2 LA CINÉMATIQUE EN DEUX OU TROIS DIMENSIONS

Le 24 mai 1941, le navire de guerre allemand Bismarck coula le navire britannique H.M.S. Hood en l'atteignant avec un obus de 800 kg directement dans une réserve de munition. Ce qui est remarquable, c'est que le Bismarck était à ce moment à une distance de 14 km du Hood. Avec quel angle l'obus du Bismarck est-il parti sachant que sa vitesse initiale était de 820 m/s ?

en.wikipedia.org/wiki/Battle_of_the_Denmark_Strait

Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

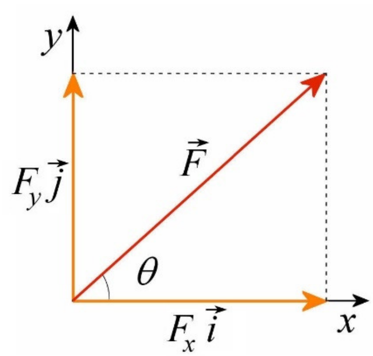
2.1 LES COMPOSANTES DES VECTEURS

En 2 ou 3 dimensions, plusieurs quantités sont représentées par des vecteurs. Une quantité est représentée par un vecteur si sa direction est importante. C'est le cas du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

Nous allons essentiellement travailler avec les composantes des vecteurs. Il faut donc être capable de trouver les composantes d'un vecteur à partir de sa grandeur et de sa direction ou être capable de trouver la grandeur et la direction du vecteur à partir des composantes.

Les composantes à partir du vecteur

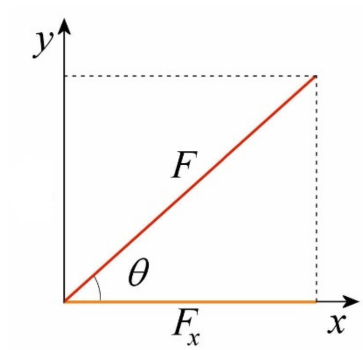
La figure de droite illustre ce que sont les composantes x et y d'un vecteur F en deux dimensions.



Bien que les vecteurs déplacement, vitesse et accélération qu'on verra dans ce chapitre soient en 3 dimensions, nous allons presque toujours travailler en deux dimensions. C'est pourquoi nous allons uniquement examiner les composantes des vecteurs en 2 dimensions.

On peut trouver les composantes assez facilement avec les fonctions trigonométriques.

Pour la composante en x, on a la situation montrée sur la figure.



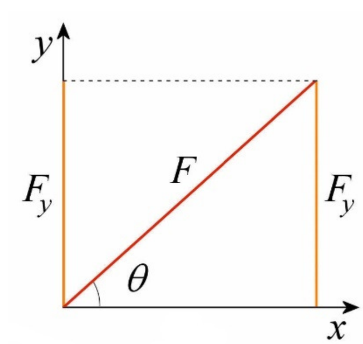
Nous avons un beau triangle rectangle. La composante en x se trouve donc avec

$$\cos\theta = \frac{F_x}{F}$$

$$F_x = F\cos\theta$$

Pour la composante en y, on a la situation montrée sur la figure.

Nous avons encore un beau triangle. Avec le côté opposé à l'angle et l'hypoténuse, on a

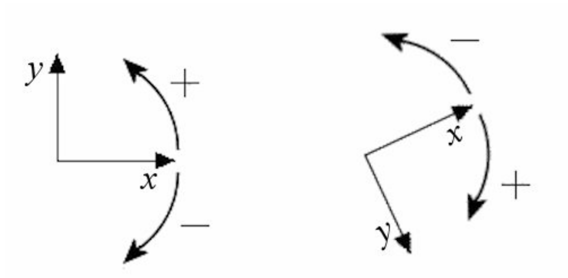


$$\sin\theta = \frac{F_y}{F}$$

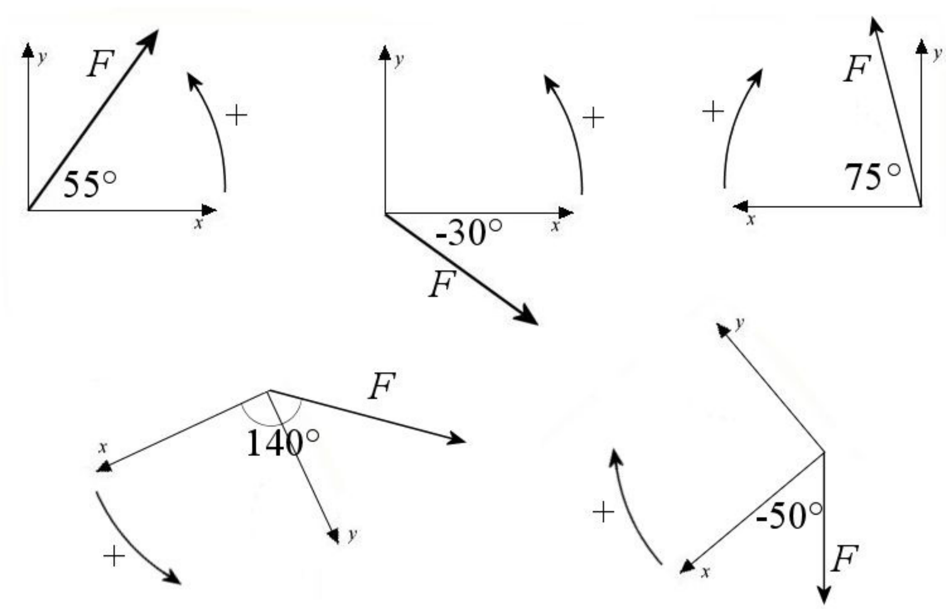
$$F_y = F\sin\theta$$

Pour séparer en composantes en utilisant ces formules, il faut trouver l'angle que fait le vecteur avec **l'axe des *x* positifs.** Avec cet angle, ces formules donneront toujours les bons signes de composantes et il ne sera jamais nécessaire d'ajouter un signe négatif pour obtenir la bonne composante. Bien sûr, il y a d'autres façons de trouver les composantes à partir d'autres angles et vous pouvez les prendre si vous êtes à l'aise avec ces méthodes. Cependant, une grande partie des erreurs de calcul dans le cours de mécanique vient d'une mauvaise séparation en composantes d'un vecteur. En prenant toujours l'angle avec l'axe des *x*, on évite ces erreurs. Un bon truc pour trouver l'angle si vous n'êtes pas sûr : tracer le vecteur et l'axe des *x* en partant d'un même point et chercher l'angle entre les deux.

Il n'y a qu'un seul danger, l'angle peut être négatif ! La règle est la suivante : le sens positif est toujours dans la direction de rotation qui va de l'axe des *x* positif vers l'axe des *y* positifs. La figure suivante vous montre les directions de rotation positives et négatives dans deux situations.

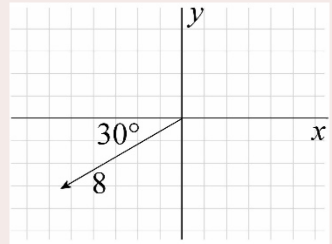


Le signe de l'angle se trouve en trouvant dans quel sens on tourne quand on <u>va de l'axe des *x* positifs vers la force</u>. Si on tourne dans le sens positif, l'angle est positif et si on tourne dans le sens négatif, l'angle est négatif. Voici les valeurs des angles (avec le bon signe) dans différentes situations.

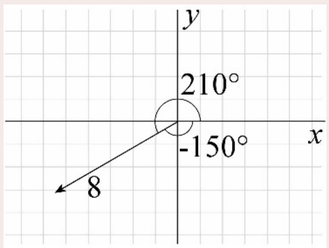


Exemple 2.1.1

Quelles sont les composantes de ce vecteur de longueur 8 ?



Pour trouver les composantes, il nous faut l'angle entre le vecteur et l'axe des x positifs.



La figure de gauche nous donne cet angle. (En fait, 2 possibilités d'angle. Il y a un angle dans la direction positive et un angle dans la direction négative.)

La composante en x est

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos\theta \\ &= 8\cdot\cos 210° \\ &= -6,928 \end{aligned}$$

On aurait obtenu exactement la même valeur avec $8\cdot\cos(-150°)$.

La composante en y est

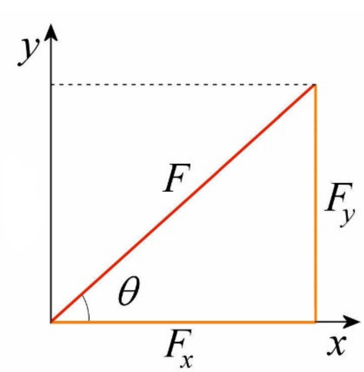
$$\begin{aligned} F_y &= F\sin\theta \\ &= 8\cdot\sin 210° \\ &= -4 \end{aligned}$$

On aurait obtenu exactement la même valeur avec $8\cdot\sin(-150°)$.

Le vecteur à partir des composantes

On peut aussi trouver la grandeur d'un vecteur à partir des composantes. La figure de droite montre que la grandeur du vecteur est l'hypoténuse du triangle. On a donc

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



À partir des composantes du vecteur, on peut également trouver la direction du vecteur avec

$$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x}$$

Vous avez probablement vu dans votre jeunesse que cette formule est valide uniquement dans le premier quadrant. En fait, elle peut être utilisée pour des vecteurs dans n'importe quelle direction à condition de suivre la règle suivante : il faut ajouter 180° à la valeur donnée par la calculatrice si la valeur de F_x est négative.

Exemple 2.1.2

Les composantes d'un vecteur sont A_x = -6 et A_y = 8. Quelles sont la grandeur et la direction de ce vecteur ?

La grandeur du vecteur est

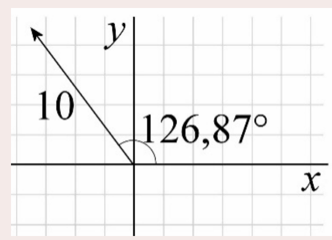
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

La direction du vecteur est

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{A_y}{A_x} \\ &= \arctan \frac{8}{-6} \\ &= 126{,}87° \end{aligned}$$

(On a ajouté 180° à la réponse donnée par la calculatrice puisque la valeur de A_x est négative.)

L'angle obtenu avec cette formule est toujours l'angle entre le vecteur l'axe des x positifs. La figure de droite montre la direction de ce vecteur.



2.2 LES LOIS DE LA CINÉMATIQUE EN DEUX OU TROIS DIMENSIONS

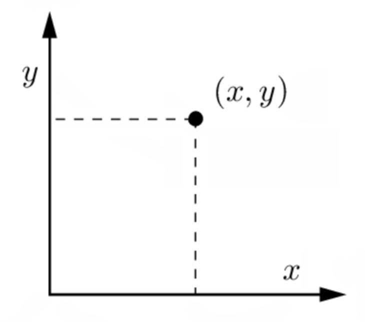
Nous allons ici déterminer comment traiter le mouvement en deux ou trois dimensions en définissant ce que sont le déplacement, la vitesse et l'accélération dans ce cas. Les démonstrations de cette section ne sont peut-être pas ce qu'il y a de plus palpitant, mais les conclusions sont intéressantes. Nous allons faire des preuves pour un mouvement en deux dimensions et ensuite généraliser pour des mouvements en trois dimensions (même si on n'étudiera pas beaucoup de mouvement à trois dimensions).

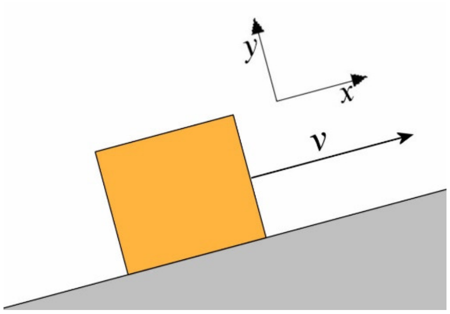
La position

Les axes

En 2 dimensions, on doit utiliser 2 axes pour spécifier la position d'un objet.

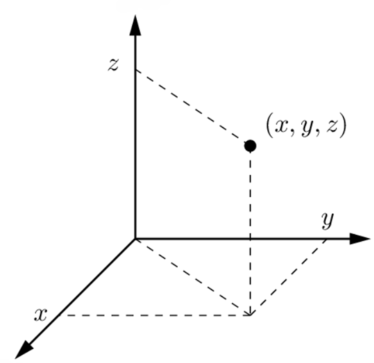
Souvent, on utilise des axes très classiques, c'est-à-dire avec un axe des *x* positifs vers la droite et un axe des *y* positifs vers le haut.





Notez qu'il sera parfois utile d'incliner les axes. En fait, il n'y a qu'une seule contrainte : les deux axes doivent être perpendiculaires. Par exemple, on utilisera les axes montrés sur la figure de gauche pour un objet se déplaçant sur un plan incliné. (On verra au chapitre 4 qu'on doit mettre un axe dans le sens de la vitesse si l'objet se déplace.)

En trois dimensions, on utilise 3 axes perpendiculaires.

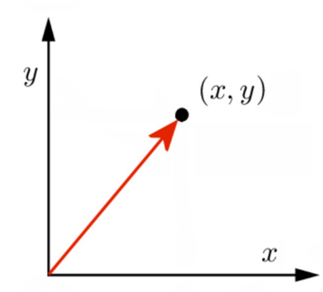


www.researchgate.net/figure/Systeme-de-coordonnees-cartesiennes_fig2_278632180

La position

La position d'un objet peut alors être donnée par de simples coordonnées (*x, y*) ou (*x, y, z*) selon le nombre de dimensions.

La position peut aussi être donnée par un vecteur. Voici un vecteur position en deux dimensions (image de droite).



Ce vecteur peut être décomposé en composantes, ce qui permet d'écrire le vecteur sous la forme suivante.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

(Les composantes du vecteur *r* auraient pu aussi être écrites sous la forme r_x et r_y, mais on a décidé de simplement écrire *x* et *y* puisque ces composantes sont égales aux positions *x* et *y*.)

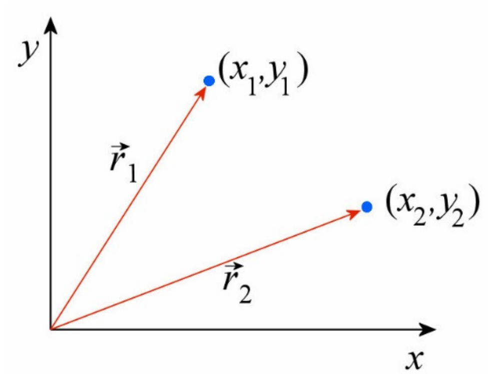
En trois dimensions, on aurait une composante de plus.

Position d'un objet

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

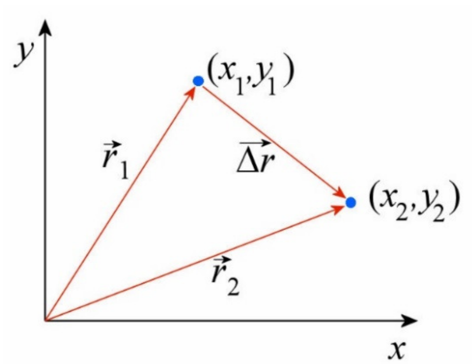
Le déplacement

Un objet passe de la position 1 à la position 2, représentées par ces deux vecteurs.



