1 LA CINÉMATIQUE

Alphonse et Bertrand participent à une course de voiture. Leurs voitures sont initialement au repos à la ligne de départ. La voiture d'Alphonse a une accélération de 5 m/s² jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse maximale de 30 m/s. La voiture de Bertrand a une accélération de 3 m/s² jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse maximale de 42 m/s. Où et quand la voiture de Bertrand va-t-elle rattraper celle d'Alphonse ?

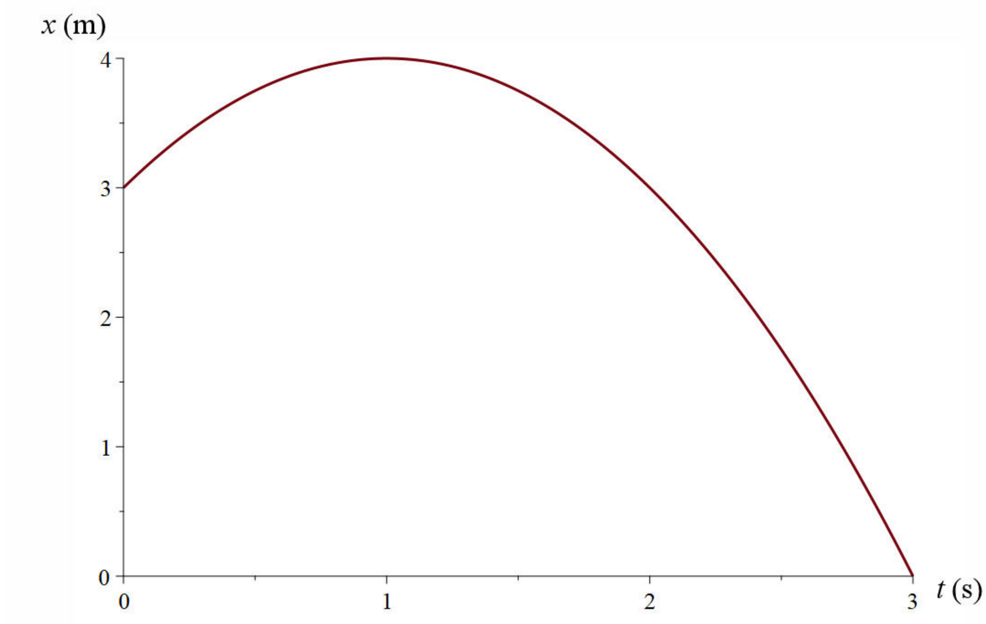
www.dragracingonline.com/raceresults/2008/x_7-spectacular-3.html

Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

1.1 QU'EST-CE QUE LA CINÉMATIQUE ?

La cinématique est la branche de la physique qui décrit le mouvement des objets. Par exemple, on peut donner la position en fonction du temps à l'aide d'une formule telle que $x = (3 + 2t - t^2)$ m pour décrire un mouvement.

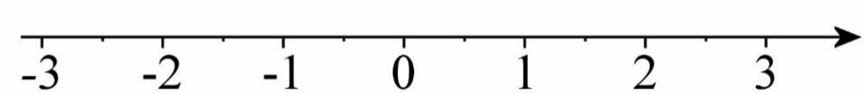
Il existe en fait toute une variété de possibilités de façon de décrire le mouvement puisqu'on pourrait, par exemple, donner la vitesse en fonction du temps ou en fonction de la position. On pourrait aussi donner un graphique de la position ou de la vitesse en fonction du temps. Avec la formule donnée précédemment, on a le graphique suivant pour la position en fonction du temps.



Cette branche de la physique est une des plus anciennes puisque les équations décrivant le mouvement d'un objet qui a une accélération constante datent du 14e siècle.

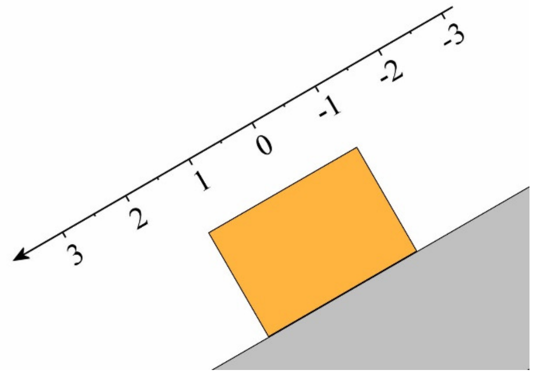
1.2 LA POSITION, LA DISTANCE ET LE DÉPLACEMENT

Dans ce chapitre, nous étudierons le mouvement en une dimension, c'est-à-dire le mouvement des objets qui se déplacent en ligne droite. Pour donner la position le long de cette ligne, nous allons bien sûr utiliser un axe.



Les valeurs de x augmentent en allant vers la droite, mais on pourrait très bien choisir un axe des x avec des valeurs qui augmentent à mesure qu'on va vers la gauche. L'axe peut aussi prendre n'importe quelle orientation. Par exemple, on utilise un axe vertical si on veut décrire un mouvement de chute libre. Les valeurs de la position pourraient augmenter à mesure qu'on monte ou augmenter à mesure qu'on descend. On pourrait alors noter la position avec le symbole *y*, quoiqu'il serait correct de continuer de l'appeler *x*.

L'axe pourrait également être incliné, par exemple, si on voulait décrire le mouvement d'un objet qui descend le long d'un plan incliné.



Il restera simplement à décider où est l'origine $x = 0$. Très souvent, on met le $x = 0$ à la position initiale de l'objet.

Le **déplacement** de l'objet est simplement le changement de position de l'objet. Si l'objet est au départ à la position $x_1$et que, plus tard, il est la position x_2, alors le déplacement est

Déplacement

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

La **distance parcourue** est la longueur totale du trajet par lequel est passé l'objet pour aller d'un endroit à un autre. Ainsi, si on lance un objet à une hauteur de 20 m et qu'on le rattrape, la distance parcourue par l'objet est de 40 m alors que le déplacement est nul puisqu'on est revenu à la position de départ. Pour le déplacement, on regarde uniquement les positions initiale et finale. Ce qui s'est passé entre ces deux instants n'a aucune importance. Cette distance est souvent notée Δs (ou Δx quand elle est identique au déplacement).

1.3 LA VITESSE MOYENNE

Définition de la vitesse moyenne

La vitesse moyenne est définie comme étant le déplacement divisé par le temps qui s'est écoulé durant ce déplacement.

Vitesse moyenne

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

À ne pas confondre avec la vitesse scalaire moyenne qui est la distance parcourue *s* divisée par le temps

$$\text{vitesse scalaire moyenne} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Exemple 1.3.1

Un objet se déplace sur l'axe des x. Il va de $x = 0$ m à $x = 50$ m en 5 secondes puis va de $x = 50$ m à $x = -10$ m en 15 secondes.

a) Quel est le déplacement de cet objet ?

Le déplacement est

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1\\ &= -10m - 0m\\ &= -10m\end{aligned}$$

b) Quelle est la distance parcourue par cet objet ?

L'objet a fait 50 m vers la droite puis 60 m vers la gauche. On a donc $\Delta s = 110$ m.

c) Quelle est la vitesse moyenne de cet objet ?

La vitesse moyenne est

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t}\\ &= \frac{-10m}{20s}\\ &= -0,5\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

d) Quelle est la vitesse scalaire moyenne ?

La vitesse scalaire moyenne est

$$\begin{aligned}\text{vitesse scalaire moyenne} &= \frac{\Delta s}{\Delta t}\\ &= \frac{110m}{20s}\\ &= 5,5\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

Exemple 1.3.2

Conrad part de Québec pour se rendre à Montréal en auto. Il parcourt les 125 premiers kilomètres à une vitesse moyenne de 100 km/h, puis les 125 derniers kilomètres à une vitesse moyenne de 80 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne ?

C'est tentant de dire 90 km/h, mais ce n'est pas la bonne réponse. Faisons correctement la solution en calculant

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

On doit donc trouver le déplacement total et la durée totale du trajet.

Le déplacement est facile à trouver.

$$\begin{aligned}\Delta x &= 125km + 125km \\ &= 250km\end{aligned}$$

Il y a par contre un peu plus de calculs à faire pour trouver le temps que prend Conrad pour aller à Montréal. En prenant l'équation de la vitesse moyenne pour la première partie, on trouve la durée de cette partie.

$$\begin{aligned}\overline{v}_1 &= \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \\ 100\tfrac{km}{h} &= \frac{125km}{\Delta t_1} \\ \Delta t_1 &= 1,25h\end{aligned}$$

En prenant l'équation de la vitesse moyenne pour la deuxième partie, on trouve la durée de cette partie.

$$\begin{aligned}\overline{v}_2 &= \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \\ 80\tfrac{km}{h} &= \frac{125km}{\Delta t_2} \\ \Delta t_2 &= 1,5625h\end{aligned}$$

La durée totale du voyage est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= 1,25h + 1,5625h \\ &= 2,8125h\end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{250km}{2,8125h} \\ &= 88,89\tfrac{km}{h}\end{aligned}$$

Vous pouvez voir que deux unités acceptables pour la vitesse sont des m/s et des km/h. En fait, plusieurs unités sont possibles, pourvu que ce soit toujours une unité de distance divisée par une unité de temps. Ainsi, des mm/jours seraient tout à fait acceptables comme unité de vitesse.

Mais comment peut-on passer d'une unité à l'autre ? Voici comment on passerait de km/h à m/s.

$$45\tfrac{km}{h} = 45\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{1000m}{1\cancel{km}} \times \frac{1\cancel{h}}{3600s} = 12,5\tfrac{m}{s}$$

On commence par changer les km en m avec la première multiplication, qui vaut 1 en fait puisque 1000 m et 1 km, c'est pareil. Les km sont en bas de la division pour éliminer les km de l'unité de départ. On change ensuite les h en s avec la deuxième multiplication, qui vaut aussi 1 puisque 1 h et 3600 s, c'est pareil. Cette fois-ci, les h sont en haut de la fraction pour éliminer les h de l'unité de départ. Remarquer qu'avec les unités qui s'annulent, il ne reste que des m/s.

Exemple 1.3.3

La position d'un objet est donnée par la formule $x = 3m + 2\tfrac{m}{s} \cdot t - 1\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$. Quelle est la vitesse moyenne entre t = 0 s et t = 1 s ?

La vitesse moyenne est

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Il faut donc trouver les positions à t = 0 s et t = 1 s.

