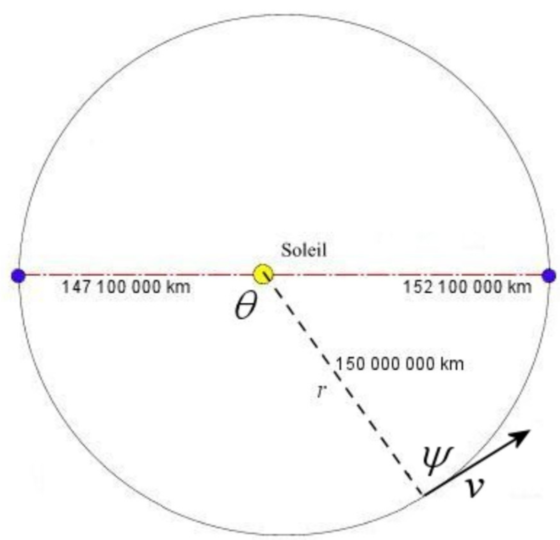
9. Quel est le moment cinétique de la Terre sur son orbite ?

10. À un certain moment sur son orbite, la Terre est à une distance de 150 000 000 km du Soleil.

    a) Quelle est la vitesse de la Terre ?

    b) Quel est l'angle $\theta$ sur la figure ?

    c) Quel est l'angle entre la vitesse de la Terre et la ligne allant de la Terre au Soleil ($\psi$ sur la figure) ?




la.climatologie.free.fr/atmosphere/atmosphere1.htm

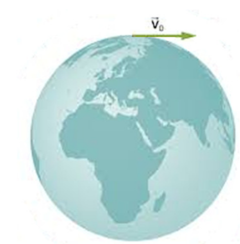
11. L'agence spatiale du Québec, nouvellement créée, a pour mission d'augmenter le rayonnement international du Québec en organisant le premier voyage avec des astronautes vers Jupiter. Le budget étant un peu limité, ils décident d'engager des étudiants de CEGEP pour calculer le meilleur chemin pour arriver vers Jupiter. En fait, on cherche la trajectoire qui prendra le moins de temps possible pour éviter que les astronautes finissent d'écouter leur coffret DVD de Passe-Partout avant d'arriver à destination.

    En fait, on hésite entre deux possibilités :

    1) Donner au vaisseau une trajectoire elliptique qui fera passer le vaisseau de la Terre à Jupiter. Cette orbite a son périhélie à une distance correspondant au rayon de l'orbite terrestre et son aphélie à une distance correspondant au rayon de l'orbite de Jupiter.
    2) Donner au vaisseau une trajectoire elliptique qui l'amènera premièrement vers Vénus puis, en changeant sa vitesse, lui donner une nouvelle orbite elliptique qui l'amènera jusqu'à Jupiter. Dans le cas de l'orbite vers Vénus, l'aphélie est égal au rayon de l'orbite de la Terre et le périhélie est égal au rayon de l'orbite de Vénus. Pour la deuxième orbite, le périhélie est encore égal au rayon de l'orbite de Vénus, mais l'aphélie est égal au rayon de l'orbite de Jupiter.

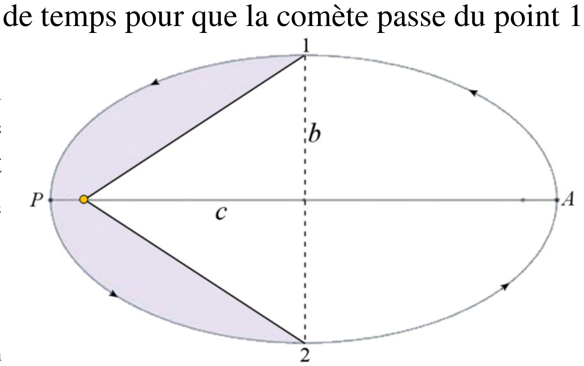
    Bien sûr, le deuxième trajet est plus long, mais il se fait à une vitesse plus grande. On ne sait donc pas lequel des deux trajets prend le moins de temps. Trouvez le temps nécessaire pour atteindre Jupiter en suivant ces deux trajets sachant que le rayon de l'orbite de Jupiter est $7{,}8 \times 10^{11}$ m et que le rayon de l'orbite de Vénus est $1 \times 10^{11}$ m.