Chacun de ces vecteurs peut être décomposé en composantes. On peut alors écrire

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$
$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$



Le déplacement $\overrightarrow{\Delta r}$, c'est-à-dire le changement de position, est un vecteur allant de la position 1 à la position 2.

Puisque l'addition suivante est vraie

$$\vec{r}_1 + \overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2$$

on a

Déplacement

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

La vitesse

La vitesse moyenne

La vitesse moyenne est définie comme étant le déplacement divisé par le temps nécessaire pour effectuer ce déplacement.

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Puisqu'on peut séparer n'importe quel vecteur en composantes, ce vecteur est

$$\vec{\bar{v}} = \bar{v}_x\vec{i} + \bar{v}_y\vec{j}$$

Mais les composantes de ce vecteur sont aussi, en utilisant ce qu'on sait du déplacement,

$$\begin{aligned}\bar{\vec{v}} &= \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \\ &= \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} \\ &= \frac{\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right)}{\Delta t} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y_2 - y_1}{\Delta t}\vec{j} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}\end{aligned}$$

Comme les composantes de ces deux façons d'écrire $\bar{\vec{v}}$ doivent être égales, on obtient

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si on généralise pour trois dimensions, on a les équations suivantes.

Vitesse moyenne

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

En composantes :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad \bar{v}_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Ce sont les formules qui nous permettront de calculer les composantes de la vitesse moyenne. On remarque que ces formules sont identiques à celle qu'on avait en une dimension sauf que maintenant on en a trois, une pour *x,* une pour *y* et une pour *z.* On remarque également que le mouvement en *x* n'a aucune influence sur les vitesses moyennes en *y* et en *z,* que le mouvement en *y* n'a aucune influence sur les vitesses moyennes en *x* et *z* et que le mouvement en *z* n'a aucune influence sur les vitesses moyennes en *x* et *y.* Nous verrons que c'est le cas pour toutes les formules de la cinématique en deux ou trois dimensions.

La vitesse instantanée

Le raisonnement pour arriver à la vitesse instantanée est identique à ce qui a été fait pour la cinématique en une dimension : il faut calculer la vitesse en prenant le temps le plus court possible de sorte que la vitesse n'ait pas le temps de changer. On arrive alors à

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Comme tout vecteur, on peut le séparer en composantes. On a alors

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

On peut également séparer en composantes à partir de ce qu'on sait de la position.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}\end{aligned}$$

Comme ces composantes doivent être égales, on obtient

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

En trois dimensions, on a les équations suivantes.

Vitesse instantanée

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

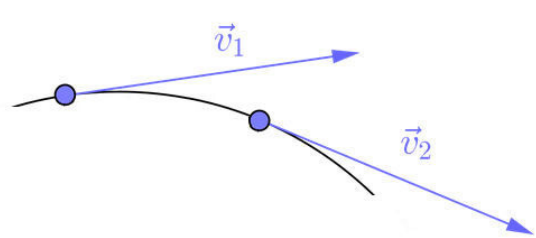
En composantes :

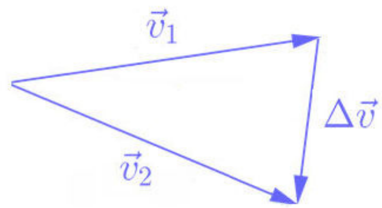
$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad\qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

On retrouve encore des formules identiques à ce qu'on avait obtenu au premier chapitre.

Le changement de vitesse

Quand un objet change de vitesse, il y a une accélération. Voici la vitesse d'un objet à 2 endroits sur sa trajectoire. (La vitesse change si la grandeur ou la direction de la vitesse change.)





La variation de vitesse $\overrightarrow{\Delta v}$ est un vecteur allant de $\vec{v}_1$ à $\vec{v}_2$ (figure). On voit clairement que

$$\vec{v}_1 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_2$$

Cela signifie que

Changement de vitesse

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

L'accélération

L'accélération moyenne

L'accélération moyenne est le changement de vitesse divisé par le temps nécessaire pour effectuer ce changement de vitesse.

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

En composantes, ce vecteur est

$$\vec{\bar{a}} = \bar{a}_x\vec{i} + \bar{a}_y\vec{j}$$

Mais, les composantes de ce vecteur sont aussi, en utilisant ce qu'on sait de la vitesse,

$$\begin{aligned}
\vec{\bar{a}} &= \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \\
&= \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \\
&= \frac{\left(v_{2x}\vec{i} + v_{2y}\vec{j}\right) - \left(v_{1x}\vec{i} + v_{1y}\vec{j}\right)}{\Delta t} \\
&= \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t}\vec{i} + \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta t}\vec{j} \\
&= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j}
\end{aligned}$$

Comme les composantes doivent être égales, on obtient

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad \bar{a}_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

En trois dimensions, on a les équations suivantes.

Accélération moyenne

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

En composantes :

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad \bar{a}_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \qquad \bar{a}_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

L'accélération instantanée

Cette fois-ci, il faut calculer l'accélération en prenant le temps le plus court possible de sorte que celle-ci n'ait pas le temps de changer. On arrive alors

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Comme tout vecteur, on peut le séparer en composantes. On a alors

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

On peut également séparer en composantes à partir de ce qu'on sait de la vitesse.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d\left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}\right)}{dt} \\ &= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} \end{aligned}$$

Comme ces composantes doivent être égales, on obtient

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

En trois dimensions, on a les équations suivantes.

Accélération instantanée

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En composantes :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

On retrouve encore des formules identiques à ce qu'on avait obtenu au premier chapitre.

Exemple 2.2.1

La position d'un objet est donnée par

$$\vec{r} = \left(2\tfrac{m}{s}\cdot t - 1\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2\right)\vec{i} + \left(2\tfrac{m}{s}\cdot t + 1m\right)\vec{j}$$

(ce qui revient au même que de dire $x = 2\tfrac{m}{s}\cdot t - 1\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2$ et $y = 2\tfrac{m}{s}\cdot t + 1m$).

a) Quelles sont les positions à t = 1 s et à t = 4 s ?

À t = 1 s, on a

$$x = 2\tfrac{m}{s}\cdot t - 1\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2 \qquad y = 2\tfrac{m}{s}\cdot t + 1m$$

$$x = 2\tfrac{m}{s}\cdot 1s - 1\tfrac{m}{s^2}\cdot (1s)^2 \qquad y = 2\tfrac{m}{s}\cdot 1s + 1m$$

$$x = 1m \qquad y = 3m$$

La position est donc (1 m, 3 m)

À t = 4 s, on a

$$x = 2\tfrac{m}{s}\cdot t - 1\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2 \qquad y = 2\tfrac{m}{s}\cdot t + 1m$$

$$x = 2\tfrac{m}{s}\cdot 4s - 1\tfrac{m}{s^2}\cdot (4s)^2 \qquad y = 2\tfrac{m}{s}\cdot 4s + 1m$$

$$x = -8m \qquad y = 9m$$

La position est donc (-8 m, 9 m).

b) Quelle est la vitesse moyenne entre t =1 s et t = 4 s ?

La vitesse moyenne en x est

$$\begin{aligned}\overline{v}_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t}\\ &= \frac{-8m - 1m}{3s}\\ &= -3\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne en y est

$$\begin{aligned}\overline{v}_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t}\\ &= \frac{9m - 3m}{3s}\\ &= 2\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc $\vec{\bar{v}} = \left(-3\vec{i} + 2\vec{j}\right)\frac{m}{s}$.

c) Quelle est la vitesse instantanée à $t = 4$ s ?

La vitesse en x est

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d\left(2\frac{m}{s}\cdot t - 1\frac{m}{s^2}\cdot t^2\right)}{dt} \\ &= 2\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2}\cdot t \end{aligned}$$

À $t = 4$ s, elle vaut

$$\begin{aligned} v_x &= 2\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2}\cdot 4s \\ &= -6\frac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse en y est

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d\left(2\frac{m}{s}\cdot t + 1m\right)}{dt} \\ &= 2\frac{m}{s} \end{aligned}$$

À $t = 4$ s, elle vaut

$$v_y = 2\frac{m}{s}$$

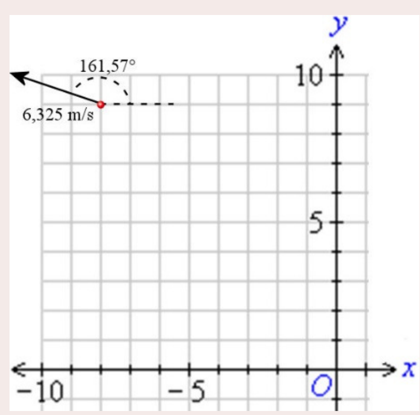
La vitesse est donc $\vec{v} = \left(-6\vec{i} + 2\vec{j}\right)\frac{m}{s}$.

d) Quelles sont la grandeur et la direction de la vitesse à $t = 4$ s ?

On trouve la grandeur et la direction avec

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{\left(-6\frac{m}{s}\right)^2 + \left(2\frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 6,325\frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\frac{v_y}{v_x} \\ &= \arctan\left(\frac{2\frac{m}{s}}{-6\frac{m}{s}}\right) \\ &= 161,57° \end{aligned}$$



(Notez qu'on a ajouté 180° à la valeur donnée par la calculatrice puisque v_x est négatif.)

e) Quelle est l'accélération à $t = 4$ s ?

L'accélération en x est

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} \\ &= \frac{d\left(2\,\tfrac{m}{s} - 2\,\tfrac{m}{s^2}\cdot t\right)}{dt} \\ &= -2\,\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

À $t = 4$ s, elle vaut $a_x = -2\,\tfrac{m}{s^2}$.

L'accélération en y est

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{dv_y}{dt} \\ &= \frac{d\left(2\,\tfrac{m}{s}\right)}{dt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

À $t = 4$ s, elle vaut $a_y = 0\,\tfrac{m}{s^2}$.

L'accélération est donc $\vec{a} = -2\vec{i}\,\tfrac{m}{s^2}$.

Le mouvement uniformément accéléré en plusieurs dimensions

Nous avons les équations suivantes.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad \text{et} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad \text{et} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad \text{et} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad \text{et} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Si l'accélération est constante, alors les trois composantes de l'accélération (a_x, a_y et a_z) sont aussi constantes. On peut donc résoudre ces équations pour obtenir les équations de la vitesse et la position en fonction du temps. Inutile de faire tout en détail puisque ce sont les mêmes équations qu'au chapitre 1, sauf qu'on a une série d'équations en x, une autre en y et une autre en z. On obtiendra donc les mêmes solutions que celles obtenues au chapitre 1, mais avec trois séries d'équations : une pour le mouvement en x, une autre pour le mouvement en y et une autre pour le mouvement en z.

Mouvement uniformément accéléré en plusieurs dimensions

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad v_y = v_{0y} + a_y t \qquad v_z = v_{0z} + a_z t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad z = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2$$

$$2a_x \left(x - x_0 \right) = v_x^2 - v_{x0}^2 \qquad 2a_y \left(y - y_0 \right) = v_y^2 - v_{y0}^2 \qquad 2a_z \left(z - z_0 \right) = v_z^2 - v_{z0}^2$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{x0} + v_x \right) t \qquad y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_{y0} + v_y \right) t \qquad z = z_0 + \frac{1}{2}\left(v_{z0} + v_z \right) t$$

On remarque encore une fois la séparation des mouvements en *x*, *y* et *z*. Puisqu'il n'y a pas de *y* ou de *z* dans la colonne de gauche, le mouvement en *x* n'est pas influencé par ce qui se passe en *y* ou en *z*. Comme il n'y a pas de *x* ou de *z* dans la colonne du milieu, le mouvement en *y* n'est pas influencé par ce qui se passe en *x* ou en *z*. Le mouvement en *z* est également indépendant de ce qui se passe en *x* et en *y*.

Exemple 2.2.2

Un objet a les accélération, vitesse et position suivantes à $t = 0$ s.

$$\vec{a} = \left(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \right) \tfrac{m}{s^2}$$

$$\vec{v}_0 = \left(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \right) \tfrac{m}{s}$$

$$\vec{r}_0 = \left(3\vec{i} + 2\vec{k} \right) m$$

Quelle est la position de l'objet à $t = 2$ s si l'accélération est constante ?

La position en *x* est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ &= 3m + 1\tfrac{m}{s} \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot 2\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(2s \right)^2 \\ &= 9m \end{aligned}$$

La position en *y* est

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ &= 0m + \left(-2\tfrac{m}{s} \right) \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot 3\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(2s \right)^2 \\ &= 2m \end{aligned}$$

La position en *z* est

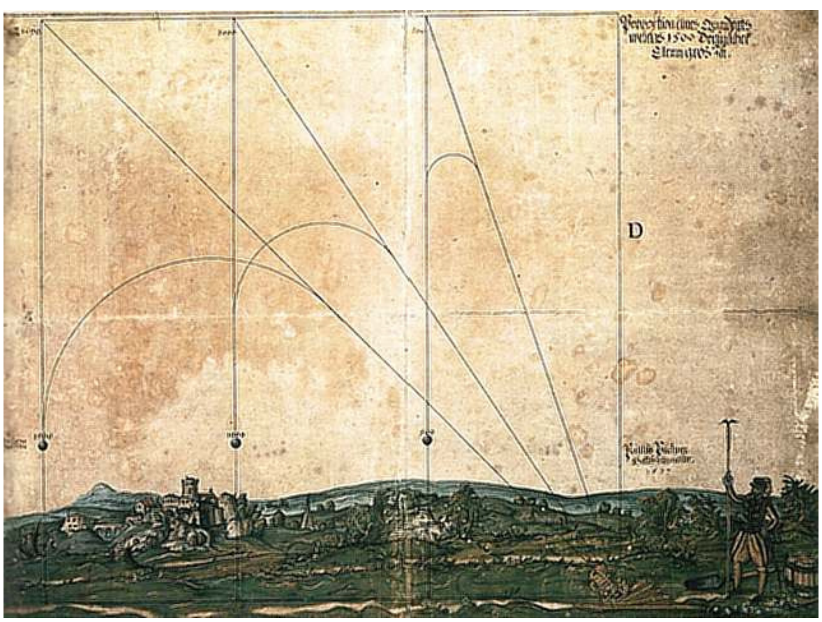
$$\begin{aligned} z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \\ &= 2m + 1\tfrac{m}{s}\cdot 2s + \frac{1}{2}\cdot\left(-1\tfrac{m}{s^2}\right)\cdot\left(2s\right)^2 \\ &= 2m \end{aligned}$$

L'objet est donc à la position (9 m, 2 m, 2 m).
(On pourrait dire écrire $\vec{r} = \left(9\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)m$.)