À t = 0 s, la position est

$$\begin{aligned} x_1 &= 3m + 2\tfrac{m}{s} \cdot 0s - 1\tfrac{m}{s^2} \cdot (0s)^2 \\ &= 3m \end{aligned}$$

À t = 1 s, la position est

$$\begin{aligned} x_2 &= 3m + 2\tfrac{m}{s} \cdot 1s - 1\tfrac{m}{s^2} \cdot (1s)^2 \\ &= 4m \end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc

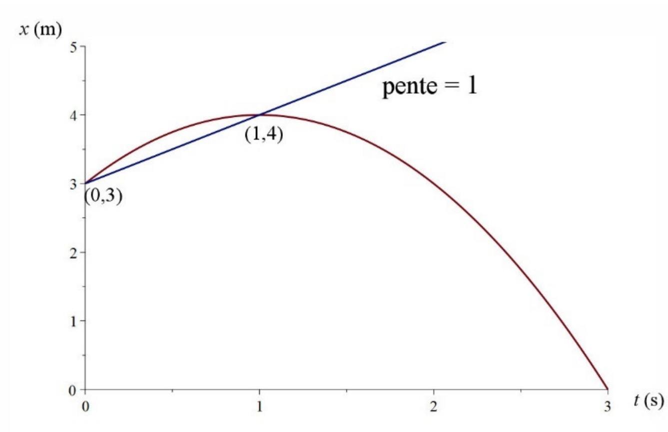
$$\begin{aligned} \overline{v} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \\ &= \frac{4m - 3m}{1s} \\ &= 1\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse moyenne sur le graphique de la position

Sur un graphique de la position en fonction du temps, la vitesse moyenne

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

représente la pente de la droite qui relie les points qui correspondent aux temps entre lesquels on veut savoir la vitesse moyenne. Prenons l'exemple précédent pour illustrer ce que cela veut dire.



Puisqu'on voulait la vitesse moyenne entre $t = 0$ s et $t = 1$ s, on doit utiliser la position de l'objet à ces deux instants sur le graphique. Nos deux points importants sont donc (0,3) et (1,4). La vitesse moyenne représente la pente de la droite reliant ces deux points.

1.4 LA VITESSE INSTANTANÉE

Définition de la vitesse instantanée

Tout au long d'un déplacement, la vitesse peut varier. Comme dans un exemple précédent, on avait une vitesse moyenne de 88,89 km/h, mais notre vitesse avait varié durant le trajet. On pourrait aussi aller à Montréal en ayant une vitesse variant constamment, par exemple en allant toujours de plus en plus vite. Comment alors savoir notre vitesse à un moment précis de la trajectoire ?

Pour y arriver, il faut calculer la vitesse de la même façon que celle utilisée pour calculer la vitesse moyenne, mais en prenant un temps très court, de sorte que la vitesse n'ait pas le temps de changer. Mais quel temps est suffisamment petit ? Est-ce qu'une seconde c'est assez court ? Pour une auto, ça peut sembler correct sauf que la vitesse d'une voiture peut changer très rapidement lors d'un freinage intense et encore plus lors d'un accident. Il faudrait donc un temps encore plus court. Peut-être un milliardième de seconde ? Pour une auto, c'est surement bon, mais c'est trop long pour des particules, comme des électrons qui peuvent changer de vitesse très rapidement.

En fait, pas besoin de trouver ce temps très petit qui pourrait s'adapter à toutes les situations puisque ce temps très court existe en mathématique : c'est une durée de temps infinitésimale. En prenant cette valeur, on obtient, pour la vitesse instantanée,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ce qui est

Vitesse instantanée

$$v = \frac{dx}{dt}$$

À partir de maintenant, quand on parle simplement de « vitesse », on veut dire « vitesse instantanée ».

Exemple 1.4.1

La position d'un objet est donnée par la formule $x = 3m + 2\frac{m}{s} \cdot t - 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2$. Quelle est sa vitesse à $t = 2$ s ?

Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d\left(3m + 2\frac{m}{s} \cdot t - 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2\right)}{dt} \\ &= 2\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot t \end{aligned}$$

La vitesse à $t = 2$ s est donc

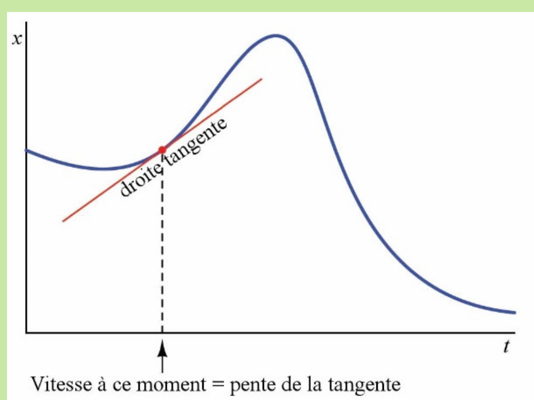
$$\begin{aligned} v &= 2\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot 2s \\ &= -2\frac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse instantanée sur le graphique de la position

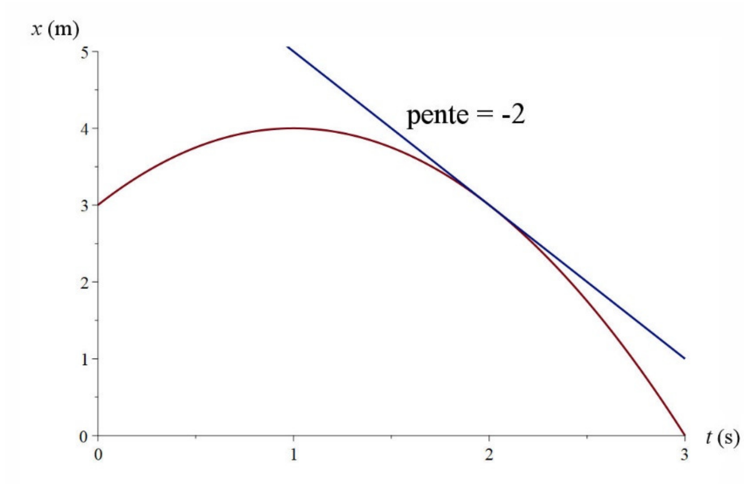
La vitesse instantanée est la dérivée de la position. Comme la dérivée est la pente, on arrive à la conclusion suivante.

Sur un graphique de la **position** d'un objet en fonction du temps, la pente de la tangente est la vitesse de l'objet.

control.com/textbook/calculus/how-derivatives-and-integrals-relate-to-one-another/



Voici la représentation graphique de la vitesse instantanée de l'exemple précédent. La vitesse à $t = 2$ s est la pente de la tangente à ce moment.



Le déplacement sur le graphique de la vitesse

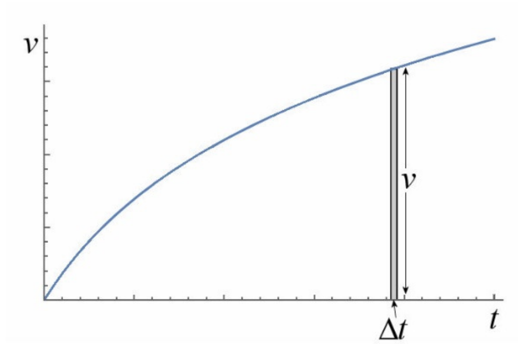
On peut trouver le déplacement d'un objet à partir de la vitesse. Comme on a

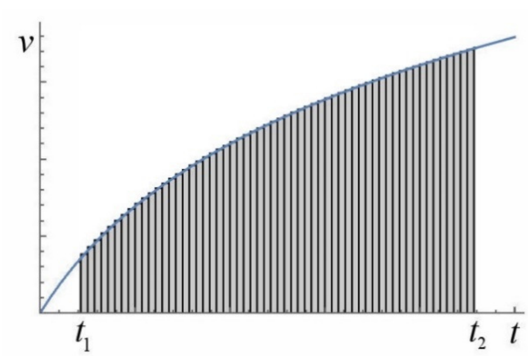
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

où Δt est très petit, on peut calculer le déplacement pendant un petit temps Δt. Ce déplacement est

$$\Delta x = v\Delta t$$

Graphiquement, $v\Delta t$ est l'aire d'un rectangle très mince, comme sur la figure de droite.

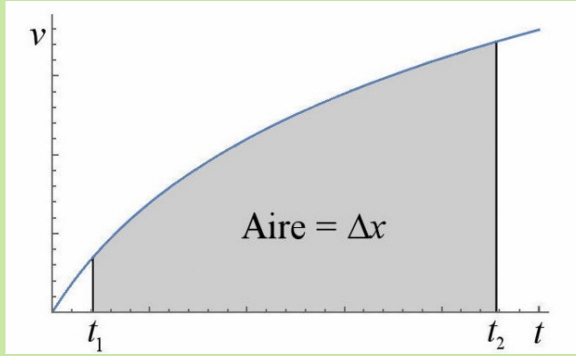




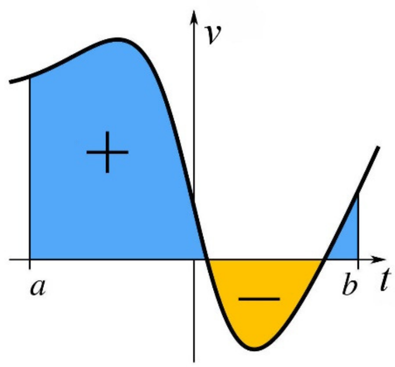
L'aire de ce petit rectangle est seulement le déplacement pendant un petit temps Δt. Si on veut connaitre le déplacement total entre les temps t_1 et t_2, on doit additionner tous les petits déplacements, donc toutes les aires des petits rectangles entre ces deux temps.

La somme des aires de ces rectangles donne l'aire sous la courbe. (L'aire ne semble pas exactement la même puisqu'il y a des petits bouts de rectangles qui dépassent ou qui manquent, mais ces petits bouts ne sont pas là en réalité puisque nos rectangles sont très très minces.)

Sur un graphique de la **vitesse** en fonction de temps, l'aire sous la courbe est égale au déplacement.

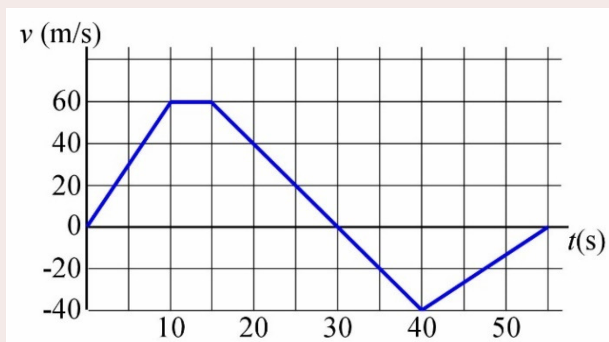


Attention : quand l'aire est sous l'axe du temps, elle a une valeur négative.

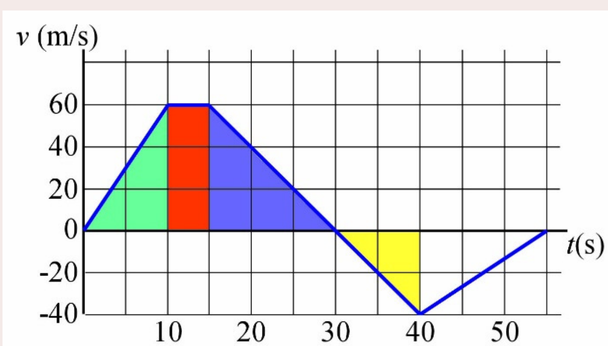


Exemple 1.4.1

Voici le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet. Quel est le déplacement entre $t = 0$ s et $t = 40$ s ?



Pour trouver le déplacement, il faut calculer l'aire sous la courbe entre $t = 0$ s et $t = 40$ s.



Séparons l'aire en plusieurs parties pour y arriver.

On a premièrement un triangle (en vert). L'aire est 300 m.

On a ensuite un rectangle (en rouge). L'aire est 300 m.

On a ensuite un triangle (en bleu). L'aire est 450 m.

On a finalement un autre triangle (en jaune). L'aire est 200 m.