12. Un objet est lancé tangentiellement à la surface de la Terre avec une vitesse égale à 85% de la vitesse de libération. Quelle sera la distance maximale atteinte entre la surface de la Terre et l'objet ?




cnx.org/contents/59891349-7823-4303-8e80-672146b479cb%404/projectile-motion

13. Une comète en orbite autour du Soleil a une période de 50 ans. L'excentricité de l'orbite est de 0,87. Combien faut-il de temps pour que la comète passe du point 1 au point 2 sur son orbite ? (Indice : ce temps se calcule avec l'aire en gris. De plus, les dimensions de l'ellipse sur la figure suivante sont $c = ae$ et $b = a\sqrt{1-e^2}$ et l'aire d'une l'ellipse est $A = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$.)




cseligman.com/text/history/kepler2.htm

14. Une petite lune tourne autour d'une planète. La vitesse maximale de la lune est de 2,2 km/s et sa vitesse minimale est de 1,7 km/s. La période de rotation de la lune autour de la planète est de 25 jours.

a) Quel est le demi-grand axe ($a$) de l'orbite de la lune ?
b) Quelle est la masse de la planète ?
c) Quelle est l'excentricité de l'orbite de la lune ?

## E1.4 Les trajectoires paraboliques

15. Un astéroïde sur une trajectoire parabolique est à 50 millions de km du Soleil quand il passe le plus près de ce dernier.

a) Quelle est la vitesse de l'astéroïde au plus près du Soleil ?
b) Quelle sera la vitesse de l'astéroïde quand il sera à 200 millions de km du Soleil ?

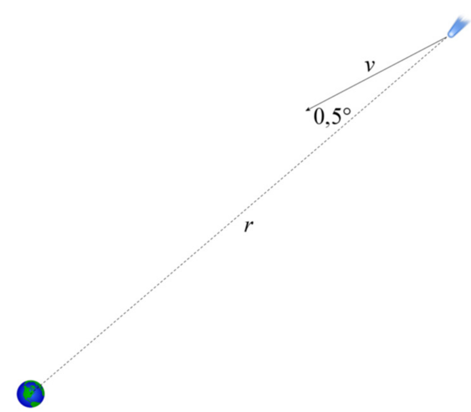
## E1.5 Les trajectoires hyperboliques

16. Un astéroïde sur une trajectoire hyperbolique est à 50 millions de km du Soleil quand il passe le plus près de ce dernier. L'excentricité est 1,2.

a) Quelle est la vitesse de l'astéroïde au plus près du Soleil ?
b) Quelle sera la vitesse de l'astéroïde quand il sera à 200 millions de km du Soleil ?

## E1.6 Résumé des trajectoires possibles

17. Une comète est à une distance de 100 000 000 km de la Terre. À ce moment, sa vitesse est de 100 m/s et l'angle entre sa vitesse et sa distance est d'à peine 0,5°. (pour ce problème, on va faire comme s'il y avait uniquement la Terre et la comète dans l'univers.)




a) Cette comète est-elle sur une orbite elliptique, parabolique ou hyperbolique ?
b) Cette comète va-t-elle frapper la Terre ? (Pour le savoir, calculer la valeur de $r_p$. Si $r_p$ est plus petit que le rayon de la Terre, la comète frappe la Terre.)
c) Quelle est l'excentricité de l'orbite de la comète ?

## E1.8 Le champ gravitationnel

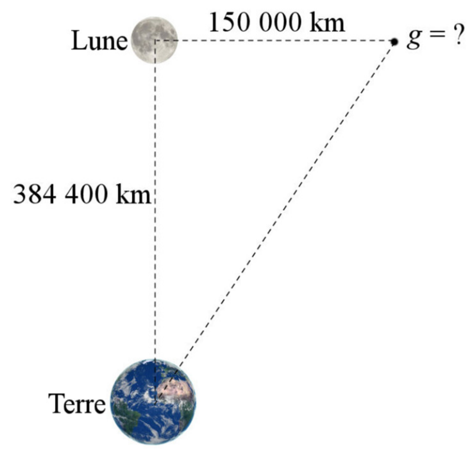
18. Quel est le champ gravitationnel à 100 km au-dessus de la surface de la Terre ?

19. Quel est le champ gravitationnel à 1000 km sous la surface de la Terre si on considère que la densité de la Terre est constante ?

20. Une personne de 70 kg est à la surface de la Lune.
    a) Quel est le champ gravitationnel à la surface de la Lune ?
    b) Quel serait le poids de la personne à la surface de la Lune ?
    c) Ce poids représente quel pourcentage du poids de la personne sur la Terre ?

21. À quelle distance de la Terre le champ gravitationnel est-il nul entre la Terre et la Lune ?