2.3 LE PROJECTILE

Historique

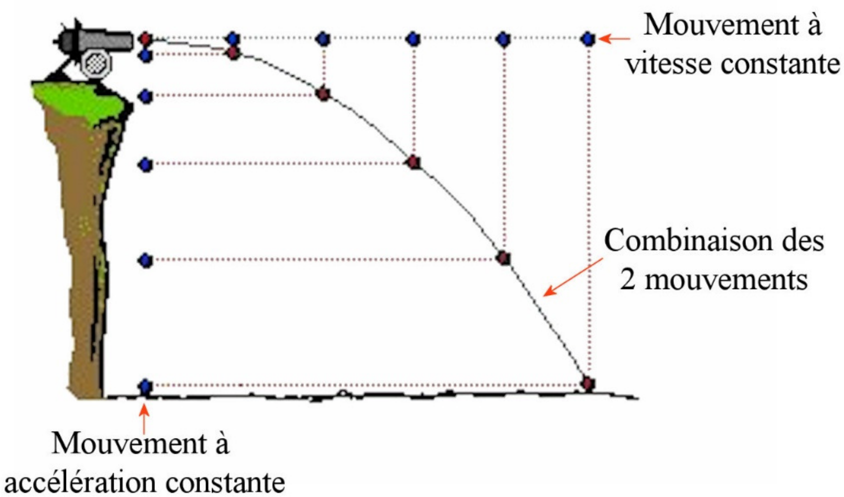
Le projectile fut un important sujet d'étude tout au long de l'histoire à cause de son importance pour la science militaire. Basées sur une physique fausse (que l'on verra au chapitre suivant), ces études arrivaient presque toujours à de mauvaises conclusions. On croyait par exemple que la trajectoire était bien droite au départ, qu'il y avait ensuite une brève période au cours de laquelle la trajectoire s'incurvait vers le bas jusqu'à ce que, finalement, l'objet tombe verticalement vers le sol. C'est ce que montre cette image datant de 1577 (par Paulus Puchner).



www.mlahanas.de/Greeks/AristotlePhysics.htm

Il faudra attendre Galilée pour se rendre compte que tout cela était faux. Il arriva à la conclusion que les mouvements en x et y étaient indépendants l'un de l'autre. C'est d'ailleurs ce que nous ont dit les formules à la section précédente : ce qui se passe en x n'a aucune influence sur le mouvement en y et ce qui se passe en y n'a aucune influence sur ce qui se passe en x. Comme Galilée avait découvert que la chute libre se fait à accélération constante vers le bas, il arriva à la conclusion que le mouvement de projectile était une combinaison de deux mouvements :

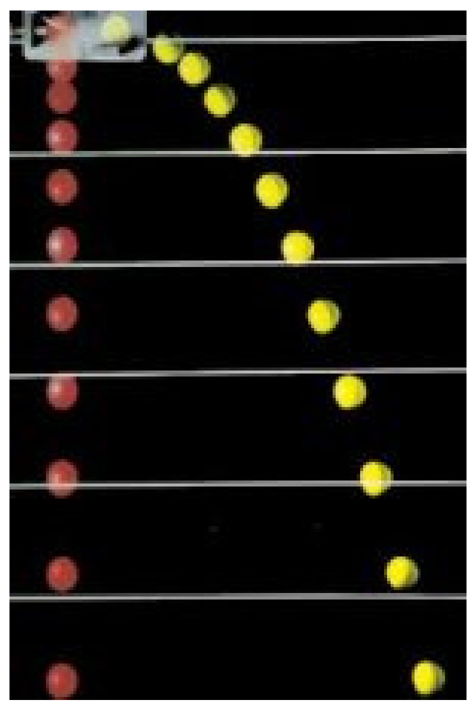
1) Un mouvement à vitesse constante dans la direction horizontale.
2) Un mouvement à accélération constante (9,8 m/s² vers le bas) dans la direction verticale.



www.physicsclassroom.com/class/vectors/u3l2a.cfm

(Galilée publie en 1632, mais il se fait presque voler la priorité de la découverte par un Cavalieri, un de ses disciples, qui publie aussi en 1632.)

L'image de droite montre bien ce fait. Les deux balles ont été relâchées simultanément. La balle de gauche tombe directement vers le bas tandis que la balle de droite se déplace initialement vers la droite. On voit très bien que, même si la balle de droite se déplace horizontalement, elles tombent exactement de la même façon de sorte qu'elles frapperont le sol en même temps. Le mouvement en x de la balle de droite n'a aucune influence sur sa chute. Si on examine bien la balle de droite, on voit qu'elle avance toujours de la même quantité vers la droite à chaque instant, ce qui indique qu'elle se déplace à vitesse constante en x.



Cela veut dire que si on tire une balle de fusil exactement à l'horizontale, elle touchera le sol en même temps qu'une balle qu'on laisserait tomber en même temps qu'on tire le fusil à partir de la même hauteur que le fusil. La vitesse horizontale de la balle ne change rien au temps de chute. C'est ce qu'on tente de vérifier dans ce vidéo de Mythbuster.
https://www.youtube.com/watch?v=D9wQVIEdKh8

fphoto.photoshelter.com/image/I0000rRLe6wDNbBY

(En réalité, la friction de l'air vient modifier cette conclusion. Si on fait les calculs plus poussés en tenant compte de cette friction, la balle de fusil tirée tombe un peu après la balle en chute verticale, car l'énorme friction de l'air agissant sur la balle tirée génère une composante verticale plus grande que la friction totale agissant sur la balle qui tombe verticalement. Pour une balle de calibre 22 (balle presque sphérique ayant un rayon de 5,67 mm et une masse de 3 g) tirée d'une hauteur de 10 m à 1000 m/s, le temps de chute est de 1,433 s pour la balle tombant verticalement et de 1,762 s pour la balle qui a été tirée horizontalement. C'est l'explication correcte du retard qu'on peut observer dans le vidéo.)

Formules de base

Le mouvement de projectile est donc un mouvement à accélération constante. Avec un axe des x horizontal et un axe des y vertical positif vers le haut. L'accélération est

Accélération du projectile

$$a_x = 0$$
$$a_y = -9{,}8 \tfrac{m}{s^2} = -g$$

Les équations pour le mouvement de projectiles sont donc

Équations de base du projectile

$$x = x_0 + v_{0x} t$$
$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{y0}^2$$

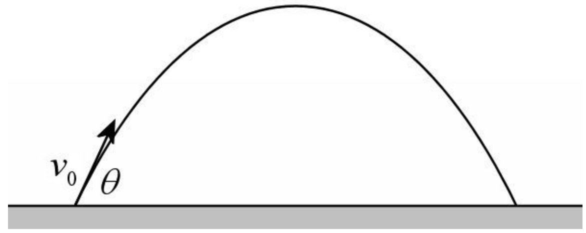
Ce sont en fait les équations obtenues au chapitre 1. La première est la seule équation qu'il y a pour un mouvement en x à vitesse constante. Les trois suivantes sont les équations pour le mouvement en y avec une accélération de $-g$. (La quatrième équation pour le mouvement vertical, qui est $y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_{0y} + v_y\right)t$, n'est pas vraiment utile pour un projectile parce qu'on sait que l'accélération est 9,8 m/s².) <u>Pour pouvoir utiliser ces équations, on doit avoir un axe des x parfaitement horizontal et un axe des y exactement vertical et pointant vers le haut puisqu'on a mis l'accélération négative.</u>

Autres formules parfois utiles

1) Durée du vol si le projectile retombe à la même hauteur

Si le projectile revient à la même hauteur qu'il a été lancé, on a

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$y_0 = y_0 + v_{0y}t_{vol} - \frac{1}{2}gt_{vol}^2$$
$$0 = v_{0y}t_{vol} - \frac{1}{2}gt_{vol}^2$$
$$0 = v_{0y} - \frac{1}{2}gt_{vol}$$
$$\frac{1}{2}gt_{vol} = v_{0y}$$



Si on isole le temps, on obtient

$$t_{vol} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

Cette formule n'est pas vraiment utile puisqu'on peut facilement retrouver le temps de vol à partir de l'équation

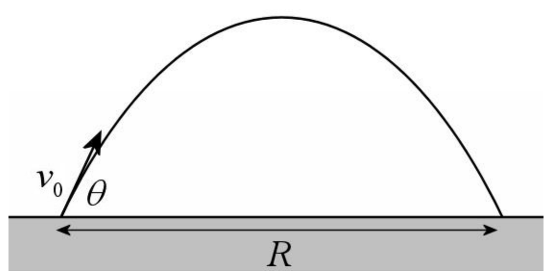
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

qui est une des équations de base du projectile. De plus, l'équation du temps de vol est assez restrictive puisque l'objet doit retomber à la même hauteur qu'il a été lancé.

2) Portée si le projectile retombe à la même hauteur

La portée R est la distance horizontale parcourue par le projectile durant son vol, ce qui signifie que $R = x - x_0$. Si l'objet revient à la même hauteur qu'il a été lancé, on a donc, en utilisant la formule du temps de vol trouvée précédemment,

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$x - x_0 = v_{0x}t$$
$$R = v_{0x}t_{vol}$$
$$R = v_{0x}\frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$
$$R = v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$



On peut simplifier cette équation en utilisant l'identité trigonométrique $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ pour finalement obtenir

Portée d'un projectile retombant à la même hauteur que son point de départ

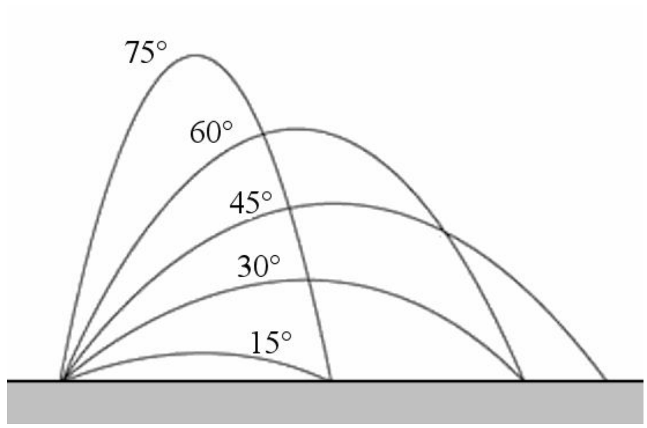
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Cette formule est plus utile que celle du temps de vol. Comme on a utilisé une identité trigonométrique pour la simplifier, elle permet de résoudre plus facilement des problèmes où on demande l'angle de départ d'un projectile. De plus, il faut faire attention, car on ne peut l'employer que si le projectile retombe à la même hauteur que son point de départ.

On peut alors trouver facilement à quel angle on doit lancer un projectile pour avoir la plus grande portée si on lance toujours à la même vitesse. Dans ce cas, puisque v_0 et g sont des constantes, la portée est maximale quand le sinus a sa valeur maximale. La plus grande valeur que peut avoir un sinus est 1 et cela se produit pour sin 90° = 1. On a donc une portée maximale quand 2 θ = 90° et donc quand θ = 45°.

La portée d'un projectile est maximale si l'angle de départ est 45°.

C'est évidemment Galilée qui prouva en premier que la portée était maximale pour un angle de départ de 45°, mais il semble que cette information était déjà connue des artilleurs. Tartaglia mentionne d'ailleurs ce fait en 1532, bien avant la preuve de Galilée.



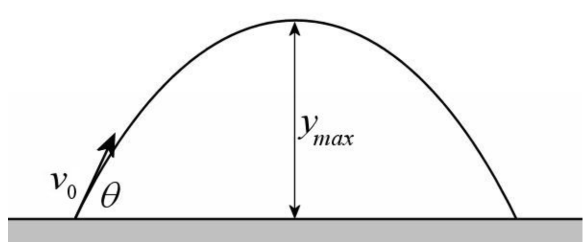
On peut voir ce fait à l'aide de la figure qui montre la trajectoire de différents projectiles qui ont tous été lancés à la même vitesse, mais avec des angles de départ différents.

On remarque que la portée est la même pour des angles de 30° et de 60° et qu'elle est aussi la même pour des angles de 75° et 15°. En fait, les portées sont toujours les mêmes pour les angles θ et 90° - θ. On a la même portée parce que le sin 2 θ a la même valeur pour ces deux angles.

3) Hauteur maximale atteinte par un projectile

Tout comme au chapitre précédent, on trouve la hauteur maximale d'un projectile en trouvant l'endroit où il ne monte plus. Il faut donc trouver sa position quand v_y = 0. Cela se trouve directement avec

$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{0y}^2$$
$$-2g\left(y_{\max} - 0\right) = -v_{0y}^2$$



Comme on a mis $y_0 = 0$, la hauteur est toujours mesurée à partir du point de départ du projectile. En isolant la hauteur maximale, on a

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$
$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Comme on obtient cette équation directement à partir d'une des équations de base, elle n'a pas vraiment d'intérêt pour résoudre des problèmes.

On voit que le temps de vol et la hauteur maximale

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \qquad\qquad t_{vol} = \frac{2v_{0y}}{g}$$

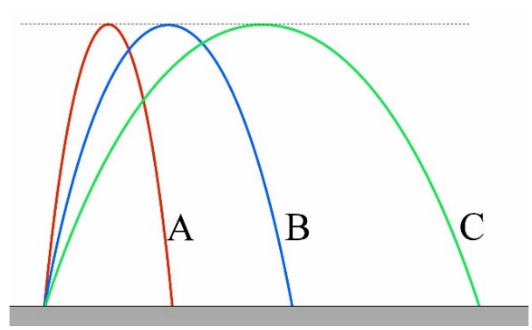
dépendent tous les deux uniquement de la vitesse initiale en y et que le mouvement horizontal n'a aucune influence sur ces quantités.

On peut isoler la vitesse initiale en y dans la formule du temps de vol et la remplacer dans l'équation de la hauteur maximale pour obtenir

$$y_{\max} = \frac{g t_{vol}^2}{8}$$

Il est clair maintenant que le temps de vol est directement relié à la hauteur maximale du projectile.

Les trois projectiles de la figure ont donc tous le même temps de vol puisqu'ils ont tous la même hauteur maximale. Ils n'ont cependant pas tous la même portée.



4) Lien entre la position en *x* et la position en *y*

Nous avons une formule donnant la position en x en fonction du temps et une autre donnant la position en y en fonction du temps. Nous allons maintenant combiner ces deux équations pour obtenir une formule donnant la position en y en fonction de la position en x du projectile. Isolons premièrement t dans la formule de la position en x.

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Comme on a mis $x_0 = 0$, <u>le point de départ du projectile sera toujours notre $x = 0$ ici</u>. On remplace maintenant dans l'équation du mouvement en y pour obtenir

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$y = 0 + v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$
$$y = 0 + v_0\sin\theta\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

Comme on a mis $y_0 = 0$, <u>le point de départ du projectile est toujours notre $y = 0$ ici</u>. En simplifiant, on obtient

Lien entre les positions x et y pour un projectile

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

Le point de départ doit être (0,0)

Cette équation est particulièrement utile pour résoudre des problèmes dans lesquels on vous donne la position x et y du projectile sur sa trajectoire ou encore si on vous donne l'équation de la trajectoire.

Cette équation nous montre également que la forme de la trajectoire est une parabole concave vers le bas puisqu'elle est de la forme $y = Ax - Bx^2$ où A et B sont des constantes. C'est encore une fois Galilée qui prouva ce fait, quoique dal Monte, un ami de Galilée, affirma quelques années plus tôt que la trajectoire ressemble à une parabole.