(On arrête là puisqu'on demandait le déplacement entre 0 et **40 s.**)

Le déplacement total est donc 300 m + 300 m + 450 m – 200 m = 850 m.

On a compté la dernière aire comme étant négative puisqu'elle est sous l'axe du temps. C'est normal de la compter comme un déplacement négatif, car la vitesse est alors négative.

Remarquez que si on prend toutes les aires comme étant positives même lorsqu'elles sont sous l'axe du temps, on obtient la distance parcourue.

1.5 LE MOUVEMENT À VITESSE CONSTANTE

Les équations du mouvement

Examinons ce qui arrive si la vitesse est une constante. Comme on sait que

$$v = \frac{dx}{dt}$$

on peut trouver la position en fonction du temps en se demandant ce qu'il aurait fallu dériver pour obtenir la constante v. De toute évidence, c'est

$$x = vt + cst$$

On peut trouver la valeur de la constante en disant que la position au temps t = 0 s est la position initiale (qui sera notée x_0). Si on met ces valeurs dans l'équation, on a alors

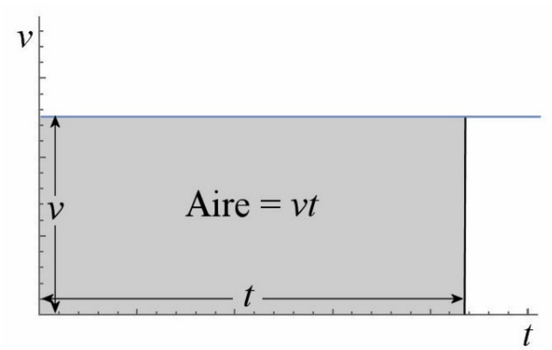
$$x_0 = v \cdot 0 + cst$$

et donc que $cst = x_0$. On a alors

Équation du mouvement si la vitesse est constante

$$x = x_0 + vt$$

On peut aussi arriver à cette équation à l'aide d'un graphique. Pour un mouvement à vitesse constante, le graphique de la vitesse est une droite horizontale.



On sait alors que le déplacement entre t = 0 et le temps t est donnée par l'aire montrée sur la figure de droite.

Comme l'aire est celle d'un rectangle, on a

$$\Delta x = vt$$
$$x - x_0 = vt$$
$$x = x_0 + vt$$

C'est la même équation que celle obtenue précédemment.

Notez qu'avec cette équation, on revient à

$$x_0 + vt = x$$
$$vt = x - x_0$$
$$v = \frac{x - x_0}{t}$$
$$v = \frac{\Delta x}{t}$$

qui est la même formule que la formule de la vitesse moyenne. Quand la vitesse est constante, cette vitesse est égale à la vitesse moyenne.

Exemple 1.5.1

Combien faut-il de temps pour faire une distance de 200 km à une vitesse constante de 80 km/h ?

En posant que x_0 = 0 km et que x = 200 km, on a

$$x = x_0 + vt$$
$$200km = 0km + 80\tfrac{km}{h} \cdot t$$
$$t = \frac{200km}{80\tfrac{km}{h}}$$
$$t = 2{,}5h$$

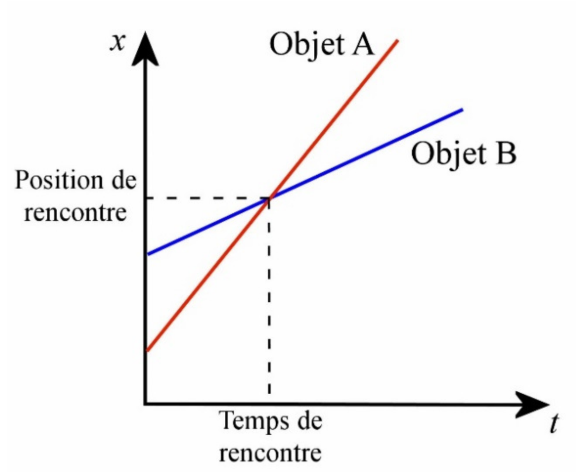
Notez que dans cette formule x_0 est toujours la position à t = 0 et x est toujours la position au temps t.

Quand deux objets vont-ils être à la même place ?

Dans les problèmes de cinématique, on demande souvent quand deux objets vont être à la même position en demandant quand ils vont entrer en collision ou quand un objet A va rattraper un objet B. Le truc est bien simple : quand un objet en rattrape un autre ou qu'il y a collision, les deux objets sont à la même place, ce qui signifie que vous n'avez alors qu'à poser l'équation $x_A = x_B$ et résoudre.

Notez que graphiquement, cela revient à chercher le point de croisement des droites de la position en fonction du temps des deux objets.

Voyons ce qu'on obtient pour deux objets allant à vitesse constante. Deux objets, à une distance L l'un de l'autre, se déplacent à des vitesses différentes. On cherche quand ils seront au même endroit, donc quand $x_1 = x_2$.



fr.depositphotos.com/2577683/stock-illustration-Car.html

La position de l'objet 1 est

$$x_1 = 0 + v_1 t$$

(On a placé l'origine $x = 0$ à la position initiale de l'objet 1.) La position de l'objet 2 (qui est toujours celui qui a une valeur de x plus élevée) est

$$x_2 = L + v_2 t$$

Quand ils sont à la même position, on a

$$x_1 = x_2$$
$$v_1 t = L + v_2 t$$
$$(v_1 - v_2) t = L$$

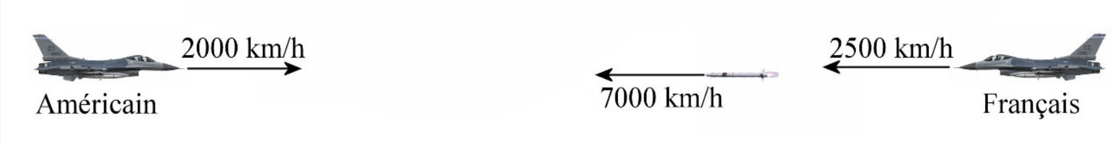
Ce qui nous donne

Moment où deux objets initialement distants de L sont à la même place s'ils se déplacent à vitesse constante.

$$t = \frac{L}{v_1 - v_2}$$

Exemple 1.5.2

Un avion français et un avion américain se dirigent l'un vers l'autre. La vitesse de l'avion français est de 2500 km/h et la vitesse de l'avion américain est de 2000 km/h. Quand ils sont à 6000 m l'un de l'autre, l'avion français envoie un missile vers l'avion américain.



Combien faudra-t-il de temps pour que le missile arrive à l'avion américain si la vitesse du missile est de 7000 km/h ?

L'avion américain est l'objet 1 et que le missile est l'objet 2. On a donc

$$v_1 = 2000 \tfrac{km}{h}$$
$$v_2 = -7000 \tfrac{km}{h}$$

En m/s, ces vitesses sont

$$v_1 = 555,6 \tfrac{m}{s}$$
$$v_2 = -1944,4 \tfrac{m}{s}$$

Le temps de rencontre est donc

$$\begin{aligned} t &= \frac{L}{v_1 - v_2} \\ &= \frac{6000m}{555,6 \tfrac{m}{s} - -1944,4 \tfrac{m}{s}} \\ &= 2,4s \end{aligned}$$

Que faire si la vitesse change ?

Même si la vitesse change, il est possible de résoudre le problème avec les équations pour une vitesse constante si la vitesse change par coup, c'est-à-dire qu'elle est constante pour un certain temps puis qu'elle change soudainement pour une autre valeur constante qu'elle gardera pour un certain temps. Il peut y avoir autant de changements qu'on veut.

Dans ce cas, on fait le problème par parties. La première partie est le mouvement avec la vitesse constante qu'il y a au départ, la deuxième partie est celle avec la deuxième vitesse constante et ainsi de suite… La valeur de la position à la fin de la première partie devient alors la position initiale de la deuxième partie.

Exemple 1.5.3

Une voiture va à 35 m/s pendant 200 secondes, puis va à 20 m/s pendant 100 secondes. Quel est le déplacement de la voiture pendant ces 300 secondes ?

Séparons ce problème en deux parties où la vitesse est constante. Dans la première partie, la voiture se déplace à 35 m/s pendant 200 s. Posons que la position de départ est l'origine de notre axe. On a donc x_0 = 0 m. La position à la fin de cette première partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ &= 0m + 35\tfrac{m}{s}\cdot 200s \\ &= 7000m \end{aligned}$$

Dans la deuxième partie, la voiture se déplace à 20 m/s pendant 100 s et sa position initiale est la position finale de la première partie. On a donc x_0 = 7000 m. La position à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + vt \\ &= 7000m + 20\tfrac{m}{s}\cdot 100s \\ &= 9000m \end{aligned}$$

Le déplacement total de la voiture est donc

$$\Delta x = 9000m - 0m = 9000m$$

1.6 L'ACCÉLÉRATION

L'accélération moyenne

L'accélération nous indique si la vitesse d'un objet varie. Elle nous dit de combien la vitesse change à chaque unité de temps. L'accélération moyenne est définie par

Accélération moyenne

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Les unités SI de l'accélération sont des $\frac{m/s}{s}$, que l'on peut écrire m/s².

Si un objet a une accélération moyenne de 3 m/s², alors cela signifie qu'en moyenne sa vitesse augmente de 3 m/s chaque seconde.

Exemple 1.6.1

Voici la vitesse d'un objet à deux moments. Quelle est son accélération moyenne entre ces deux moments ?

À t = 0 s, v = 0 m/s.
À t = 2 s, v = 10 m/s vers la droite.

L'accélération moyenne est

$$\begin{aligned}\overline{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{10\frac{m}{s} - 0\frac{m}{s}}{2s} \\ &= 5\frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'exemple suivant montre qu'il faut faire attention au signe de la vitesse quand on calcule l'accélération moyenne.

Exemple 1.6.2

Voici la vitesse d'un objet à deux moments. Quelle est son accélération moyenne entre ces deux moments ?

À t = 0 s, v = 10 m/s vers la gauche.
À t = 20 s, v = 50 m/s vers la gauche.

L'accélération moyenne est

$$\begin{aligned}\overline{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{-50\frac{m}{s} - -10\frac{m}{s}}{20s} \\ &= -2\frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

Dans ce dernier exemple, on a inscrit les valeurs des vitesses avec des signes négatifs puisque la vitesse est vers la gauche. (Cela implique qu'on a utilisé un axe pointant vers la droite.) En fait, on peut décider, à chaque problème, dans quelle direction est notre axe (le sens positif). Si la vitesse est dans cette direction, elle est positive, si elle est dans la direction opposée, elle est négative.

Cet exemple montre également qu'une accélération négative ne veut pas nécessairement dire que la grandeur de la vitesse de l'objet diminue. L'accélération était négative et pourtant la grandeur de la vitesse est passée de 10 m/s à 50 m/s. La règle correcte est plutôt la suivante :

Si la vitesse et l'accélération ont des signes identiques, alors la grandeur de la vitesse augmente.

Si la vitesse et l'accélération ont des signes opposés, alors la grandeur de la vitesse diminue.