22. Quelle est la grandeur du champ gravitationnel à l'endroit indiqué sur la figure ?




23. a) Quelle est la force exercée par la Lune sur la Terre ?
    b) Quelle est la force exercée par la Terre sur la Lune

## E1.9 Les marées

24. Calculez le rapport exact entre la force de marée exercée par la Lune sur Terre et la force de marée exercée par le Soleil sur Terre.

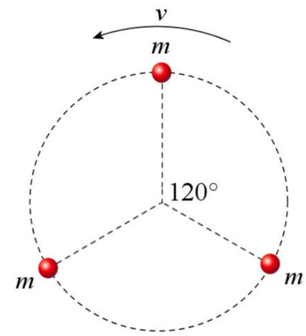
25. Quel devrait être la distance entre la Terre et la Lune pour que la force de marée faite par la Lune sur votre corps soit égale à 1 % du poids de votre corps ?

26. À quelle distance doit s'approcher Mercure du Soleil pour être détruit par les forces de marée du Soleil ? (Densité du Soleil = 1408 kg/m³, densité de Mercure = 5427 kg/m³, Rayon du Soleil = 695 000 km). Sachant que la plus petite distance entre Mercure et le Soleil est 46 000 000 km, peut-on dire que Mercure est en danger ?

## Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

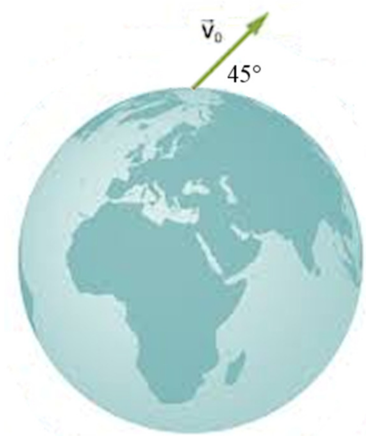
27. Trois planètes s'attirant mutuellement par la force gravitationnelle suivent une trajectoire circulaire, tel qu'illustré sur la figure. Quelle est la période de révolution de ces planètes ? La masse de chaque planète est de $10^{24}$ kg et le rayon du cercle est de 10 000 000 km.




28. Un objet est lancé avec un angle de 45° par rapport à la surface de la Terre avec une vitesse égale à 85% de la vitesse de libération.

    a) Quelle sera la distance maximale atteinte entre la Terre et l'objet ?

    b) À quelle distance du point de départ l'objet va-t-il retomber sur Terre (on veut donc savoir la portée) ?




cnx.org/contents/59891349-7823-4303-8e80-672146b479cb%404/projectile-motion

# RÉPONSES

## E1.1 Les trajectoires près d'un objet massif

1. a) 0,8461 b) elliptique c) 92,3 millions de km

## E1.2 Les orbites circulaires

2. 467,7°

## E1.3 Les orbites elliptiques

3. 147 100 000 km
4. 152 100 000 km
5. 30,286 km/s
6. 29,291 km/s

7. 365,26 jours
8. -2,649 x $10^{33}$ J
9. 2,661 x $10^{40}$ kg m²/s
10. a) 29 705 km/s b) 100,2° c) 89,05° ou 90,95°
11. trajet 1 : 1000,8 jours trajet 2 : 1060,7 jours
12. 10 217 km
13. 11,15 ans
14. a) 1 196 691 km b) 6,706 x $10^{25}$ kg c) 0,1282

## E1.4 Les trajectoires paraboliques

15. a) 72,86 km/s b) 36,43 km/s

## E1.5 Les trajectoires hyperboliques

16. a) 76,42 km/s b) 43,10 km/s

## E1.6 Résumé des trajectoires possibles

17. a) hyperbolique b) Non (elle passe à 9553 km du centre de la Terre)
    c) 1,0000486

## E1.7 Le champ gravitationnel

18. 9,52 N/kg
19. 8,28 N/kg
20. a) 1,624 N/kg b) 113,7 N c) 16,6 %
21. À 346 037 km du centre de la Terre
22. 2,429 x $10^{-3}$ N/kg
23. a) 1,980 x $10^{20}$ N b) 1,980 x $10^{20}$ N

## E1.8 Les marées

24. Les forces de marées de la Lune sont 2,18 fois plus grandes que celles faites par le Soleil.
25. 8604 km (distance entre les centres des planètes, il ne resterait donc que 496 km entre les surfaces des planètes !)
26. 1 074 743 km

## Défis

27. 32,07 ans
28. a) 13 993 km b) 15 342 km