Les jets d'eau sur cette figure sont donc des paraboles puisqu'ils sont constitués d'eau en chute libre. Il s'agit d'une fontaine au Detroit Metropolitan Wayne Airport.

mathtourist.blogspot.ca/2011/05/fountain-parabolas.html

Vous pouvez également observer différentes positions d'un projectile (un ballon) dans le vidéo suivant et admirer la forme parabolique de la trajectoire.
https://www.youtube.com/watch?v=EUqpyia45PM

Exemples

La plupart des problèmes peuvent être solutionnés uniquement à partir des formules de base du projectile.

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{y0}^2$$

Erreur fréquente : Mettre a = 9,8 m/s² en x.

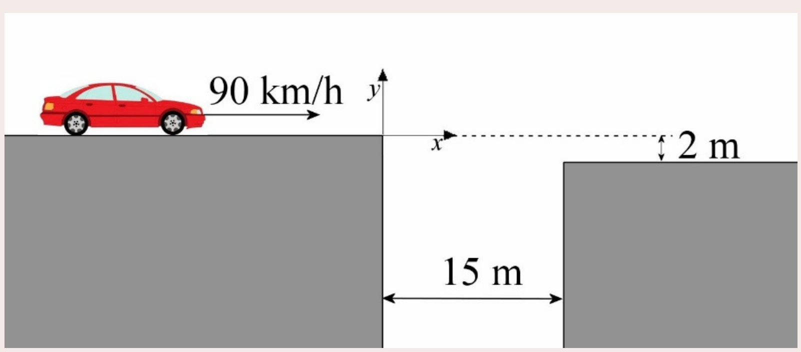
Il n'y a pas d'accélération en x. L'accélération de 9,8 m/s² vers le bas est uniquement une accélération en y.

Erreur fréquente : utiliser g = -9,8 m/s²

Quand vous voyez g dans une formule, il faut remplacer g par 9,8 m/s² et non pas par -9,8 m/s². Le signe ne fait pas partie de g. On a déjà tenu compte du signe de l'accélération en faisant la formule pour la portée.

Exemple 2.3.1

Un automobiliste tente de traverser un canyon très profond. L'auto se déplace à 90 km/h et le ravin a une largeur de 15 m. Le sol, de l'autre côté du ravin, est 2 m plus bas que le sol du côté où arrive la voiture. La traversée est-elle réussie ou l'auto tombe-t-elle dans le ravin ?



fr.depositphotos.com/2577683/stock-illustration-Car.html

Pour résoudre ce problème, on va calculer de combien la voiture aura descendu lorsqu'elle arrivera de l'autre côté du ravin. Si elle a descendu de plus de 2 m, elle frappera le côté du ravin et tombera en bas. Si elle a descendu de moins de 2 m, elle tombera sur le sol et la traversée sera réussie.

On sait ici que v_{0x} = 25 m/s et v_{0y} = 0. Comme dans plusieurs problèmes de projectile, on peut mettre l'origine des axes de coordonnées où on veut. On va la mettre juste au début du ravin, en haut (voir figure). La position initiale de la voiture, quand elle commence son mouvement de projectile, est donc x_0 = 0 et y_0 = 0. On cherche y quand la voiture est à x = 15 m. Si on examine les équations pour le projectile

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{y0}^2$$

on se rend compte qu'aucune équation ne nous permet de trouver directement y quand x vaut 15 m. On remarque cependant que la première équation nous permettrait de trouver t. Une fois qu'on aura t, on pourra trouver y avec la troisième équation puisque ce sera la seule inconnue dans cette équation.

1) Calcul de t

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$15m = 0m + 25\tfrac{m}{s} \cdot t$$
$$t = 0,6s$$

2) Calcul de y

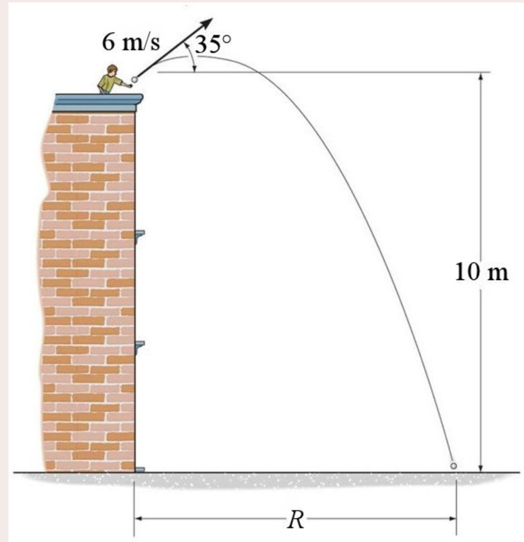
$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 0m + 0\tfrac{m}{s} \cdot 0,6s - \frac{1}{2} \cdot 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(0,6s\right)^2 \\ &= -1,764m \end{aligned}$$

La voiture va donc réussir à traverser ce ravin.

De toute évidence, la traversée du ravin ne pourra pas être réussie si l'autre côté est de la même hauteur. Dès que le véhicule commence sa traversée, il commence à descendre à cause de la gravitation et sera plus bas que l'autre côté. À moins que le véhicule soit un autobus dans un film.
https://www.youtube.com/watch?v=9tEAMLOupKs

Exemple 2.3.2

On lance un projectile à partir du haut d'un toit avec une vitesse de 6 m/s et un angle de 35° avec l'horizontale. Le toit est à une hauteur de 10 m par rapport au sol.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/x--i5-tossed-upper-story-window-building-ball-given-initial-velocity-840-m-s-angle-150-hor-q601151

a) Quel est le temps de vol de ce projectile ?

On trouve directement le temps de vol avec

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il nous faut la composante en y de la vitesse initiale. Tant qu'à y être, on va calculer les deux composantes, on en a presque toujours besoin.

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos\theta \\ &= 6\tfrac{m}{s} \cdot \cos 35° \\ &= 4,915\tfrac{m}{s} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \sin\theta \\ &= 6\tfrac{m}{s} \cdot \sin 35° \\ &= 3,441\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

On doit également décider où sera l'origine de nos coordonnées. On choisit ici que $x = 0$ et $y = 0$ seront au point de départ du projectile.

On trouve directement le temps de vol avec

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-10m = 0m + 3,441\tfrac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$

On résout cette équation quadratique pour obtenir deux solutions t = -1,120 s et t = 1,822 s. De toute évidence, la première ne peut être acceptée puisque le mouvement du projectile commence à t = 0 s. Le temps de vol est donc 1,822 s.

b) Quelle est la portée (R) de ce projectile ?

La portée se calcule avec la formule du mouvement en x. On a alors

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$R = 0m + 4,915\tfrac{m}{s} \cdot 1,822s$$
$$R = 8,955m$$

c) Quelle est la hauteur maximale (mesurée à partir du sol) de ce projectile ?

On sait qu'à la hauteur maximale, on a $v_y = 0$. On a donc

$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{y0}^2$$
$$-2 \cdot 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(y_{\max} - 0m\right) = \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(3,441\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y_{\max} = 0,604m$$

Comme cette valeur est toujours la hauteur par rapport à notre $y = 0$ m, il faut parfois faire une petite correction. Comme on voulait la hauteur par rapport au sol et que notre $y = 0$ m est vis-à-vis du haut du toit, on doit ajouter 10 m à la hauteur obtenue. La hauteur maximale par rapport au sol est donc de 10,604 m.

d) Quelle sera la vitesse du projectile (grandeur et direction) immédiatement avant de frapper le sol ?

On ne peut trouver directement la grandeur et la direction de la vitesse. On doit d'abord trouver les composantes de la vitesse. Pour la vitesse en x, c'est facile puisqu'elle est constante. On a donc

$$v_x = v_{0x} = 4,915\tfrac{m}{s}$$

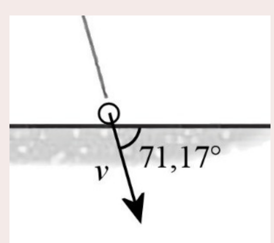
On trouve la vitesse en y avec

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ &= 3,441\tfrac{m}{s} - 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot 1,822s \\ &= -14,42\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Une fois qu'on a les composantes, on peut trouver la grandeur et la direction.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{\left(4,915\tfrac{m}{s}\right)^2 + \left(14,42\tfrac{m}{s}\right)^2} \\ &= 15,23\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\frac{v_y}{v_x} \\ &= \arctan\frac{-14,42\tfrac{m}{s}}{4,915\tfrac{m}{s}} \\ &= -71,17° \end{aligned}$$



L'image de droite nous montre ce que signifie cet angle négatif selon les règles données à la section 2.1.

Les formules de base permettent de trouver la solution de presque tous les problèmes de projectiles. Même s'il y a une formule pour la portée, la hauteur maximum ou le temps de vol, on peut très bien trouver ces quantités à partir des formules de base.

Il y a toutefois des cas où c'est difficile d'obtenir une solution à partir des formules de base. Trouver l'angle de départ d'un projectile est un de ces cas difficiles. Dans ce cas, on peut parfois prendre la formule de la portée pour trouver l'angle.

Exemple 2.3.3

Le 24 mai 1941, le navire de guerre allemand *Bismarck* coula le navire britannique *HMS Hood* en l'atteignant avec un obus de 800 kg directement dans une réserve de munition. Ce qui est remarquable, c'est que le Bismarck était à ce moment à une distance de 14 km du Hood. Avec quel angle l'obus du Bismarck est-il parti sachant que sa vitesse initiale était de 820 m/s ?

On peut trouver l'angle avec

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$14\,000m = \frac{\left(820\,\frac{m}{s}\right)^2 \cdot \sin 2\theta}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\sin 2\theta = 0{,}204$$

Notez qu'il peut arriver qu'avec cette équation, on arrive à un sinus plus grand que 1, ce qui aurait pu se produire ici si la vitesse avait été inférieure à 370 m/s. Dans ce cas, il n'y a pas de solution, ce qui signifie que c'est impossible d'atteindre la cible, peu importe l'angle de tir.

Heureusement, le sinus est inférieur à 1 ici, ce qui signifie qu'il y a une solution. En fait, il y a deux solutions à un arcsinus. La calculatrice vous donnera la première réponse, qu'on va appeler θ_1. L'autre solution est θ_2 = 180° - θ_1. Ici, les solutions sont donc

$$\sin 2\theta = 0{,}204$$

$$2\theta = 11{,}77° \quad \text{et} \quad 168{,}23°$$

$$\theta = 5{,}89° \quad \text{et} \quad 84{,}11°$$

Ces deux réponses sont bonnes. Toutefois, les canons du Bismarck ne pouvaient pas tirer avec un angle supérieur à 30°. La solution est donc de 5,89°.

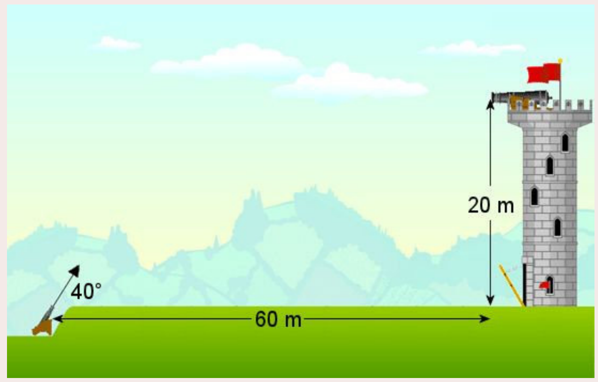
Rappelez-vous qu'on peut uniquement trouver l'angle de départ avec cette formule de la portée si le projectile retombe à la même hauteur qu'il a été lancé.

Il y a un autre cas où on n'utilise pas les formules de base. Il s'agit des cas où on connait des positions du projectile sur sa trajectoire. Dans ce cas, on utilise

$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

Exemple 2.3.4

Un canon lance un projectile avec un angle de 40° pour détruire un autre canon sur un château. Les distances du canon ennemi sont indiquées sur la figure. À quelle vitesse faut-il lancer le projectile ?



www.kineticbooks.com/physics/librarycheck.php?src=triallabs

Comme on connait 2 points de la trajectoire ((0,0) et (60 m, 20 m)), on peut utiliser l'équation de la trajectoire d'un projectile pour résoudre ce problème.

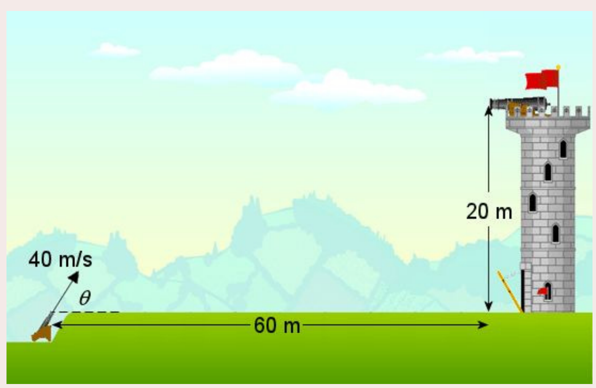
$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

$$20m = (\tan 40°)\cdot 60m - \frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2 40°}\cdot(60m)^2$$

$$v_0 = 31{,}47\,\tfrac{m}{s}$$

Exemple 2.3.5

Un canon lance un projectile avec une vitesse de 40 m/s. L'obus atteint le canon ennemi à la position indiquée sur la figure. À quel angle le projectile a-t-il été lancé ?



Comme on connait 2 points de la trajectoire ((0,0) et (60 m, 20 m)), on peut utiliser l'équation de la trajectoire d'un projectile pour résoudre ce problème.

$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

$$20m = (\tan\theta)\cdot 60m - \frac{9,8\frac{m}{s^2}}{2\cdot\left(40\frac{m}{s}\right)^2\cdot\cos^2\theta}\cdot(60m)^2$$

$$20m = \tan\theta\cdot 60m - 11,025m\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$20 = 60\cdot\tan\theta - 11,025\cdot\sec^2\theta$$

Reste à isoler θ dans cette équation. Pour y arriver, il faut se rappeler que $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$. On a alors

$$20 = 60\cdot\tan\theta - 11,025\cdot\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$20 = 60\cdot\tan\theta - 11,025 - 11,025\cdot\tan^2\theta$$

$$31,025 - 60\cdot\tan\theta + 11,025\cdot\tan^2\theta = 0$$

C'est une équation quadratique de tan θ. La solution de cette équation quadratique est

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{60\pm\sqrt{60^2-4\cdot 31,035\cdot 11,025}}{2\cdot 11,025}\\ &= 4,8636 \text{ et } 0,5786\end{aligned}$$

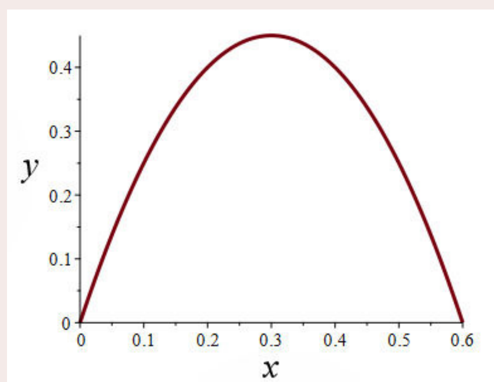
Les deux solutions sont donc

$$\theta = \arctan 4,8636 = 78,4° \quad \text{et} \quad \theta = \arctan 0,5786 = 30,05°$$

Exemple 2.3.6

L'équation de la trajectoire d'un projectile est donnée par

$$y = 3x - 5m^{-1}x^2$$



a) Quel est l'angle de départ de ce projectile ?