Pour comprendre cette règle, il ne faut pas oublier que l'accélération représente la vitesse qui est ajoutée chaque instant. Ainsi, si un objet a une vitesse de -100 m/s et une accélération moyenne de 5 m/s², cela veut dire que, chaque seconde, on ajoute 5 m/s à la vitesse. On aura alors

t = 0 s, v = -100 m/s
t = 1 s, v = -95 m/s
t = 2 s, v = -90 m/s
t = 3 s, v = -85 m/s
t = 4 s, v = -80 m/s

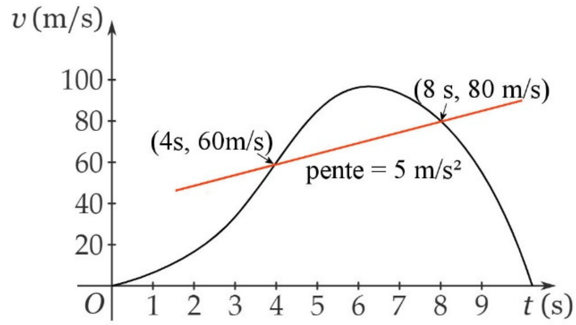
et ainsi de suite. On voit que la grandeur de la vitesse diminue même si l'accélération est positive. C'est ce qui arrive quand la vitesse et l'accélération sont de signes contraires.

L'accélération moyenne sur le graphique de la vitesse

Sur un graphique de la vitesse en fonction du temps, l'accélération moyenne

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

représente la pente de la droite qui relie les points qui correspondent aux temps entre lesquels on veut savoir l'accélération moyenne. Par exemple, si la vitesse change de la façon montrée sur ce graphique, alors l'accélération moyenne entre 4 s et 8 s est 5 m/s².



www.phyley.com/average-acceleration

L'accélération instantanée

Évidemment, l'accélération moyenne est une valeur moyenne. Parfois, la vitesse pourrait augmenter rapidement et parfois elle pourrait augmenter plus lentement. C'est le cas en voiture quand on démarre : notre vitesse augmente rapidement au départ et plus lentement par la suite. On pourrait donc définir une accélération instantanée qui nous renseigne sur le rythme auquel la vitesse change à un moment précis. L'astuce est la même que pour la vitesse instantanée : il faut calculer l'accélération avec le changement de vitesse durant un temps très court, de sorte que l'accélération n'ait pas le temps de changer. On obtient ainsi

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

et donc

Accélération instantanée

$$a = \frac{dv}{dt}$$

À partir de maintenant, quand on parle simplement d'« accélération », on veut dire « accélération instantanée ».

Exemple 1.6.3

La position d'un objet est donnée par la formule $x = 3m - 1\frac{m}{s} \cdot t + 2\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 1\frac{m}{s^3} \cdot t^3$. Quelle est son accélération à t = 2 s ?

L'accélération est la dérivée de la vitesse. Commençons par trouver la formule de la vitesse en dérivant la position.

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d\left(3m - 1\frac{m}{s} \cdot t + 2\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 1\frac{m}{s^3} \cdot t^3\right)}{dt} \\ &= -1\frac{m}{s} + 4\frac{m}{s^2} \cdot t + 3\frac{m}{s^3} \cdot t^2 \end{aligned}$$

On peut ensuite trouver l'accélération en dérivant cette vitesse.

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d\left(-1\frac{m}{s} + 4\frac{m}{s^2} \cdot t + 3\frac{m}{s^3} \cdot t^2\right)}{dt} \\ &= 4\frac{m}{s^2} + 6\frac{m}{s^3} \cdot t \end{aligned}$$

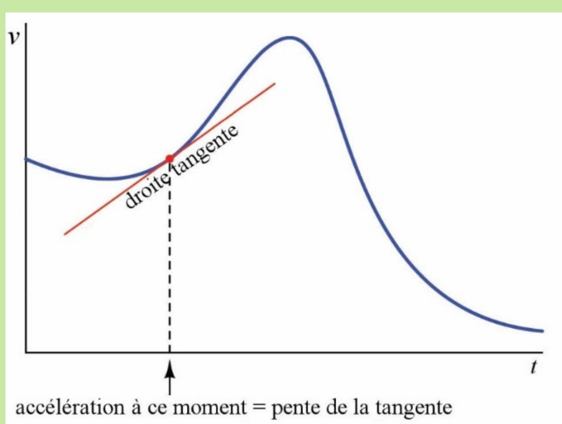
À t = 2 s, on obtient donc

$$\begin{aligned} a &= 4\frac{m}{s^2} + 6\frac{m}{s^3} \cdot 2s \\ &= 16\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

L'accélération instantanée sur le graphique de la vitesse

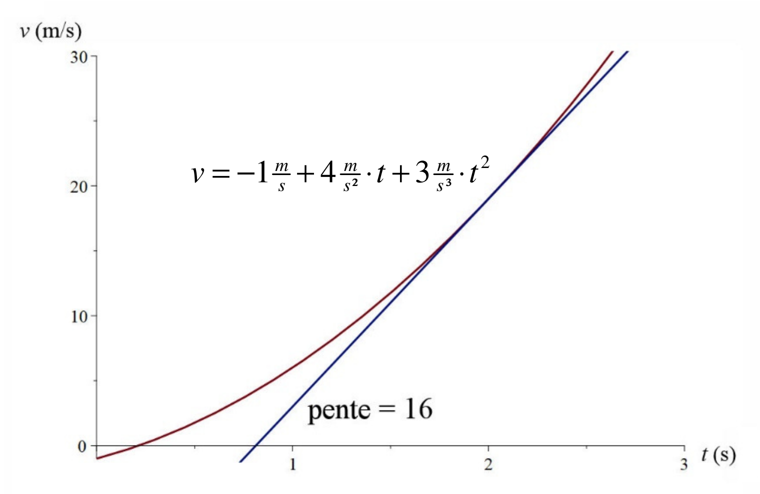
Puisque l'accélération est la dérivée de la vitesse, la pente de la tangente représente l'accélération sur un graphique de la vitesse en fonction du temps.

Sur un graphique de la **vitesse** d'un objet en fonction du temps la pente de la tangente est l'accélération de l'objet.



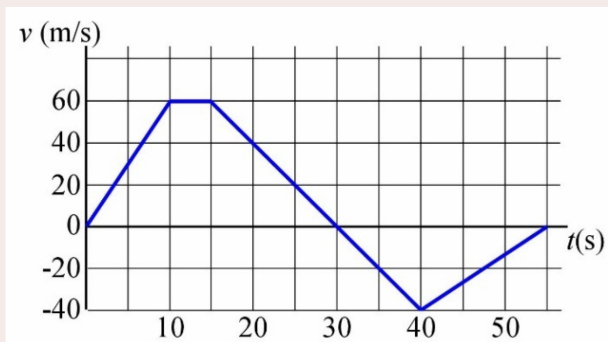
control.com/textbook/calculus/how-derivatives-and-integrals-relate-to-one-another/

Si on prend les données de l'exemple précédent, on constate que la pente de la tangente à $t = 2$ s est 16 m/s².



Exemple 1.6.4

Voici le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet. Quelle est l'accélération de l'objet à $t = 20$ s ?



Pour trouver l'accélération, on doit trouver la pente à $t = 20$ s. On va prendre les points (15 s, 60 m/s) et (30 s, 0 m/s) (2 points pris au hasard sur la droite) pour calculer la pente.

$$\begin{aligned} a &= \frac{0\frac{m}{s} - 60\frac{m}{s}}{30s - 15s} \\ &= -4\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

La variation de vitesse sur le graphique de l'accélération

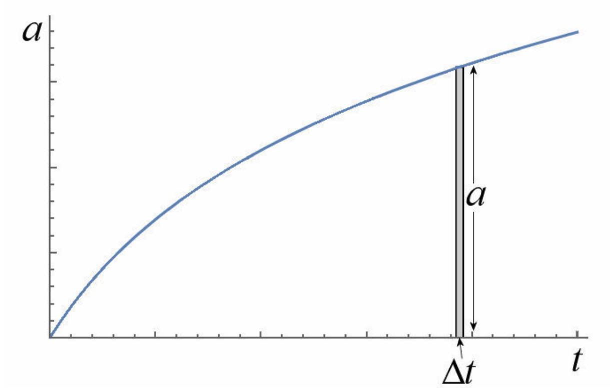
On peut trouver la variation de vitesse d'un objet à partir de l'accélération. Comme on a

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

où Δt est très petit, on peut calculer la variation de vitesse pendant un petit temps Δt. Cette variation de vitesse est

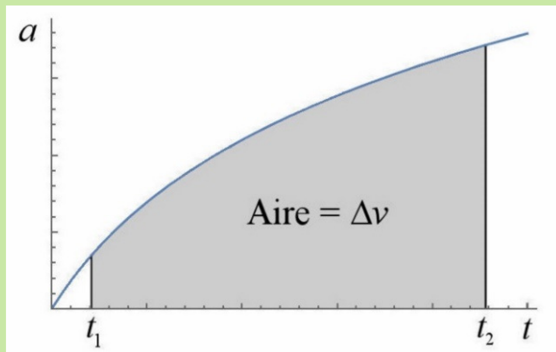
$$\Delta v = a\Delta t$$

Graphiquement, $a\Delta t$ est l'aire d'un rectangle très mince, comme sur la figure de droite.



L'aire de ce petit rectangle est seulement la variation de vitesse pendant un petit temps Δt. Si on veut connaitre la variation de vitesse totale entre les temps t_1 et t_2, on doit additionner toutes les petites variations de vitesse, donc toutes les aires des petits rectangles entre ces deux temps. Comme précédemment, la somme des aires de ces rectangles donne l'aire sous la courbe.

Sur un graphique de l'**<u>accélération</u>** en fonction de temps, l'aire sous la courbe est égale à la variation de vitesse.

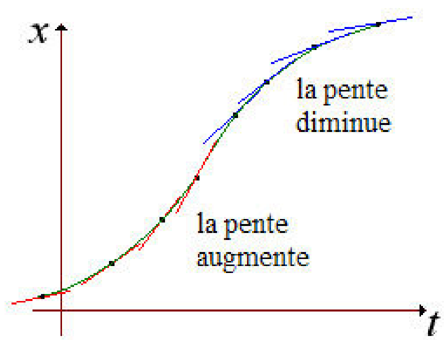


L'accélération sur le graphique de la position

Sur un graphique de la position en fonction du temps, on peut connaitre assez facilement le signe de l'accélération. Pour cela, il suffit d'examiner si la pente diminue ou augmente avec le temps.

Quand la pente augmente, c'est que la vitesse augmente. L'accélération est alors positive.

Quand la pente diminue, c'est que la vitesse diminue. L'accélération est alors négative.