C'est un cas où on connait les positions du projectile sur sa trajectoire (en fait, on connait tous les points de la trajectoire ici). Dans ce cas, on peut résoudre avec l'équation

$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

On trouve quelques informations en comparant les deux équations.

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$
$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$
$$y = 3x - 5m^{-1}x^2$$

On trouve donc que $\tan\theta = 3$ et donc que $\theta = 71{,}56°$.

b) Quelle est la vitesse de départ de ce projectile ?

Toujours avec la même comparaison, on trouve que

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} = 5m^{-1}$$

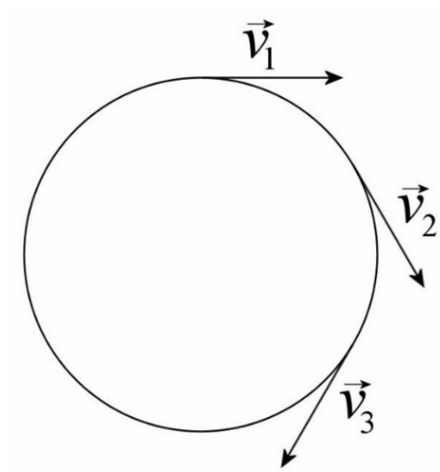
Donc que

$$\frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2(71{,}56°)} = 5m^{-1}$$
$$v_0 = 3{,}13\tfrac{m}{s}$$

2.4 LE MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

Formule de l'accélération centripète

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'objet décrit une trajectoire circulaire avec une vitesse dont la grandeur est constante. On pourrait penser que, puisque la grandeur de la vitesse est constante, l'accélération est nulle, mais ce n'est pas le cas.

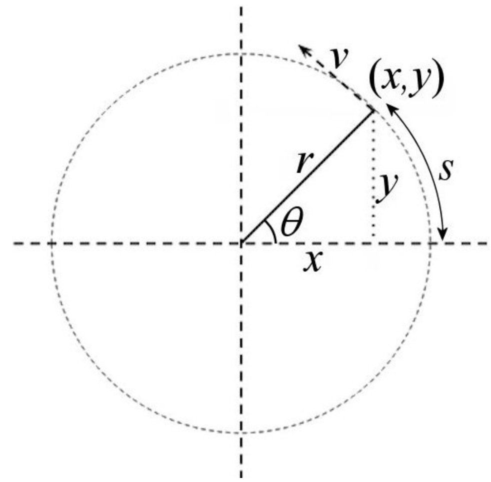


On voit sur cette figure la vitesse à trois endroits sur le cercle. Bien que les vecteurs aient tous la même longueur, ils n'ont pas la même orientation. Cela signifie que la vitesse change puisque sa direction change et qu'il y a donc une accélération quand l'objet fait un mouvement circulaire. Le très court vidéo suivant vous montre comment le vecteur vitesse change d'orientation durant le mouvement circulaire.
https://www.youtube.com/watch?v=XeOI6YTwFpE

Pour trouver l'accélération, on va trouver les positions x et y en fonction du temps pour un objet qui fait un mouvement circulaire à vitesse constante dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

On a alors la situation montrée sur la figure. De là

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$



L'angle (en radians) est défini par

$$\theta = \frac{\text{arc de cercle}}{\text{rayon}}$$
$$= \frac{s}{r}$$

Comme le déplacement se fait à vitesse constante, on a $s = vt$. L'angle est donc

$$\theta = \frac{vt}{r}$$

Les positions x et y en fonction du temps sont donc données par les formules suivantes.

$$x = r\cos\tfrac{vt}{r}$$
$$y = r\sin\tfrac{vt}{r}$$

On peut maintenant trouver les composantes de la vitesse en dérivant.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(r\cos\frac{vt}{r}\right)}{dt} = -r\frac{v}{r}\sin\tfrac{vt}{r} = -v\sin\tfrac{vt}{r}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(r\sin\frac{vt}{r}\right)}{dt} = r\frac{v}{r}\cos\tfrac{vt}{r} = v\cos\tfrac{vt}{r}$$

Voyons si on est sur la bonne voie. Calculons ce qu'on obtient à différents angles.

À $\theta = 0°$ ($vt/r = 0°$), on a

$$v_x = -v\sin 0° = 0 \qquad v_y = v\cos 0° = v$$

À $\theta = 90°$ ($vt/r = 90°$), on a

$$v_x = -v\sin 90° = -v \qquad v_y = v\cos 90° = 0$$

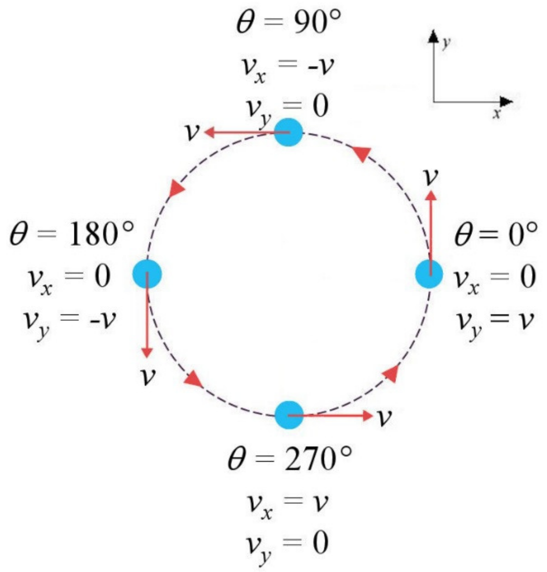
À $\theta = 180°$ ($vt/r = 180°$), on a

$$v_x = -v\sin 180° = 0 \qquad v_y = v\cos 180° = -v$$

À $\theta = 270°$ ($vt/r = 270°$), on a

$$v_x = -v\sin 270° = v \qquad v_y = v\cos 270° = 0$$

On voit la grandeur et la direction de cette vitesse à ces quatre angles et on constate que tout semble conforme aux attentes.



byjus.com/physics/uniform-circular-motion/

On peut maintenant trouver les composantes de l'accélération en dérivant les composantes de la vitesse.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(-v\sin\frac{vt}{r}\right)}{dt} = -v\tfrac{v}{r}\cos\tfrac{vt}{r} = -\tfrac{v^2}{r}\cos\tfrac{vt}{r}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(v\cos\frac{vt}{r}\right)}{dt} = -v\tfrac{v}{r}\sin\tfrac{vt}{r} = -\tfrac{v^2}{r}\sin\tfrac{vt}{r}$$

Voyons ce que ça donne en calculant ce qu'on obtient à différents angles.

À $\theta = 0°$, on a

$$a_x = -\tfrac{v^2}{r}\cos 0° = -\tfrac{v^2}{r} \qquad a_y = -\tfrac{v^2}{r}\sin 0° = 0$$

À $\theta = 90°$, on a

$$a_x = -\tfrac{v^2}{r}\cos 90° = 0 \qquad a_y = -\tfrac{v^2}{r}\sin 90° = -\tfrac{v^2}{r}$$

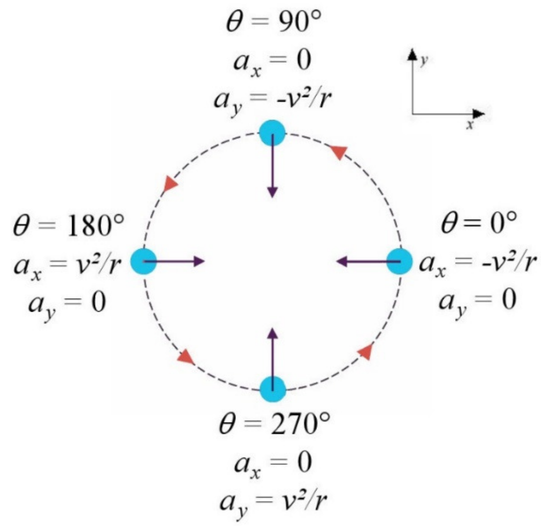
À $\theta = 180°$, on a

$$a_x = -\tfrac{v^2}{r}\cos 180° = \tfrac{v^2}{r} \qquad a_y = -\tfrac{v^2}{r}\sin 180° = 0$$

À $\theta = 270°$, on a

$$a_x = -\tfrac{v^2}{r}\cos 270° = 0 \qquad a_y = -\tfrac{v^2}{r}\sin 270° = \tfrac{v^2}{r}$$

On voit la grandeur et la direction de cette accélération à ces quatre angles.

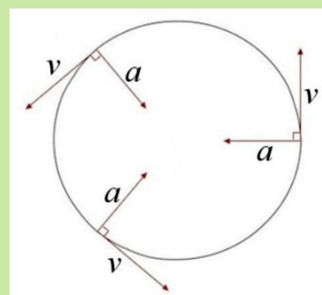


On constate donc que l'accélération vaut toujours *v²/r* et est toujours dirigée vers le centre du cercle. On appelle cette accélération *l'accélération centripète* puisque centripète signifie « dirigée vers le centre ». On la notera a_c.

Accélération centripète

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

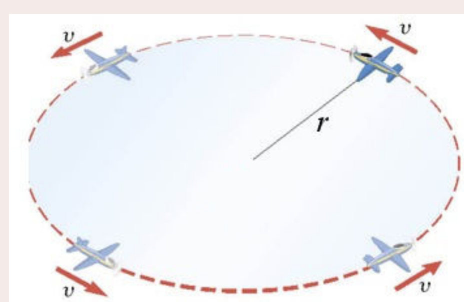
Dirigée vers le centre



Le vidéo suivant vous montre l'orientation des vecteurs vitesse et accélération durant le mouvement circulaire.
https://www.youtube.com/watch?v=wJutTmcHE4s

Exemple 2.4.1

Un avion fait un mouvement à vitesse constante en suivant une trajectoire circulaire ayant un rayon 2 km. Quelle est la grandeur de l'accélération centripète si la vitesse de l'avion est de 360 km/h ?



www.embibe.com/study/uniform-circular-motion-in-a-horizontal-plane-concept

La grandeur de l'accélération est

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(100\frac{m}{s}\right)^2}{2000m} \\ &= 5\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

On peut également faire une formule de cette accélération en utilisant la période T du mouvement circulaire qui correspond au temps nécessaire pour faire un tour. Ce temps est

$$\begin{aligned} T &= \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} \\ &= \frac{2\pi r}{v} \end{aligned}$$

(Cette équation n'est valide que si la grandeur de la vitesse est constante.) On peut donc éliminer v dans la formule de l'accélération centripète

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(2\pi r / T\right)^2}{r} \end{aligned}$$

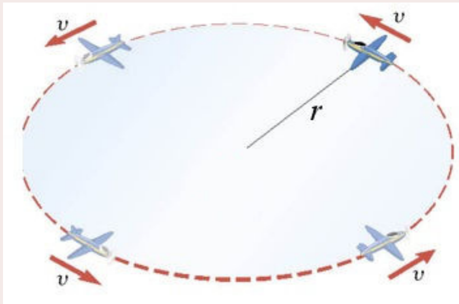
pour obtenir

Accélération centripète (valide uniquement si la grandeur de la vitesse est constante)

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Dirigée vers le centre

Exemple 2.4.2



Un avion fait un mouvement à vitesse constante en suivant une trajectoire circulaire ayant un rayon 2 km. Quelle est la grandeur de l'accélération centripète si la période est de 2 minutes ?

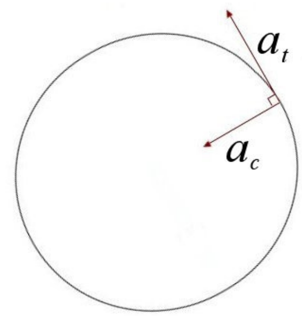
La grandeur de l'accélération est

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \cdot 2000m}{\left(120s\right)^2} \\ &= 5,483 \tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Erreur fréquente : Utiliser l'accélération centripète dans les formules du MRUA.

Il ne faut surtout pas utiliser la valeur de l'accélération centripète dans les équations du MRUA, car cette accélération n'est pas constante. En effet, on remarque sur la figure précédente que la direction de l'accélération change continuellement, ce qui fait qu'elle n'est pas constante.

2.5 LE MOUVEMENT CIRCULAIRE NON UNIFORME



Dans le mouvement circulaire non uniforme, l'objet fait toujours un mouvement circulaire, mais avec une vitesse dont la grandeur varie. Pour parvenir à étudier ce phénomène, on sépare l'accélération en deux composantes.

La première composante a_c est l'accélération centripète. Elle est responsable de la courbure de la trajectoire du mouvement. Sa grandeur est toujours donnée par v^2/r, où v est la vitesse instantanée de l'objet.

Accélération centripète : fait dévier l'objet

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad \text{Dirigée vers le centre}$$

Erreur fréquente : Utiliser $a_c = 4\pi^2 r/T^2$ pour calculer l'accélération centripète dans un mouvement circulaire non uniforme.

Cette formule a été obtenue en supposant que la grandeur de la vitesse est constante. Elle n'est donc pas bonne dans un mouvement circulaire non uniforme, dans lequel la grandeur de la vitesse varie.

La deuxième composante a_t fait changer la vitesse de l'objet. Elle est tangente au cercle et c'est pourquoi elle est appelée *l'accélération tangentielle*. Si elle est dans la même direction que la vitesse, la vitesse de l'objet augmente et si elle est dans la direction opposée à la vitesse, l'objet ralentit. Cette accélération correspond au rythme de changement de la vitesse et est donc

Accélération tangentielle : change la grandeur de la vitesse

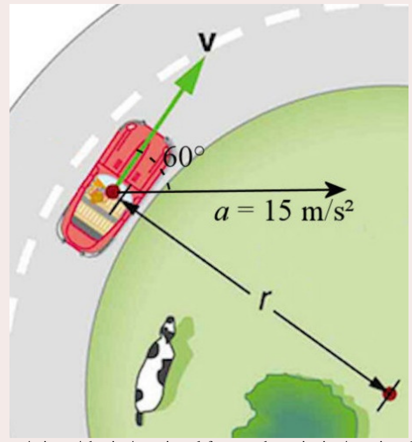
$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad \text{Tangente au cercle}$$

L'accélération totale (a) de l'objet se trouve à partir des deux composantes avec

Accélération totale dans un mouvement circulaire

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Exemple 2.5.1



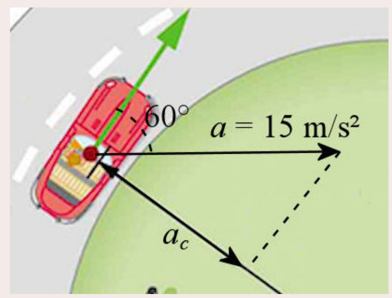
www.khanacademy.org/science/physics/centripetal-force-and-gravitation/centripetal-acceleration-tutoria/v/race-cars-with-constant-speed-around-curve

La figure de droite montre la grandeur et la direction de l'accélération d'une voiture dans un virage. Le rayon de courbure du virage est de 8 m.

a) Quelle est la grandeur de l'accélération centripète de la voiture ?

L'accélération centripète de la voiture correspond à la composante de l'accélération dirigée vers le centre.

Selon la figure de droite, cette composante est



$$\frac{a_c}{a} = \cos 30°$$

$$\frac{a_c}{15\frac{m}{s^2}} = \cos 30°$$

$$a_c = 12{,}99\tfrac{m}{s^2}$$

b) Quelle est la grandeur de la vitesse de la voiture ?

On trouve la vitesse avec la formule de l'accélération centripète.

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$12{,}99\tfrac{m}{s^2} = \frac{v^2}{8m}$$

$$v = 10{,}19\tfrac{m}{s}$$

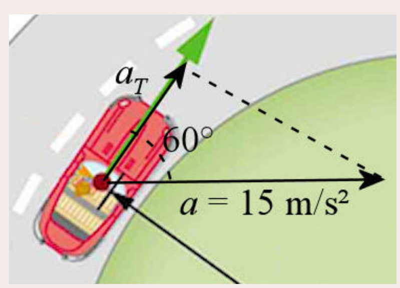
c) Quelle est la grandeur de l'accélération tangentielle de la voiture ?

L'accélération tangentielle est la composante de l'accélération perpendiculaire au rayon. Selon la figure de droite, cette composante est

$$\frac{a_t}{a} = \cos 60°$$

$$\frac{a_t}{15\frac{m}{s^2}} = \cos 60°$$

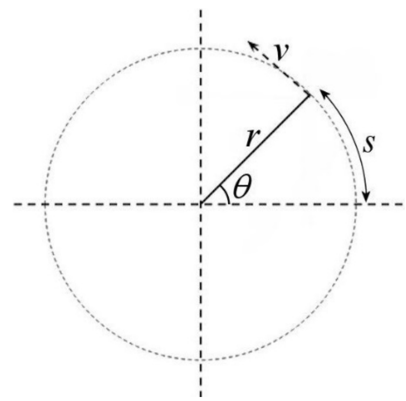
$$a_t = 7{,}5\tfrac{m}{s^2}$$



d) Est-ce que la vitesse de la voiture est en train d'augmenter ou de diminuer ?

Comme l'accélération tangentielle est dans le même sens que la vitesse, la vitesse de la voiture est en train d'augmenter.

Dans un mouvement circulaire, la position de l'objet le long de l'arc de cercle sera notée s (ainsi, Δs est la distance parcourue le long du cercle). La grandeur de la vitesse de l'objet correspond au rythme à laquelle cette position change, ce qui veut dire que



$$v = \frac{ds}{dt}$$

Comme cette formule et

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

sont exactement les mêmes formules que celles qu'on avait au chapitre 1, sauf que la position est notée s au lieu de x, nous avons les mêmes solutions si l'accélération tangentielle est constante.

Formules de cinématique du mouvement circulaire si a_t est constante

$$v = v_0 + a_t t$$

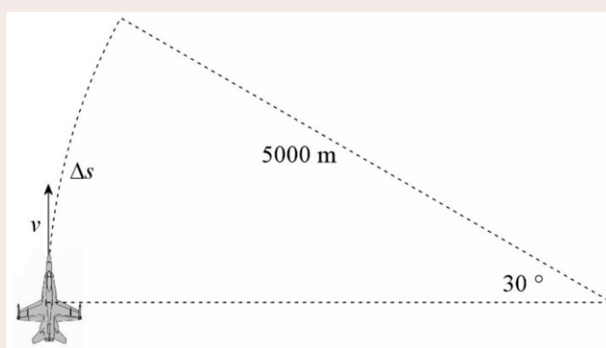
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$$

$$2a_t \left(s - s_0 \right) = v^2 - v_0^2$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2} \left(v_0 + v \right) t$$

Exemple 2.5.2

Un avion est dans un virage. La grandeur de la vitesse de l'avion augmente à un rythme constant de 8 m/s² et sa vitesse initiale est de 100 m/s. Le rayon de courbure du virage est de 5000 m. Au bout d'un certain temps, l'avion a parcouru une distance égale à 1/12 de la circonférence du cercle.



a) Quelle est la distance parcourue par l'avion à ce moment (Δs sur la figure) ?

La distance parcourue correspond à 1/12 de cercle. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta s &= \frac{1}{12}2\pi r\\ &= \frac{1}{12}\cdot 2\pi \cdot 5000m\\ &= 2618m\end{aligned}$$

b) Quelle est la vitesse de l'avion à ce moment ?

Avec une accélération tangentielle constante, on a (si on dit que la position initiale est $s = 0$ m)

$$2a_t\left(s - s_0\right) = v^2 - v_0^2$$
$$2\cdot 8\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(2618m - 0m\right) = v^2 - \left(100\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$v = 227,8\tfrac{m}{s}$$

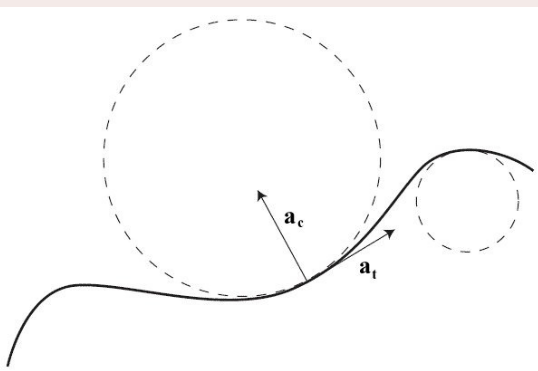
c) Quelle est la grandeur de l'accélération de l'avion à ce moment ?

On va trouver les deux composantes de l'accélération. On sait déjà que l'accélération tangentielle est de 8 m/s². Reste à trouver l'accélération centripète. Celle-ci vaut

$$\begin{aligned}a_c &= \frac{v^2}{r}\\ &= \frac{\left(227,8\tfrac{m}{s}\right)^2}{5000m}\\ &= 10,38\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération est donc

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{a_c^2 + a_t^2}\\ &= \sqrt{\left(8\tfrac{m}{s^2}\right)^2 + \left(10,38\tfrac{m}{s^2}\right)^2}\\ &= 13,10\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}$$



Notez qu'on peut analyser n'importe quel mouvement à l'aide de ces formules puisqu'on peut considérer que n'importe quelle petite partie d'une trajectoire courbe est une partie d'un cercle.

Partout, l'accélération centripète, perpendiculaire au mouvement, fait dévier l'objet alors que l'accélération tangentielle, parallèle au mouvement, change la grandeur de la vitesse de l'objet.

Bien sûr, il n'est pas obligatoire de séparer l'accélération en composantes centripète et tangentielle. Par exemple, on compliquerait beaucoup l'analyse du mouvement du projectile en procédant de cette façon.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Position d'un objet

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Déplacement

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Vitesse moyenne

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

En composantes : $\bar{v}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ $\bar{v}_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ $\bar{v}_z = \dfrac{\Delta z}{\Delta t}$

Vitesse instantanée

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

En composantes : $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ $v_z = \dfrac{dz}{dt}$

Changement de vitesse

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Accélération moyenne

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

En composantes : $\bar{a}_x = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$ $\bar{a}_y = \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}$ $\bar{a}_z = \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t}$

Accélération instantanée

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En composantes : $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$ $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$

Mouvement uniformément accéléré en plusieurs dimensions

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad v_y = v_{0y} + a_y t \qquad v_z = v_{0z} + a_z t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad z = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2$$

$$2a_x\left(x - x_0\right) = v_x^2 - v_{x0}^2 \qquad 2a_y\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{y0}^2 \qquad 2a_z\left(z - z_0\right) = v_z^2 - v_{z0}^2$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{x0} + v_x\right)t \qquad y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_{y0} + v_y\right)t \qquad z = z_0 + \frac{1}{2}\left(v_{z0} + v_z\right)t$$

Accélération du projectile

$$a_x = 0$$

$$a_y = -9{,}8 m/s^2 = -g$$

<u>On doit avoir un axe des *x* parfaitement horizontal et un axe des *y* exactement vertical et pointant vers le haut.</u>

Équations de base du projectile

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{y0}^2$$

Portée d'un projectile retombant à la même hauteur que son point de départ

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Lien entre les positions x et y pour un projectile

$$y = \left(\tan\theta\right)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

Le point de départ doit être (0,0)

Accélération centripète

$$a_c = \frac{v^2}{r} \text{ ou } a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Dirigée vers le centre

(La deuxième formule est valide uniquement si la grandeur de la vitesse est constante.)

Accélération tangentielle : change la grandeur de la vitesse

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Tangente au cercle

Accélération totale dans un mouvement circulaire

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Formules de cinématique du mouvement circulaire si a_t est constant

$$v = v_0 + a_t t \qquad 2a_t(s - s_0) = v^2 - v_0^2$$

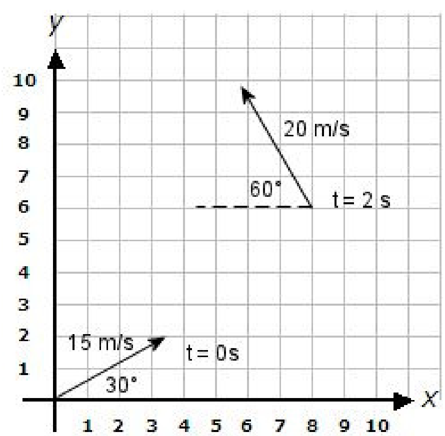
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \qquad s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

EXERCICES

2.2 Les lois de la cinématique à deux dimensions

1. À $t = 0$ s, un objet est à la position $x = 0$ m et $y = 0$ m. Sa vitesse est alors de 15 m/s dans une direction faisant 30° avec l'angle de x. À $t = 2$ s, l'objet est à la position $x = 8$ m et $y = 6$ m, et sa vitesse est maintenant de 20 m/s dans une direction faisant 60° avec l'angle des x négatifs.

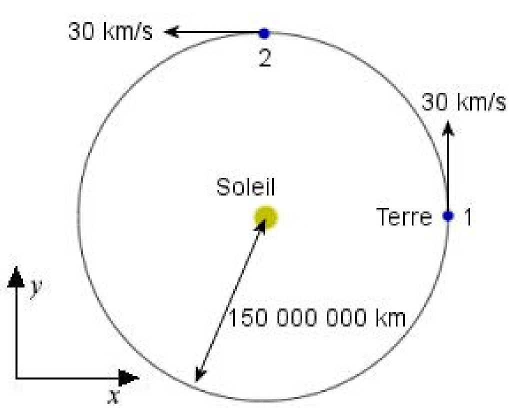
   a) Quelle est la vitesse moyenne entre $t = 0$ s et $t = 2$ s ?
   b) Quelle est l'accélération moyenne entre $t = 0$ s et $t = 2$ s ?



www.helpingwithmath.com/printables/worksheets/geometry/geo0701coords11.htm

2. Voici la position de la Terre sur son orbite autour du Soleil. Rappelez-vous que la Terre fait le tour du Soleil en 1 an.

   a) Quel est le déplacement entre les positions 1 et 2 ?
   b) Quelle est la distance parcourue entre les positions 1 et 2 ?
   c) Quelle est la vitesse moyenne entre les positions 1 et 2 ?
   d) Quelle est l'accélération moyenne entre les positions 1 et 2 ?



3. La position d'un objet est donnée par les formules

$$x = -3\tfrac{m}{s^2}t^2 + 2\tfrac{m}{s}t - 4m$$
$$y = -2\tfrac{m}{s^3}t^3 + 6\tfrac{m}{s^2}t^2 + 1m$$

a) Quelle est la vitesse (grandeur et direction) à $t = 1$ s ?
b) Quelle est l'accélération (grandeur et direction) à $t = 1$ s ?

4. On connait les valeurs suivantes pour un objet à $t = 0$ s.

$$\vec{a} = \left(\vec{i} - 2\vec{j}\right)\tfrac{m}{s^2}$$
$$\vec{v}_0 = \left(2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}\right)\tfrac{m}{s}$$
$$\vec{r}_0 = \left(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)m$$

Quelle sera la position de l'objet à $t = 5$ s si l'accélération est constante ?

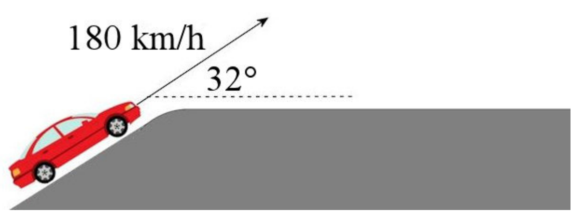
5. Voici la position et la vitesse d'un objet à deux moments.

$$t = 0s \qquad \vec{r} = \left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)m \qquad \vec{v} = \left(-2\vec{i} + 1\vec{k}\right)\tfrac{m}{s}$$
$$+\,tard \qquad \vec{r} = \left(2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}\right)m \qquad \vec{v} = \left(5\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k}\right)\tfrac{m}{s}$$

Quelle est l'accélération de cet objet, sachant qu'elle est constante ?

2.3 Le projectile

6. Anatole veut impressionner ses amis beaucerons en faisant un saut avec sa voiture. Il arrive donc en haut d'une côte à 180 km/h et il s'envole au sommet de la côte avec un angle de 32°.



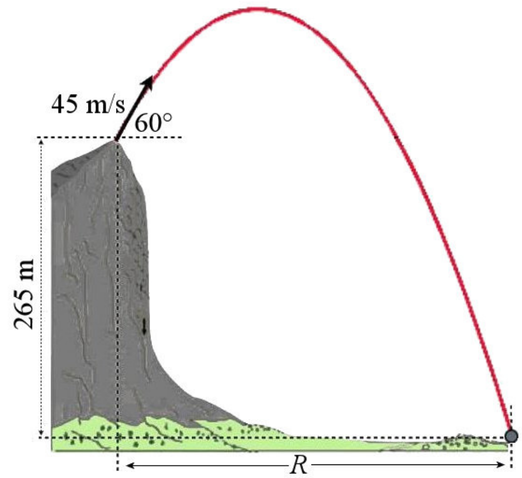
fr.depositphotos.com/2577683/stock-illustration-Car.html

Ça va ressembler un peu à ceci.
https://www.youtube.com/watch?v=5kMTHwjy6Z8
(N'essayez pas ça, c'est vraiment dangereux. On ne contrôle plus la voiture quand elle est dans les airs et ça peut être catastrophique si elle tourne un peu pendant qu'elle vole.)

a) Pendant combien de temps la voiture est-elle dans les airs ?
b) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la voiture ?
c) À quelle distance de la côte la voiture retombe-t-elle ?

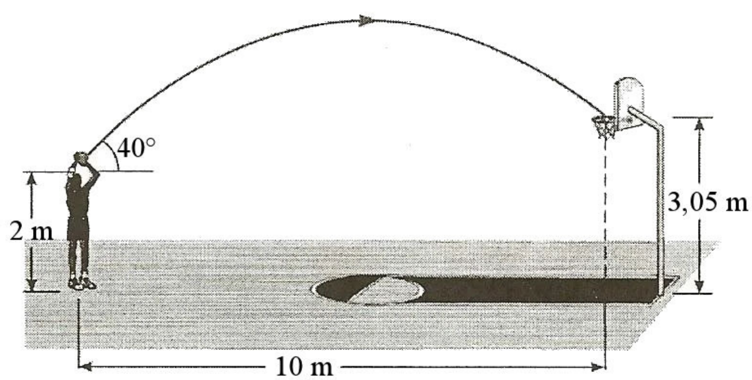
7. On lance Justin Bieber du haut d'une falaise de 265 m de haut avec une vitesse de 45 m/s et un angle de 60°.

   a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par Justin ? (À partir du sommet de la falaise.)
   b) Quel est le temps de vol total de Justin ?
   c) Quelle est la portée de Justin ?
   d) Quelle est la vitesse (grandeur et direction) de Justin juste avant de frapper le sol ?