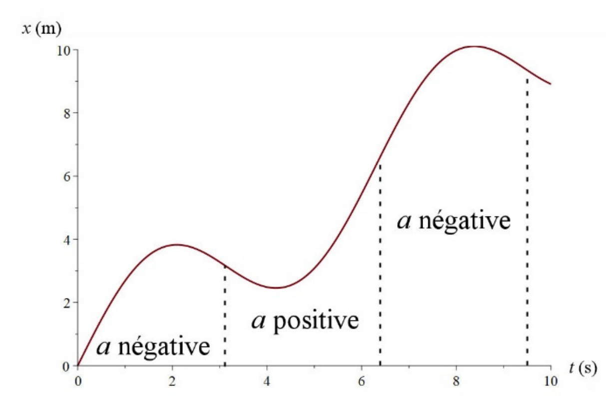


serge.mehl.free.fr/anx/Inflexion.html

On peut également avoir une idée de l'accélération de l'objet à partir de la concavité. Comme l'accélération est la dérivée de la vitesse et que cette dernière est la dérivée de la position, l'accélération est la dérivée seconde de la position.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Puisque cette dérivée seconde représente la concavité sur un graphique, on en déduit que la concavité sur un graphique de la position en fonction du temps représente l'accélération. Évidemment, c'est plus difficile d'avoir une idée de la valeur exacte de l'accélération avec la concavité, mais, chose certaine, on peut facilement déterminer le signe de l'accélération comme le montre le graphique de droite.



La variation de l'accélération

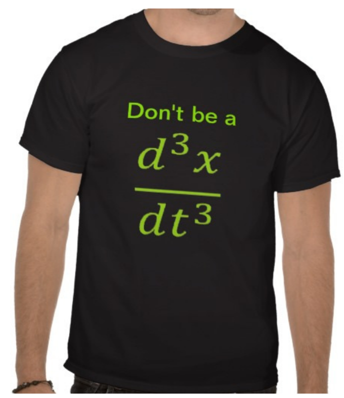
Il se peut aussi que l'accélération ne soit pas constante et qu'elle change. On pourrait alors mesurer à quel rythme varie cette accélération en calculant le taux de variation moyen de l'accélération. On obtient alors le « jerk moyen ».

$$\bar{j} = \frac{a_2 - a_1}{\Delta t} = \frac{\Delta a}{\Delta t}$$

On peut aussi mesurer le taux de variation instantanée de l'accélération avec le jerk instantané.

$$j = \frac{da}{dt}$$

Vous pouvez maintenant comprendre des blagues du type de celle sur ce t-shirt, blague que très peu de gens peuvent comprendre ☺.



www.zazzle.ca/plaisanterie_de_calcul_physique_t_shirts-235003554617890293?lang=fr

On a aussi proposé que le taux de variation du jerk soit le snap, que le taux de variation du snap soit le crackle et que le taux de variation de crackle soit le pop ! (Ce sont les équivalents de cric, crac et croc des Rice Krispies en anglais.)

1.7 LE MOUVEMENT À ACCÉLÉRATION CONSTANTE

Les équations du mouvement

Examinons ce qui arrive dans un mouvement à accélération constante, aussi appelé mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA). Comme on sait que

$$a = \frac{dv}{dt}$$

on peut trouver la vitesse en fonction du temps en se demandant ce qu'il aurait fallu dériver pour obtenir la constante a. De toute évidence, c'est

$$v = at + cst$$

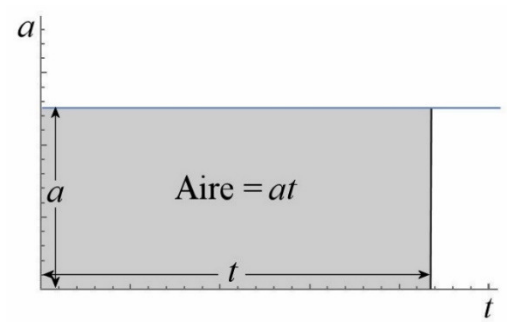
On peut trouver la valeur de la constante en disant que la vitesse au temps t = 0 s est la vitesse initiale (qui sera notée v_0). Si on met ces valeurs dans l'équation, on a alors

$$v_0 = a \cdot 0 + cst$$

et donc que $cst = v_0$. On a alors

$$v = v_0 + at$$

On peut aussi trouver cette équation avec le graphique de l'accélération. L'accélération étant constante, on a le graphique de droite.



Comme l'aire est celle d'un rectangle, on a $\Delta v = at$. Avec cette équation, on arrive à

$$v - v_0 = at$$

C'est l'équation trouvée précédemment.

On va maintenant trouver la formule de la position en fonction du temps puisqu'on sait que

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v_0 + at = \frac{dx}{dt}$$

On peut trouver la position en se demandant ce qu'il aurait fallu dériver pour obtenir $v_0 + at$. Bien sûr, c'est

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + cst$$

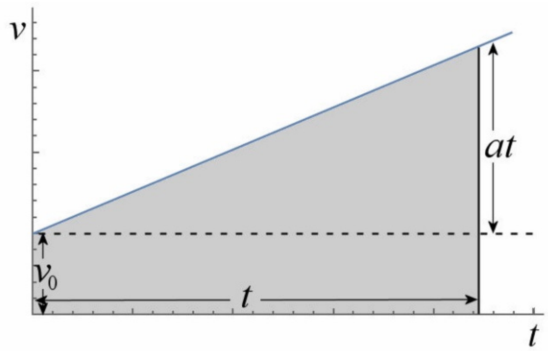
Encore une fois, on trouve la constante en disant que la position au temps t = 0 s est la position initiale x_0. On a alors, si on remplace dans l'équation de la position,

$$x_0 = v_0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + cst$$

La constante vaut donc x_0. On a alors

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

On peut également trouver la position en fonction du temps avec le graphique de la vitesse. Comme l'accélération est constante, on a un graphique dans lequel la pente est constante.



L'augmentation de la hauteur de graphique est égale à at puisque cette variation est égale à Δv et on sait que $\Delta v = at$.

Le déplacement est égal à l'aire en gris sur le graphique. On a séparé cette aire en 2 parties : un rectangle et un triangle. L'aire est donc égale à

$$\begin{aligned}\Delta x &= \text{aire du rectangle + aire du triangle} \\ &= v_0 t + \frac{1}{2} t \cdot at \\ &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2\end{aligned}$$

C'est l'équation trouvée précédemment.

Avec la position et la vitesse en fonction du temps, on peut résoudre tous les problèmes. Toutefois, on peut aussi trouver deux autres équations qui nous permettront de résoudre certains problèmes plus rapidement. On va premièrement faire une équation qui relie la vitesse et la position, sans faire appel au temps. Pour y arriver, il faut isoler t dans l'équation de la vitesse

$$v = v_0 + at$$

ce qui donne

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

On remplace ensuite dans l'équation

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

pour obtenir

$$x = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

Avec un peu d'algèbre, cette équation devient

$$x = x_0 + \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2 v_0 v + v_0^2}{2a}$$

$$x - x_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2v_0 v + v_0^2}{2a}$$
$$2a\left(x - x_0\right) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2$$

$$2a\left(x - x_0\right) = v^2 - v_0^2$$

On va finalement faire une équation qui donne la position en fonction du temps, mais qui ne fait pas appel à l'accélération. Si on isole *a* dans l'équation

$$v = v_0 + at$$

on a

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

Si on remplace dans l'équation

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

on obtient

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{v - v_0}{t}\right)t^2$$

Si on simplifie, on a alors

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_0 + v\right)t$$

Nous avons maintenant quatre belles équations qui nous permettent de résoudre les problèmes de MRUA.

Équations du mouvement uniformément accéléré (MRUA)

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$2a\left(x - x_0\right) = v^2 - v_0^2$$
$$x = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_0 + v\right)t$$

Attention : rappelez-vous que ces quatre équations ne sont bonnes que pour un mouvement à **accélération constante**. Ne les utilisez pas si l'accélération change…

Dans la plupart des cas, la résolution des problèmes de mouvement à accélération constante est assez simple puisqu'il y aura presque toujours une des quatre équations qui va vous permettre de trouver ce que vous cherchez. On passe les quatre équations l'une après l'autre en identifiant les inconnues dans chaque équation. Presque toujours, il y aura une équation pour laquelle la seule inconnue sera ce qu'on cherche.

Erreur fréquente : mauvais signe pour *v* ou *a*

Assurez-vous de définir clairement une direction positive. Si un vecteur (vitesse ou accélération) est dans la direction opposée à votre direction positive, sa valeur est négative.

Exemple 1.7.1

Un avion passe de 0 m/s à 100 m/s en 8 secondes avec une accélération constante.

a) Quelle est son accélération ?

La première équation nous donne

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ 100\tfrac{m}{s} &= 0\tfrac{m}{s} + a \cdot 8s \\ a &= 12{,}5\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

b) Quelle distance a fait l'avion en 8 secondes ?

La deuxième équation nous donne

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 0 + 0 \cdot 8s + \frac{1}{2} \cdot 12{,}5\tfrac{m}{s^2} \cdot (8s)^2 \\ &= 400m \end{aligned}$$

Notez qu'on aurait pu utiliser la troisième ou la quatrième équation pour résoudre cette partie du problème puisque dans ces trois équations, la seule inconnue était la position.

Notez que dans cette formule x_0 et v_0 sont toujours la position et la vitesse à $t = 0$ alors que x et v sont toujours la position et la vitesse au temps t.

Exemple 1.7.2

Une voiture a une vitesse de 50 m/s et une accélération constante. Après un déplacement de 100 m, la vitesse de la voiture est maintenant de 60 m/s. En combien de temps la voiture a-t-elle parcouru ces 100 m ?

On trouve le temps avec

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$
$$100m = 0m + \frac{1}{2} \cdot (50\tfrac{m}{s} + 60\tfrac{m}{s}) \cdot t$$
$$t = 1{,}818s$$

Exemple 1.7.3

Un Boeing 747 doit avoir une vitesse de 278 km/h pour décoller. Sachant que l'accélération du Boeing est de 2,8 m/s², quelle doit être la longueur de la piste pour que le Boeing puisse décoller ?

La longueur est

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2 \cdot 2{,}8\tfrac{m}{s^2} \cdot (x - 0m) = (77{,}22\tfrac{m}{s})^2 - (0\tfrac{m}{s})^2$$
$$x = 1064{,}9m$$

Inutile de s'attarder davantage à ces cas plutôt simples. Attardons-nous à des cas un peu plus complexes dans lesquelles aucune équation ne permet de résoudre le problème directement.

Exemple 1.7.4

Une voiture passe à côté d'un poteau de téléphone avec une vitesse de 90 km/h et une accélération de 3 m/s². À quelle distance du poteau était-elle deux secondes plus tôt ?

1re solution

On connait la vitesse à t = 2 s (25 m/s) et l'accélération. On va mettre l'origine de l'axe x = 0 m au poteau et on va chercher x_0. Si on examine les quatre équations

$v = v_0 + at$	Inconnu : v_0
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	Inconnus : v_0 et x_0
$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$	Inconnus : v_0 et x_0
$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$	Inconnus : v_0 et x_0

On voit qu'aucune équation ne permet de trouver directement x_0. Par contre, on peut facilement trouver une stratégie pour résoudre ce problème. On va trouver v_0 avec la première équation et ensuite on pourra trouver x_0 avec n'importe laquelle des trois autres équations puisqu'il ne restera que x_0 comme inconnu dans les trois cas.

On trouve donc v_0 avec la première équation.

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ 25\tfrac{m}{s} &= v_0 + 3\tfrac{m}{s^2} \cdot 2s \\ v_0 &= 19\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

On trouve ensuite la position initiale avec la deuxième équation (on aurait pu prendre aussi la troisième ou la quatrième équation).

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ 0 &= x_0 + 19\tfrac{m}{s} \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot 3\tfrac{m}{s^2} \cdot (2s)^2 \\ x_0 &= -44m \end{aligned}$$

L'auto était donc à 44 m du poteau 2 secondes plus tôt.