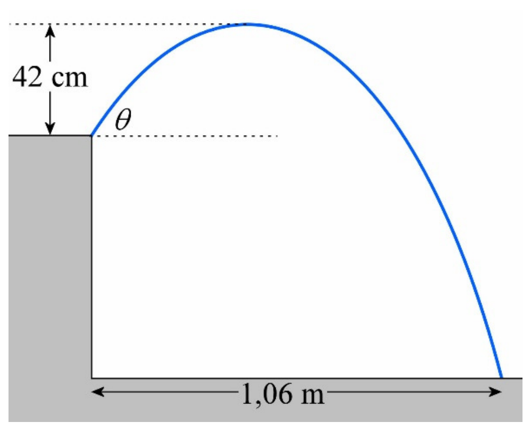
www.youtube.com/watch?v=HRFbruIXVaY

8. À quelle vitesse Alissia a-t-elle lancé le ballon pour faire un panier dans la situation représentée sur la figure ?



www.physicsforums.com/showthread.php?t=252905

9. Quels sont la vitesse initiale et l'angle θ de ce projectile si le temps de vol est de 0,5 s ?

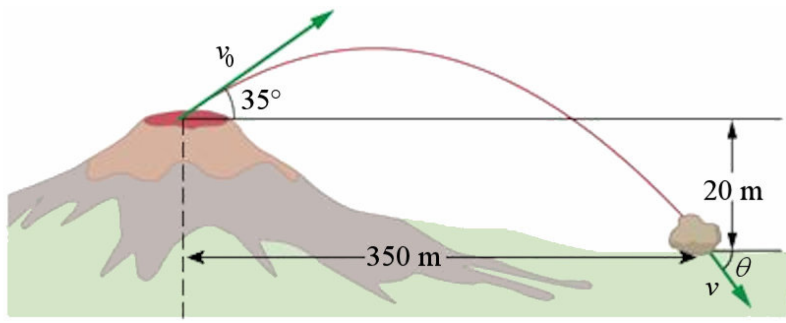


10. Ruprecht a pour mission de sauter par-dessus le canal de Corinthe avec sa moto. La moto de Ruprecht va à 126 km/h et le canal a une largeur de 70 m. On suppose que le point de départ est à la même hauteur que le point d'arrivée.

a) Quel doit être l'angle de départ de Ruprecht ?
b) Quelle est la durée du vol de Ruprecht ?

functionofarubberduck.wordpress.com/2012/10/23/the-physics-of-getting-extreme-in-sports/

11. Lors de l'explosion du volcan Arenal au Costa Rica, une pierre est projetée telle qu'illustrée sur cette figure.

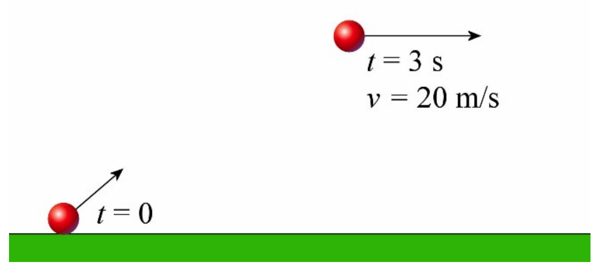


cnx.org/content/m42042/latest/?collection=col11406/latest

a) Quelle était la vitesse initiale de la pierre ?
b) Quel fut le temps de vol de la pierre ?
c) Quelle fut la hauteur maximale de la pierre, mesurée à partir de sa position de départ ?
d) Quelle était la vitesse (grandeur et direction) de la pierre juste avant de frapper le sol ?

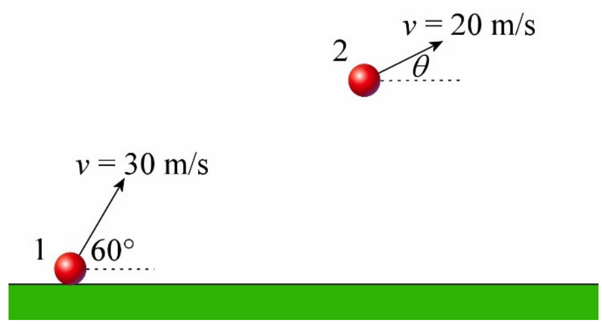
12. Un objet est lancé à partir du sol. La figure suivante donne la grandeur et la direction de la vitesse de la balle 3 secondes plus tard.

a) Quelle est la portée de la balle ?
b) Quelle est la grandeur de la vitesse initiale de la balle ?
c) Quel est l'angle de départ de la balle ?



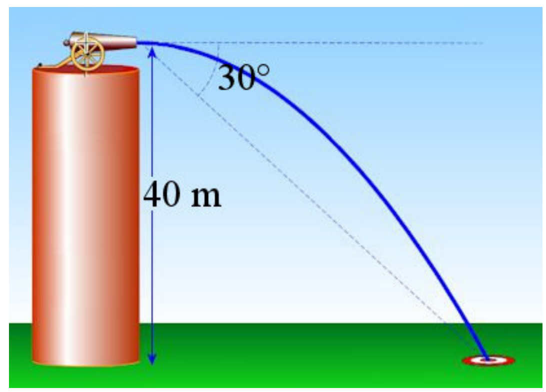
13. Un objet est lancé à partir du sol avec une vitesse de 30 m/s et un angle de 60° (position 1). Un peu plus tard (position 2), l'objet monte toujours, mais la grandeur de la vitesse n'est plus que de 20 m/s.

a) Combien de temps s'est-il écoulé pour que la pierre passe de la position 1 à la position 2 ?
b) Quelle est la distance entre la position 1 et la position 2 ?

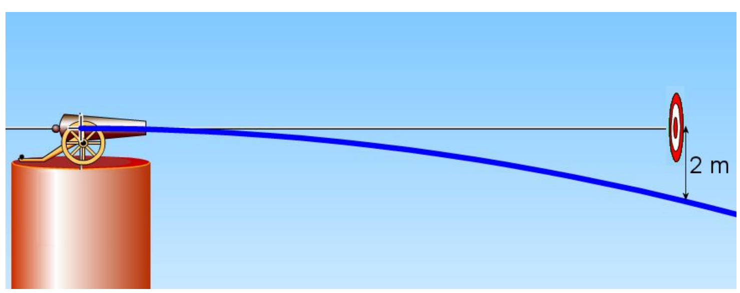


14. Dans la situation représentée sur la figure, quelle doit être la vitesse du boulet lancé par le canon pour qu'il touche la cible ? (Le canon lance le boulet à l'horizontale.)

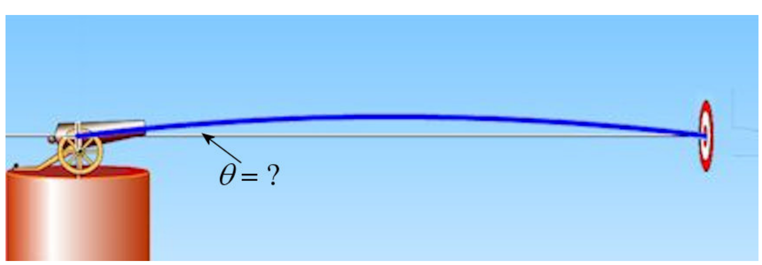
phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_en.html



15. Quand un canon tire à l'horizontale avec une vitesse de 30 m/s, le projectile passe à 2 m sous la cible.

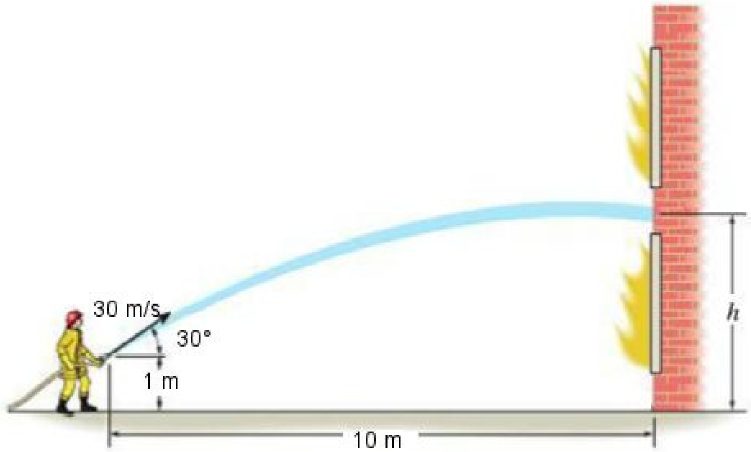


À quel angle doit-on tirer pour arriver exactement au centre de la cible ?



phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_en.html

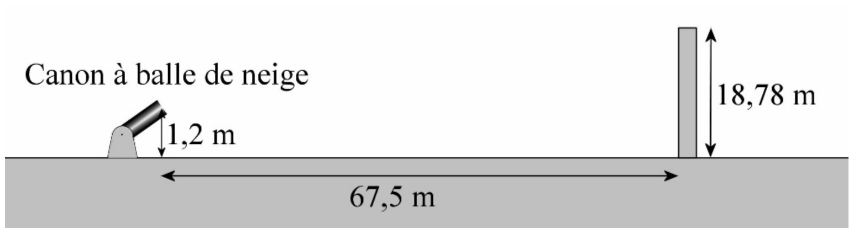
16. Dans la situation illustrée sur la figure…



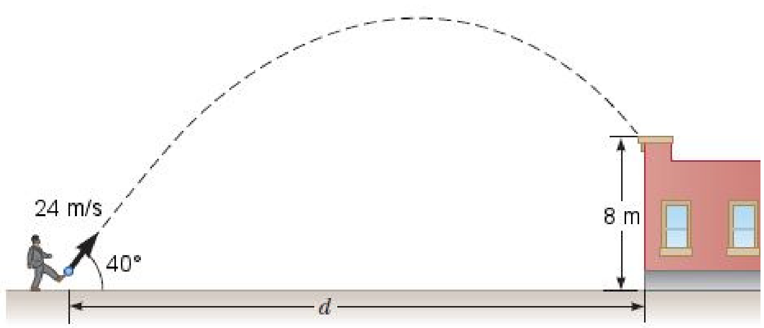
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/determine-minimum-height-wall-firefighter-project-water-hose-water-strikes-wall-horizontal-q3546033

a) à quelle hauteur l'eau heurte-t-elle le mur ?
b) à quelle vitesse (grandeur et direction) l'eau frappe-t-elle le mur ?

17. Un canon à balle de neige lance des boules de neige avec une vitesse de 20 m/s et un angle de 35°. La balle va-t-elle tomber devant le mur, frapper le mur ou passer par-dessus le mur ?



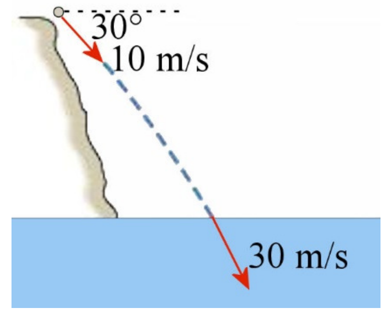
18. Jules botte un ballon avec une vitesse de 24 m/s et un angle de 40°. Le ballon frappe alors le bord du toit d'un édifice de 8 m de haut. Quelle est la distance entre Jules et l'édifice ?



mathhelpforum.com/advanced-math-topics/126866-solved-physics-projectile-motion-vectors.html

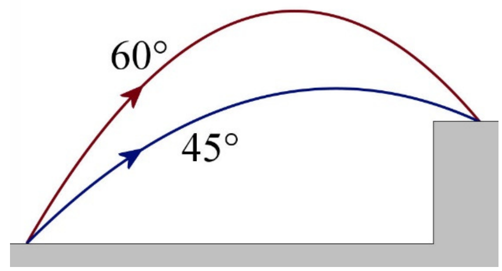
(Notez que la trajectoire montrée sur la figure n'est pas nécessairement la vraie trajectoire. Le ballon pourrait être en train de monter quand il frappe le toit.)

19. On lance une pierre du haut d'une falaise. Quelle est la hauteur de la falaise si les vitesses en haut et en bas de la falaise sont celles données par cette figure ?

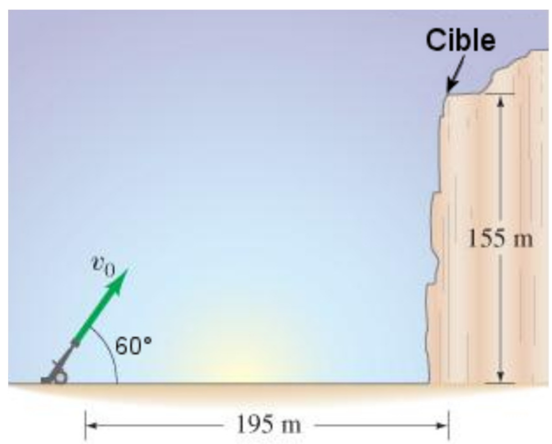


demo.webassign.net/ebooks/cj6demo/pc/c03/read/main/c03x3_3.htm

20. Deux projectiles ont été lancés de la même place avec la même vitesse de 50 m/s. Un des projectiles a été lancé avec un angle de 60° et l'autre projectile a été lancé avec un angle de 45°. Toutefois, les deux projectiles sont arrivés au même endroit en haut d'une falaise. Quelle est la hauteur de la falaise ?

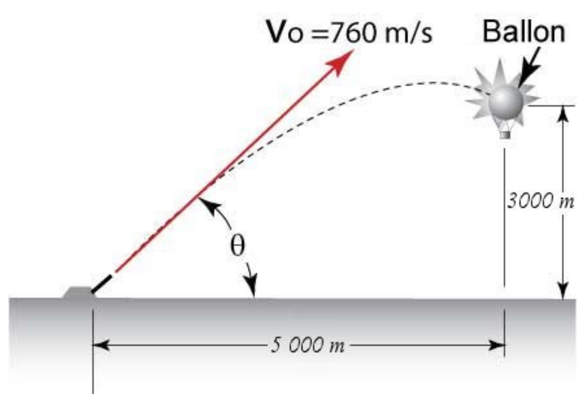


21. À quelle vitesse doit tirer ce canon pour toucher la cible ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/projectile-launched-ground-level-cliff -195-away -155-high-figure--projectile-lands-cliff-41-q1444842

22. Avec quel angle doit-on lancer ce projectile pour toucher le ballon ?



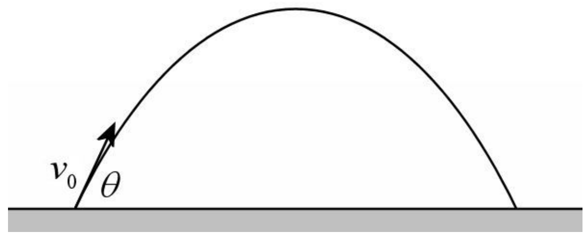
www.intuitor.com/student/AntiBalloonProblem.php

23. Quand on lance un projectile avec un angle de 28° il retombe à 40 m de son point de départ, à la même hauteur. À quelle distance du point de départ tomberait un projectile si on le lançait à la même vitesse, mais avec un angle de 32° (il retombe encore à la même hauteur) ?