<u>2^e solution</u>

On peut aussi résoudre ce problème avec une seule équation si on décide plutôt que le temps $t = 0$ s est quand l'auto est vis-à-vis du poteau. On cherche alors la position quand $t = -2$ s. En ayant toujours $x = 0$ m au poteau, on résout directement ce problème avec la deuxième équation.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0 + 25\tfrac{m}{s} \cdot (-2s) + \frac{1}{2} \cdot 3\tfrac{m}{s^2} \cdot (-2s)^2 \\ &= -44m \end{aligned}$$

Ceci montre bien que x_0 n'est pas spécifiquement la position initiale. De façon correcte, c'est la position à $t = 0$ s. Comme c'est possible qu'il y ait du mouvement avant $t = 0$ s (qui est arbitraire), x_0 n'est donc pas toujours la position initiale. De la même façon, v_0 n'est pas nécessairement la vitesse initiale. C'est tout simplement la vitesse à $t = 0$ s. Évidemment, si le mouvement commence à $t = 0$ s, x_0 et v_0 sont alors les position et vitesse initiales.

Que faire si l'accélération change ?

C'est possible de résoudre le problème avec les équations du MRUA si l'accélération change par coup, c'est-à-dire qu'elle est constante pour un certain temps puis elle change soudainement pour une autre valeur constante qu'elle gardera pour un certain temps. Il peut y avoir autant de changements qu'on veut.

Dans ce cas, on fait le problème par parties. La première partie est le mouvement avec l'accélération constante qu'il y a au départ, la deuxième partie est celle avec la deuxième accélération constante et ainsi de suite… Les valeurs de position et de vitesse à la fin de la première partie deviennent alors les valeurs initiales de la deuxième partie. En appliquant les équations du MRUA dans chacune des parties, on respecte les conditions d'application de ces formules puisque l'accélération est bel et bien constante pour chacune des parties.

Exemple 1.7.5

Une voiture initialement au repos a une accélération de 6 m/s² durant 5 secondes, puis une accélération de 2 m/s² durant 4 secondes et finalement une accélération de -15 m/s² durant 2 secondes. Quel est le déplacement de la voiture durant ces 11 secondes et quelle est la vitesse de la voiture à la fin de ce mouvement ?

1re partie : a = 6 m/s², x_0 = 0 m et v_0 = 0 m/s

La vitesse à la fin de cette partie est

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 0 + 6\tfrac{m}{s^2} \cdot 5s \\ &= 30\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La position à la fin de cette partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0 + 0 \cdot 5s + \frac{1}{2} \cdot 6\tfrac{m}{s^2} \cdot (5s)^2 \\ &= 75m \end{aligned}$$

2e partie : a = 2 m/s², x_0 = 75 m et v_0 = 30 m/s

(Remarquez bien : les valeurs initiales des positions et des vitesses pour cette phase sont les valeurs à la fin de la première partie.)

La vitesse à la fin de cette partie est

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 30\tfrac{m}{s} + 2\tfrac{m}{s^2} \cdot 4s \\ &= 38\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La position à la fin de cette partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 75m + 30\tfrac{m}{s} \cdot 4s + \frac{1}{2} \cdot 2\tfrac{m}{s^2} \cdot (4s)^2 \\ &= 211m \end{aligned}$$

3^e^ partie : a = -15 m/s², x_0 = 211 m et v_0 = 38 m/s

La vitesse à la fin de cette partie est

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 38\tfrac{m}{s} + \left(-15\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot 2s \\ &= 8\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La position à la fin de cette partie est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 211m + 38\tfrac{m}{s} \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot \left(-15\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot (2s)^2 \\ &= 257m \end{aligned}$$

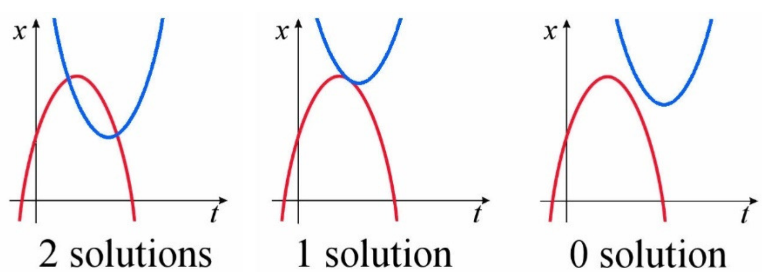
Le déplacement total est donc

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ &= 257m - 0m \\ &= 257m \end{aligned}$$

et la vitesse finale est de 8 m/s.

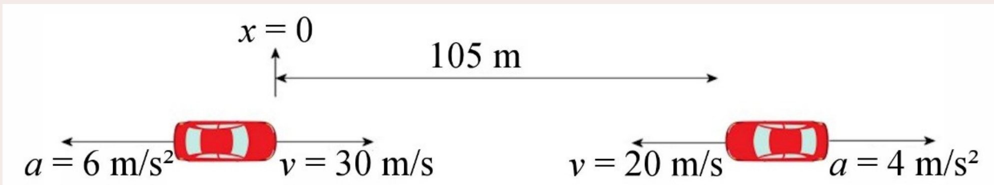
Quand deux objets vont-ils être à la même place ?

Comme mentionné précédemment, vous n'avez qu'à poser l'équation $x_A = x_B$ et résoudre. Encore une fois, cela revient à chercher les points de croisement des deux fonctions donnant la position en fonction du temps. Si l'accélération est constante, on cherche donc le point de croisement de deux paraboles. Dans ce cas, il peut y avoir 2 points de croisement, 1 point de croisement ou même aucun point de croisement.



Exemple 1.7.6

Deux voitures se dirigent l'une vers l'autre. La voiture de gauche se dirige vers la droite avec une vitesse de 30 m/s et la voiture de droite va vers la gauche avec une vitesse de 20 m/s. Lorsqu'elles sont à 105 m l'une de l'autre, elles commencent à freiner simultanément. La voiture de gauche freine à 6 m/s² alors que la voiture de droite freine à 4 m/s². Vont-elles se frapper et, si oui, où et quand ?



fr.depositphotos.com/2577683/stock-illustration-Car.html

Il y aura collision si $x_A = x_B$.

Pour la voiture *A* (celle de gauche), on a x_0 = 0 m, v_0 = 30 m/s et a = -6 m/s². Sa position en fonction du temps est donc

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 0m + 30\tfrac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-6\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot t^2 \\ &= 30\tfrac{m}{s} \cdot t - 3\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{aligned}$$

Pour la voiture *B* (celle de droite), on a x_0 = 105 m, v_0 = -20 m/s et a = 4 m/s². Sa position en fonction du temps est donc

$$\begin{aligned} x_B &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 105m + \left(-20\tfrac{m}{s}\right) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 4\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ &= 105m - 20\tfrac{m}{s} \cdot t + 2\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{aligned}$$

Si les deux positions sont identiques, on a

$$\begin{gathered} x_A = x_B \\ 30\tfrac{m}{s} \cdot t - 3\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 = 105m - 20\tfrac{m}{s} \cdot t + 2\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ 105m - 50\tfrac{m}{s} \cdot t + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 = 0 \end{gathered}$$

On peut alors résoudre cette équation quadratique pour obtenir

$$t = \frac{50\tfrac{m}{s} \pm \sqrt{\left(50\tfrac{m}{s}\right)^2 - 4 \cdot 5\tfrac{m}{s^2} \cdot 105m}}{10\tfrac{m}{s^2}}$$

$$t = \frac{50 \pm 20}{10} s$$

Les deux solutions sont donc t = 3 s et t = 7 s. Puisqu'il y a au moins une solution, il y aura une collision. S'il n'y avait pas eu de solution, ce qui arrive parfois avec les équations quadratiques, cela aurait signifié qu'il n'y a pas de collision.

Mais alors, pourquoi y a-t-il 2 solutions ? Est-ce que les autos vont se frapper deux fois ? En réalité, elles vont se frapper uniquement à t = 3 s. La deuxième solution n'est pas valide parce qu'il est clair que l'accélération des autos va changer lors de la collision à t = 3 s. Ainsi, les formules de la position en fonction du temps que l'on a faites précédemment ne sont pas bonnes pour t > 3 s puisque l'accélération a changé.

On peut ensuite trouver où vont se frapper les autos en prenant une des deux formules de la position. Cette position est

$$\begin{aligned} x_A &= 30\tfrac{m}{s} \cdot t - 3\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ &= 30\tfrac{m}{s} \cdot 3s - 3\tfrac{m}{s^2} \cdot (3s)^2 \\ &= 63m \end{aligned}$$

(Vous pouvez vérifier que x_B donne la même position.)

On peut même trouver la vitesse des deux voitures lors de la collision.

$$v_A = v_0 + at = 30\tfrac{m}{s} + \left(-6\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot 3s = 12\tfrac{m}{s}$$
$$v_B = v_0 + at = -20\tfrac{m}{s} + 4\tfrac{m}{s^2} \cdot 3s = -8\tfrac{m}{s}$$

Exemple 1.7.7

Alphonse et Bertrand participent à une course de voiture. Leurs voitures sont initialement au repos à la ligne de départ. La voiture d'Alphonse a une accélération de 5 m/s² jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse maximale de 30 m/s. La voiture de Bertrand a une accélération de 3 m/s² jusqu'à ce qu'elle atteigne une vitesse maximale de 42 m/s. Où et quand la voiture de Bertrand va-t-elle rattraper celle d'Alphonse ?

Comme les accélérations changent dans ce problème, il faut séparer ce problème en partie.

1re partie : Les deux véhicules accélèrent

$$a_A = 5 \text{ m/s}^2,\ a_B = 3 \text{ m/s}^2$$

Comme cette partie se termine quand la voiture d'Alphonse (voiture A) atteint sa vitesse maximale, la durée de cette phase est

$$v_A = v_0 + at$$
$$30\tfrac{m}{s} = 0\tfrac{m}{s} + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t$$
$$t = 6s$$

À la fin de cette partie, les positions des voitures sont

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5\tfrac{m}{s^2} \cdot (6s)^2 \\ &= 90m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 3\tfrac{m}{s^2} \cdot (6s)^2 \\ &= 54m \end{aligned}$$

et les vitesses sont

$$v_A = 30\tfrac{m}{s}$$

$$\begin{aligned} v_B &= v_0 + at \\ &= 0\tfrac{m}{s} + 3\tfrac{m}{s^2} \cdot 6s \\ &= 18\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

2e partie : La voiture *A* est à sa vitesse maximale; la voiture *B* continue d'accélérer.

$$a_A = 0 \text{ m/s}^2, \ a_B = 3 \text{ m/s}^2$$

(Remarquez bien : les valeurs initiales des positions et des vitesses pour cette phase sont les valeurs à la fin de la première partie.)

Comme cette partie se termine quand la voiture de Bertrand (voiture *B*) atteint sa vitesse maximale, la durée de cette phase est

$$v_B = v_0 + at$$
$$42\tfrac{m}{s} = 18\tfrac{m}{s} + 3\tfrac{m}{s^2} \cdot t$$
$$t = 8s$$

À la fin de cette partie, les positions des voitures sont

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 90m + 30\tfrac{m}{s} \cdot 8s + 0 \\ &= 330m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 54m + 18\tfrac{m}{s} \cdot 8s + \frac{1}{2} \cdot 3\tfrac{m}{s^2} \cdot (8s)^2 \\ &= 294m \end{aligned}$$

(La voiture *B* n'a toujours pas rattrapé la voiture *A*. Si Bertrand avait dépassé Alphonse, on procèderait alors de la même façon qu'on fera à la troisième partie pour trouver exactement où et quand Bertrand aurait rejoint Alphonse.)

Les vitesses à la fin de la deuxième partie sont

$$v_A = 30\tfrac{m}{s} \qquad\qquad v_B = 42\tfrac{m}{s}$$

3e partie : Les deux voitures sont à leurs vitesses maximales.

$$a_A = 0 \text{ m/s²},\ a_B = 0 \text{ m/s²}$$

Cette partie ne se termine jamais. Comme la voiture B va plus vite que la voiture A, il est certain qu'elle va la rattraper. On a alors $x_A = x_B$ quand la voiture B aura rattrapé la voiture A.

Les positions en fonction du temps des voitures sont

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 330m + 30\tfrac{m}{s}\cdot t + 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_B &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 294m + 42\tfrac{m}{s}\cdot t + 0 \end{aligned}$$

Si on égale les deux positions $x_A = x_B$, on a alors

$$\begin{aligned} x_A &= x_B \\ 330m + 30\tfrac{m}{s}\cdot t &= 294m + 42\tfrac{m}{s}\cdot t \\ 36m &= 12\tfrac{m}{s}\cdot t \\ t &= 3s \end{aligned}$$

La position est alors

$$\begin{aligned} x_A &= 330m + 30\tfrac{m}{s}\cdot 3s \\ &= 420m \end{aligned}$$

(x_B aurait donné la même réponse) et le temps total depuis le début est

$$6\ s + 8s + 3s = 17s.$$

(Remarquez bien : on doit additionner les temps puisque celui-ci repart à zéro à chaque partie. Cependant, on obtient directement la position puisqu'on a gardé toujours notre $x = 0$ m à la même place, c'est-à-dire à la ligne de départ.)

Comment obtenir les équations du mouvement à partir de positions à certains moments

Il arrive qu'on demande où sera un objet à un certain moment en ne donnant que la position de l'objet à 3 autres moments. L'exemple suivant vous montrera comment résoudre ce genre de problème.

Exemple 1.7.8

Voici la position d'un objet à trois instants :

$x = 2$ m à $t = 1$ s
$x = 3$ m à $t = 2$ s
$x = 11$ m à $t = 4$ s

Où sera-t-il à $t = 10$ s ?

L'équation du mouvement est

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

En utilisant les valeurs données aux 3 temps, on a

$$2m = x_0 + (1s) v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (1s)^2$$
$$3m = x_0 + (2s) v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (2s)^2$$
$$11m = x_0 + (4s) v_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (4s)^2$$

Ce qui nous donne trois équations avec trois inconnues.

$$2m = x_0 + (1s) v_0 + \left(0{,}5s^2\right) a$$
$$3m = x_0 + (2s) v_0 + \left(2s^2\right) a$$
$$11m = x_0 + (4s) v_0 + \left(8s^2\right) a$$

On peut résoudre ce système d'équations de la façon qu'on veut (Gauss-Jordan par exemple…). Laissons de côté ici les détails de cette manipulation mathématique. On obtient alors la solution suivante.

$x_0 = 3$ m, $v_0 = -2$ m/s et $a = 2$ m/s²

La position à $t = 10$ s est donc

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 3m + \left(-2\tfrac{m}{s}\right) \cdot 10s + \frac{1}{2} \cdot 2\tfrac{m}{s^2} \cdot (10s)^2 \\ &= 83m \end{aligned}$$

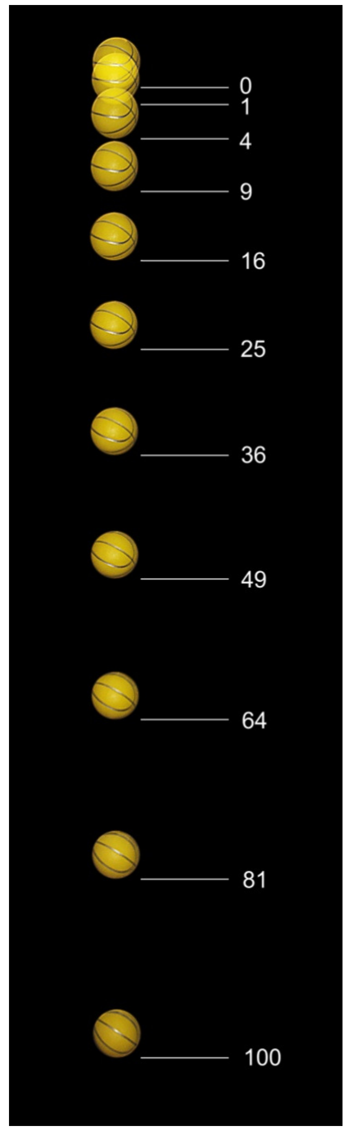
Ça semble court comme solution, mais c'est assez long en fait quand on doit résoudre le système d'équations. C'est cependant beaucoup plus facile si une des positions est à $t = 0$ puisque que l'équation à $t = 0$ nous donnera alors directement la valeur de x_0. Il ne restera alors que deux équations et deux inconnues pour trouver v_0 et a.

1.8 LA CHUTE LIBRE

L'accélération gravitationnelle

Quand on parle de chute libre, on parle d'un objet sur lequel s'exerce uniquement la force de gravitation. Cela veut dire qu'il n'y a pas de friction qui agit sur l'objet. Notez qu'un objet lancé vers le haut est en chute libre pendant tout son mouvement (montée et descente).

On peut étudier le mouvement d'un objet en chute libre en utilisant, par exemple, un stroboscope pour photographier l'objet à intervalle régulier pour ainsi facilement mesurer les positions (comme sur la figure de droite).



en.wikipedia.org/wiki/Equations_for_a_falling_body

Avec les positions de l'objet en fonction du temps, on se rend compte que le mouvement de chute libre est un mouvement à accélération constante et que tous les objets, peu importe leur masse, ont une accélération de 9,8 m/s² vers le bas.

$$a_{\text{gravitationnelle}} = 9,8 \tfrac{m}{s^2} \text{ vers le bas}$$

On utilise le symbole g pour représenter la grandeur de cette accélération.

$$g = 9,8 \tfrac{m}{s^2}$$

La masse n'a pas d'importance

On ne le répètera jamais assez : tous les objets tombent avec la même accélération en chute libre, peu importe leur masse. Ainsi, si on laisse tomber simultanément de la même hauteur à partir du repos 2 objets de masse différente dans le vide, ils arriveront au sol en même temps.

Ça peut paraitre surprenant, mais c'est probablement parce que vous n'avez jamais vu de chute d'objet dans le vide. Pour connaitre l'effet de la gravitation seule, on doit éliminer la friction de l'air. On peut le faire en laissant tomber des objets dans une pièce dans laquelle on fait le vide. Dans ce vidéo, on peut bien voir la plume et la boule de quilles arriver en même temps au sol dans une pièce dans laquelle il n'y a pas d'air.
https://physique.merici.ca/mecanique/Chute-vide.wmv
On peut aussi laisser tomber des objets sur la Lune, où il n'y a pas d'air. L'astronaute Dave Scott d'Apollo 15 a fait cette expérience en 1971.

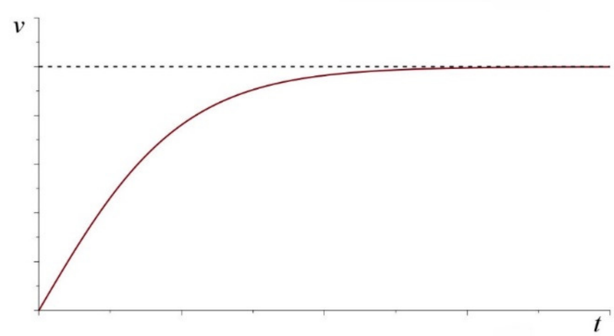
https://www.youtube.com/watch?v=03SPBXALJZI
Par contre, on voit que les objets tombent avec une accélération plus faible. La force de gravité étant plus faible à la surface de la Lune, l'accélération des objets n'est que de 1,6 m/s².

Ces clips montrent bien que l'accélération des objets est la même, peu importe la masse de l'objet, en chute libre.

Comment a-t-on découvert que la chute libre se fait à accélération constante, peu importe la masse ?

Il fallut environ 2000 ans d'études pour arriver à la conclusion que tous les objets en chute libre tombent de la même façon peu importe leur masse et qu'ils tombent avec une accélération constante. Le problème, c'est que c'est très difficile de découvrir ces informations quand on n'a aucun moyen d'éliminer la friction.

Effet de la masse



Quand il y a de la friction de l'air, la vitesse de chute varie de la façon montrée sur ce graphique (que l'on retrouvera au chapitre 5).

Le graphique montre que la vitesse des objets qui tombent dans l'air tend vers une vitesse limite (ligne pointillée horizontale). Comme cette vitesse limite dépend de la masse et la forme de l'objet, le mouvement des objets qui tombent dans l'air diffère selon la masse et la forme. On peut voir cet effet dans ce clip dans lequel on laisse tomber une cuisinière (l'appareil électroménager, pas la madame) et un oreiller.
https://www.youtube.com/watch?v=RGVcKYpo9EM
Pas facile de déduire que la masse n'a pas d'importance à partir d'une telle observation !

Cette expérience laisse plutôt fortement penser que les objets plus massifs tombent plus vite que les objets plus légers. Encore aujourd'hui, bien des gens vous diront que les objets plus lourds tombent plus vite que les objets légers, ce qui est généralement vrai pour une chute dans l'air, mais pas toujours (on verra au chapitre 5 qu'un objet plus léger pourrait tomber plus vite qu'un objet plus lourd). Ainsi, il n'est pas surprenant de constater que presque tous les savants jusqu'au 17^{e} siècle, en commençant par Aristote au 4^{e} siècle av. J.-C., ont pensé que les objets plus massifs tombent plus vite que les objets plus légers. Aristote va même jusqu'à dire qu'un objet 3 fois plus massif qu'un autre prendra trois fois moins de temps à atteindre le sol si on laisse tomber les objets en même temps à partir d'une même hauteur.

Cependant, quelques-uns ont constaté que les temps de chute peuvent être pratiquement identiques dans certains cas même si les masses sont très différentes. C'est ce qu'on peut voir dans ces vidéos de chutes de citrouilles.
https://www.youtube.com/watch?v=gVAJcd4JXyE
https://www.youtube.com/watch?v=r2-h_bpUSqM
Philopon est le premier, au 6e siècle, à affirmer que, dans certains cas, il n'y a pratiquement pas de différence entre les temps d'arrivée quand deux objets de masse différente tombent simultanément de la même hauteur. Quelques autres se sont opposés à Aristote pendant les 1000 ans qui suivent, mais ils n'ont pas été très nombreux.