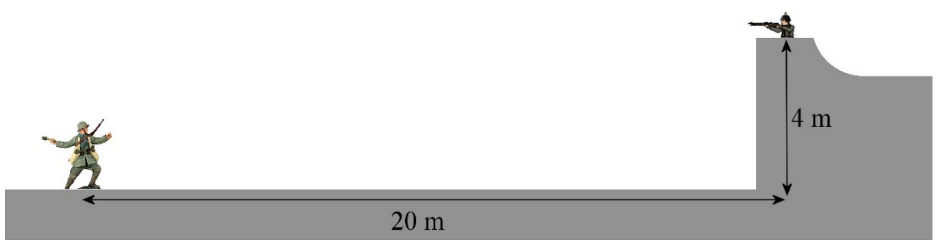
24. Un projectile retombe à la même hauteur qu'il a été lancé. Sachant que la portée est de 40 m et que la hauteur maximale atteinte par le projectile fut de 15 m, trouvez l'angle de départ du projectile.

Indice pour résoudre :

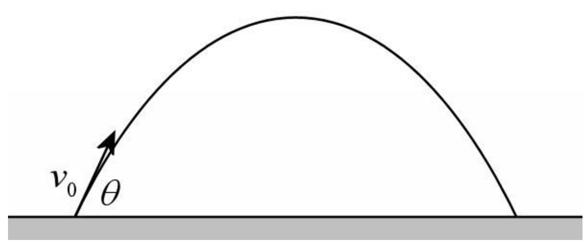
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$



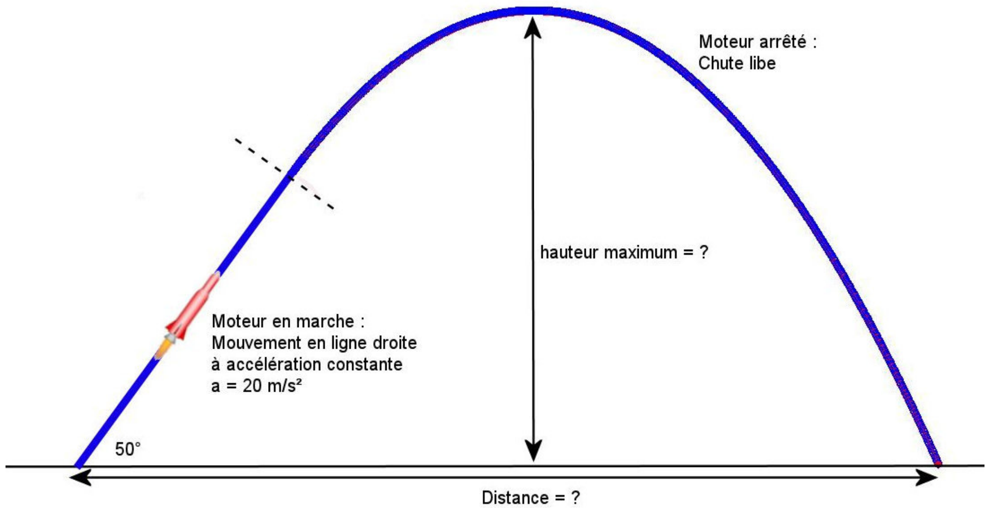
25. Klaus doit lancer une grenade sur une position ennemie située à la position montrée sur la figure. Quand il lance la grenade, elle explose 2 secondes plus tard. À quelle vitesse et à quel angle doit-il lancer la grenade pour qu'elle explose immédiatement en arrivant sur la position ennemie ?



26. Un projectile retombe à la même hauteur qu'il a été lancé. Le projectile est passé à la hauteur h à t = 1 s et t = 5 s. Quelle est la valeur de h ?



27. Une fusée initialement au repos décolle avec un angle de 50°. Tant que le moteur fonctionne, la fusée fait un mouvement en ligne droite avec une accélération de 20 m/s². Au bout de 20 secondes, le moteur s'arrête et la fusée est maintenant en chute libre.

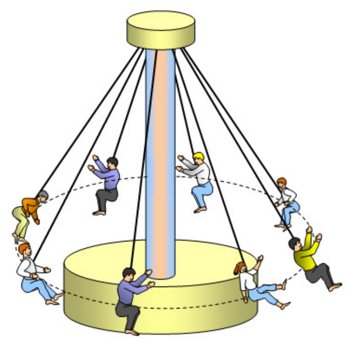


a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la fusée ?
b) Quel est le temps de vol total de la fusée ?
c) À quelle distance de son point de départ la fusée retombe-t-elle ?

2.4 Le mouvement circulaire uniforme

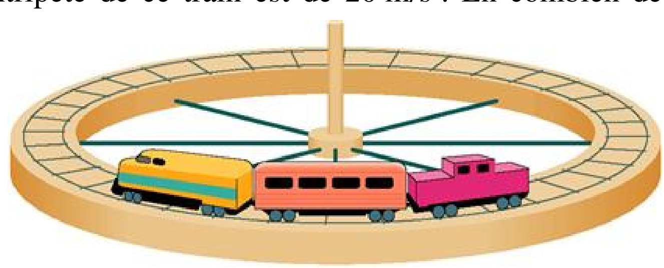
28. La Lune tourne autour de la Terre avec une vitesse de 1024 m/s. Le rayon de l'orbite de la Lune est de 384 400 km. Quelle est la grandeur de l'accélération centripète de la Lune ?

29. Les enfants de ce manège font un tour en 5 s. Si la circonférence du cercle est de 50 m, quelle est la grandeur de l'accélération centripète des enfants ?



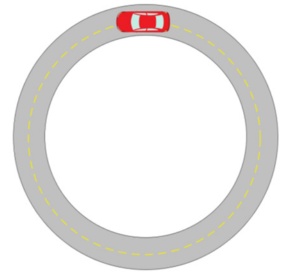
www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Mechanics/Circular%20motion/text/Fairground_rides/index.html

30. Un train électrique se déplace à vitesse constante sur une piste circulaire. La grandeur de l'accélération centripète de ce train est de 20 m/s². En combien de temps le train fera-t-il 50 tours si la piste a un diamètre de 1 m ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2011-november-07

31. Cette auto se déplace avec une vitesse constante de 36 m/s sur une piste circulaire. Quelle est la grandeur de son accélération centripète si la voiture fait le tour de la piste en 24 s ?



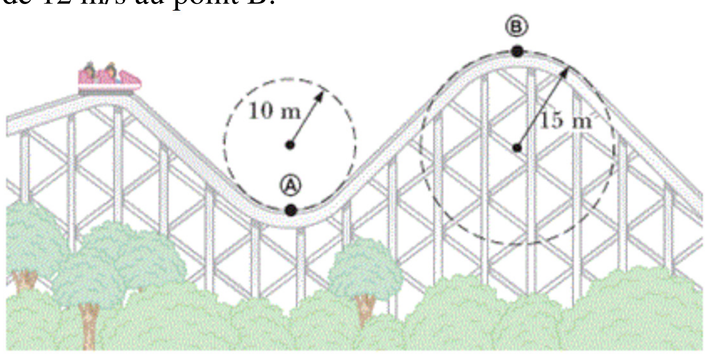
fr.depositphotos.com/2577683/stock-illustration-Car.html

32. Montrez que l'accélération centripète dans un mouvement circulaire uniforme peut aussi se calculer avec la formule suivante.

$$a_c = \frac{2\pi v}{T}$$

2.5 Le mouvement circulaire non uniforme

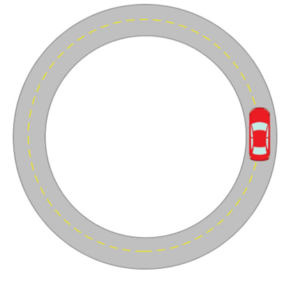
33. Le charriot de montagnes russes de cette figure se déplace à une vitesse de 20 m/s au point A et de 12 m/s au point B.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2011-october-14

Quelles sont la grandeur et la direction de l'accélération centripète du charriot aux points A et B ?

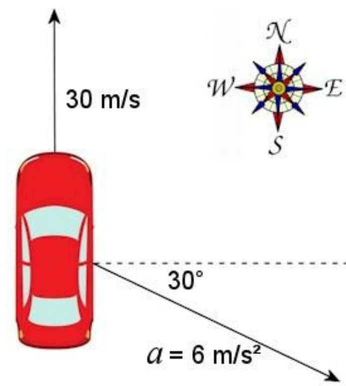
34. La voiture montrée sur cette piste de 100 m de diamètre a une vitesse initiale de 90 km/h. La voiture freine de sorte qu'elle s'arrête en faisant 2 tours de piste avec une accélération tangentielle constante.



a) Quelle est la grandeur de l'accélération tangentielle de la voiture ?
b) Quelles sont la grandeur et la direction de l'accélération centripète après que la voiture ait fait un tour de piste ?
c) Quelles sont la grandeur et la direction de l'accélération après que la voiture ait fait un tour ? (Pour la direction, donner l'angle entre la vitesse et l'accélération.)

35. Une voiture se dirige vers le nord à 30 m/s. L'accélération de la voiture est montrée sur la figure.

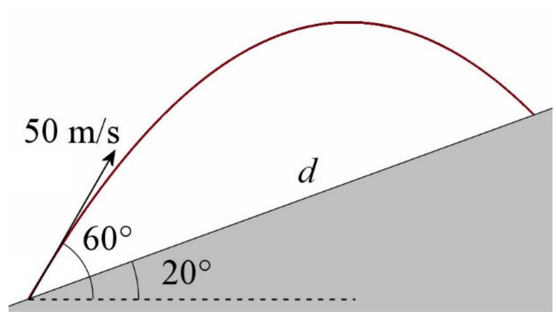
a) Est-ce que la vitesse de cette voiture augmente ou diminue ?
b) Quelle est l'accélération tangentielle ?
c) Est-ce que cette voiture tourne vers l'est ou vers l'ouest ?
d) Quel est le rayon de courbure de la route ?



Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

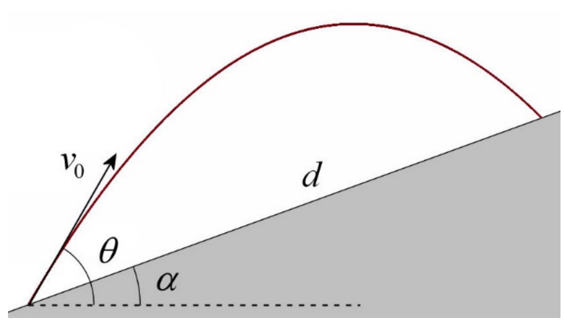
36. Quelle est la valeur de d dans cette situation ?



37. On lance un objet sur une pente. Montrez que pour atteindre la plus grande distance sur la pente, on doit avoir

$$\theta = \frac{1}{2}\left(90° + \alpha\right)$$

et que la distance atteinte est alors



$$d_{\max} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{v_0^2}{g}$$

N. B. : Ces identités vous seront peut-être utiles.

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

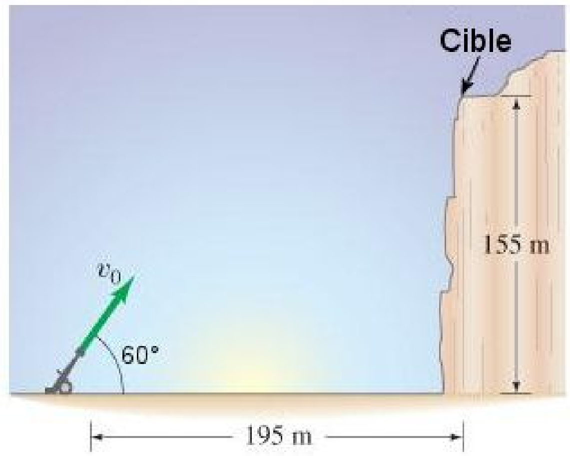
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

38. On veut atteindre l'endroit indiqué sur la figure avec un projectile.

a) Quelle est la vitesse minimale qui permet d'atteindre cet endroit ?
b) À quel angle doit-on lancer le projectile à cette vitesse minimale ?

Indice pour résoudre :

$$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/projectile-launched-ground-level-top-cliff-195-m-away-155m-high-see-figure--projectile-lan-q1496717

RÉPONSES

2.2 Les lois de la cinématique à deux dimensions

1. a) $\vec{v} = \left(4\vec{i} + 3\vec{j}\right)\frac{m}{s}$ b) $\vec{a} = \left(-11,495\vec{i} + 4,91\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}$
2. a) $\overrightarrow{\Delta r} = \left(-1,5\times10^{11}\vec{i} + 1,5\times10^{11}\vec{j}\right)m$ b) 2,356 2 x 10^{11} m

   c) $\vec{v} = \left(-19013\vec{i} + 19013\vec{j}\right)\frac{m}{s}$ d) $\vec{a} = \left(-0,0038\vec{i} - 0,0038\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}$
3. a) 7,21 m/s à 123,7° b) 6 m/s² à 180°
4. $\vec{r} = \left(24,5\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}\right)m$
5. $\vec{a} = \left(10,5\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}\right)\frac{m}{s^2}$

2.3 Le projectile

6. a) 5,407 s b) 35,82 m c) 229,3 m
7. a) 77,49 m au-dessus de son point de départ b) 12,34 s c) 277,6 m
   d) 85,0 m/s à -74,6°
8. 10,67 m/s
9. 3,57 m/s à 53,5°
10. a) 17,03° b) 2,09 s
11. a) 58,09 m/s b) 7,355 s c) 56,65 m d) 61,37 m/s à -39,16°
12. a) 120 m b) 35,56 m/s c) 55,8°
13. a) 1,301 s b) 32,11 m
14. 24,25 m/s
15. 6,02° ou 83,98°
16. a) 6,048 m b) 28,3 m/s à 23,4°

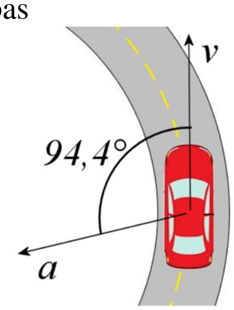
17. Elle tombe devant le mur
18. 12,04 m ou 45,85 m
19. 40,82 m
20. 50,04 m
21. 63,86 m/s
22. 33,46° ou 87,50°
23. 43,37 m
24. 56,3°
25. 15,47 m/s à 49,72°
26. 24,5 m
27. a) 7855 m b) 91,3 s c) 20 905 m

2.4 Le mouvement circulaire uniforme

28. 0,002 728 m/s²
29. 12,57 m/s²
30. 49,67 s
31. 9,425 m/s²
32. Voir la preuve dans le solutionnaire

2.5 Le mouvement circulaire non uniforme

33. Point A : 40 m/s² vers le haut Point B : 9,6 m/s² vers le bas
34. a) 0,497 4 m/s² dans la direction opposée à la vitesse de la voiture b) 6,25 m/s² vers le centre du cercle
    c) 6,27 m/s² à 94,4° de la vitesse (voir figure)



35. a) elle ralentit b) -3 m/s² c) vers l'est
    d) 173,2 m

Défis

36. 185,7 m
37. a) 62,93 m/s b) 64,24°