Au 16e siècle, Giambattista Benedetti est un de ceux qui osent contredire Aristote. Ses théories (qui sont fausses selon la physique actuelle) l'amènent à conclure, en 1552, que les objets de même densité devraient tomber à la même vitesse dans l'air même s'ils ont des masses différentes. Il peut ainsi expliquer pourquoi les temps de chute sont parfois différents (objets de différentes densités) et parfois identiques (objets de même densité). En 1586, le hollandais Simon Stevin vérifie cette affirmation en laissant tomber, du haut d'une tour d'environ 10 mètres, deux objets ayant des densités identiques, mais des masses différentes. Il peut alors constater que les temps d'arrivée sont bel et bien identiques (ou presque). Le fait qu'il s'écoule 34 ans entre le moment où on formule l'idée et le moment où on fait une première vérification expérimentale en dit long l'attitude des savants de l'époque. Il n'y en a pas beaucoup qui pensent que l'expérimentation est une étape essentielle pour vérifier les affirmations. (L'idée que la chute ne devrait dépendre que de la densité s'était rapidement répandue en Europe. Le long délai ne vient donc pas d'une lenteur de la diffusion des idées.)

Galilée va aller encore plus loin. Selon lui, la chute est identique pour tous les objets qui tombent dans le vide même s'ils ont des densités différentes. Il commence par un raisonnement (fait aussi par Benedetti en 1553) qui montre qu'on arrive à une contradiction si on suppose que les objets plus massifs tombent plus vite. Si un objet de 10 kg tombe plus vite qu'un objet de 1 kg, voyons ce qui passe si on les attache ensemble. Un premier raisonnement nous amène à penser que cet objet de 11 kg va tomber avec une vitesse plus grande que l'objet de 10 kg puisqu'il est plus massif. Cependant, un autre raisonnement nous amène à penser que cet objet de 11 kg va tomber avec une vitesse plus petite que l'objet de 10 kg puisqu'il s'agit d'un objet de 10 kg qui doit trainer un objet de 1 kg qui va moins vite ! La seule façon de se sortir de cette contradiction consiste à dire que la vitesse de chute est identique pour toutes les masses. (Notez que le raisonnement est valide uniquement si la vitesse de chute dépend seulement de la masse.)

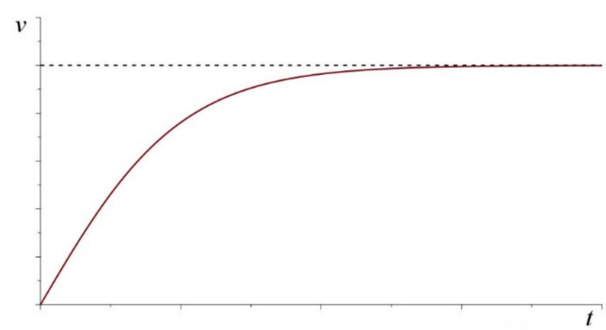
Galilée ne peut pas prouver expérimentalement sa théorie en laissant tomber des objets dans le vide puisque la pompe à vide n'est pas encore inventée. Toutefois, Galilée parvient à montrer qu'il y a un lien entre la chute libre et le mouvement des pendules (ce qui est normal puisque les 2 phénomènes sont liés à la gravitation). Il montre que si les temps de chutes sont identiques pour 2 objets, alors les temps d'oscillation du pendule devraient être les mêmes si on place ces 2 objets au bout de cordes de même longueur. Cette façon de faire permet même de faire des vérifications expérimentales plus précises que des chutes d'objets. Pour une chute, la friction devient vite importante et les temps de chutes sont très difficiles à mesurer avec beaucoup de précision. Avec de très longs pendules et de petites oscillations, on élimine le problème de la friction parce que la vitesse de l'objet n'est jamais très grande (la friction de l'air n'a pas beaucoup d'effet si la vitesse est petite). On peut également mesurer les périodes d'oscillation avec beaucoup plus de précision en mesurant le temps d'un grand nombre d'oscillations et en divisant par le nombre d'oscillations.

Les mesures montraient clairement que le temps d'oscillation d'un pendule est toujours le même, peu importe la masse et la composition de l'objet au bout de la corde. Newton lui-même dit avoir fait cette expérience avec de nombreux types de matériaux et constater que la période était toujours la même. Newton est tellement convaincu que les temps de chutes sont identiques dans le vide qu'il en fait un des points de départ de sa mécanique en 1687. Dans la mécanique de Newton, tous les objets tombent de la même façon dans le vide, peu importe leur masse. L'observation des premières chutes dans le vide (pièce de monnaie et plume dans un tube) faites par Boyle en 1660 en a surement convaincu plusieurs autres.

Mais il restait un petit doute. Se pourrait-il que la chute ne soit pas exactement identique pour tous les objets dans le vide ? En fait, on a continué de vérifier que la chute était identique pour tous les objets avec des expériences de plus en plus précises. Vers 1900, on avait vérifié que la chute était identique avec une précision de 10^{-6} %. Aujourd'hui, la précision atteint 10^{-13} %. Aussi récemment qu'en 2016, on a envoyé le satellite Microscope dans l'espace pour vérifier que la chute est identique pour tous les objets. Selon le principe d'équivalence d'Einstein, il n'y aurait pas de différence du tout. (Ce principe est le point de départ de sa théorie sur la relativité générale.) Par contre, il pourrait y avoir une petite différence selon d'autres théories. Par exemple, la théorie des cordes prévoit que la gravitation pourrait être un peu différente selon la composition de l'objet.

L'accélération constante

Le graphique de la vitesse montre aussi que la chute d'un objet dans l'air n'est pas un mouvement à accélération constante (on voit bien que l'accélération, qui est la pente, n'est pas constante). Pas facile de découvrir que l'accélération est constante quand elle n'est pas vraiment constante !



Notez toutefois que l'accélération est à peu près constante à 9,8 m/s² pour tous les objets au début du mouvement (on voit que la pente est à peu près constante au début). À ce moment, la vitesse n'est pas très grande et l'effet de l'air n'est pas très grand comparé au poids de l'objet. L'accélération est donc à peu près constante si la distance de chute n'est pas trop grande.

Évidemment, personne ne peut découvrir que l'accélération est constante quand on ne sait même pas ce qu'est une accélération. Mais même après qu'on ait (un peu) clarifié le concept d'accélération et obtenu une des formules du mouvement à accélération constante au 14e siècle, il faut encore attendre près de 300 ans avant que Galilée ne montre que l'accélération est constante. Pourquoi est-ce si long ?

Tous savent à cette époque que la vitesse augmente pendant la chute. On dit que la vitesse augmente avec le temps de chute ou que la vitesse augmente avec la distance de chute. Il ne faut pas être un super génie pour arriver à cette conclusion. Parfois, au Moyen-Âge, on est un peu plus précis en disant que la vitesse est proportionnelle au temps ($v \propto t$) ou proportionnelle à la distance de chute ($v \propto y$). Ces deux possibilités sont bien différentes. La première correspond à un mouvement à accélération constante, mais pas la deuxième (dans un mouvement à accélération constante, on a plutôt $v \propto \sqrt{y}$). Très souvent, on pense que les deux possibilités sont vraies puisque personne n'a les outils mathématiques pour comprendre que ces deux possibilités sont bien différentes.

Personne ne fait d'expérience et personne ne pense que c'est pertinent d'en faire. On tente plutôt de déduire ce que sera le mouvement à partir des théories qui expliquent la cause du mouvement (qu'on verra au chapitre 3) et on ne vérifie pas ensuite si cela correspond au véritable mouvement. Il faut dire que l'expérience n'aurait pas été facile à faire, car on a, à cette époque, seulement cette équation du mouvement à accélération constante.

$$y = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

Évidemment, l'équation n'était pas donnée ainsi. Juste pour vous donner une idée, voici comment Oresme donne cette loi au milieu du 14e siècle.

Toute qualité, si elle est uniformément difforme, est elle-même autant que serait la qualité du même sujet, ou d'un sujet égal, uniforme selon le degré du point qui occupe le milieu de ce même sujet.

Ce n'est pas facile pour nous de retrouver la formule dans cette phrase (qui était en latin en plus). Le problème, c'est que la formule fait uniquement référence aux vitesses et on n'avait pas vraiment de moyen de mesurer une vitesse instantanée à cette époque.

Reste que l'idée d'une chute à accélération constante ($v \propto t$) était déjà présente au moins depuis le 14e siècle, mais elle n'avait pas été formulée à partir d'observations. Ce n'était qu'une possibilité parmi d'autres et elle était considérée simplement parce que c'était une solution simple, tout comme $v \propto y$. On accepte souvent les deux possibilités en même temps, mais certains savants en viennent parfois à privilégier une solution plus qu'une autre. Par exemple, Albert de Saxe (14e siècle) pense que $v \propto y$ est la bonne solution alors que Domingo de Soto (1551) pense que $v \propto t$ est la bonne solution. Comme ce $v \propto t$ est un mouvement à accélération constante, Domingo de Soto pourrait passer pour un visionnaire, mais il n'en est pas vraiment un. Il ne fournit aucun argument et on ne sait pas comment il en est arrivé à préférer cette solution. Chose certaine, ce n'est pas une expérience qui l'a amené à cette loi. Il en est simplement venu à préférer cette loi probablement pour des raisons philosophiques, de la même façon que d'autres en sont venus à préférer $v \propto y$.

Au début du 17e siècle, la question n'est toujours pas réglée. Galilée, dans ses jeunes années (vers 1590), accepte encore $v \propto y$ et $v \propto t$ en même temps. Toutefois, Galilée amorce une révolution quelques années plus tard. En 1603-1604, il décide de vérifier expérimentalement comment se fait la chute des corps. C'est vraiment une toute nouvelle façon de faire !

Galilée va premièrement montrer que $v \propto t$ et $v \propto y$ sont des mouvements complètement différents. Aussi, il arrive à montrer que $v \propto t$ signifie qu'on a aussi

$$y \propto t^2$$

Cette loi permet de vérifier beaucoup plus facilement si la chute est un mouvement à accélération constante puisqu'il est beaucoup plus facile de mesurer la distance parcourue que la vitesse d'un objet en chute. Il montre finalement (bien que la preuve ne soit pas tellement convaincante) que si la chute verticale se fait avec une accélération constante, alors une chute le long d'un plan incliné devrait aussi avoir une accélération constante. L'accélération plus faible sur le plan permet alors de ralentir tout le processus de chute et de faciliter l'expérience.

Le seul problème qui reste, c'est qu'il n'y a pas de façon simple pour mesurer le temps à cette époque. Galilée l'a mesuré avec son pouls, avec la quantité d'eau écoulée d'un bassin et avec des petits obstacles placés sur la piste qui font un petit bruit quand l'objet qui glisse passe. On peut voir une variante de cette méthode sur l'image de droite. Cette méthode consiste à placer des petites cloches qui sont frappées par la balle qui roule le long du plan incliné. On ajuste la position des cloches pour que les tintements se fassent à intervalle régulier. Galilée s'assure de la régularité des sons émis en chantant une marche militaire durant l'expérience. On peut voir ce montage en action dans ce vidéo (filmé à Woolsthorpe Manor, lieu de naissance d'Isaac Newton).
https://www.youtube.com/watch?v=eUbv78PHaro

Les résultats de l'expérience montraient clairement que la distance parcourue par l'objet augmente avec le carré du temps ($y \propto t^2$) et que la chute est un mouvement à accélération constante.

Newton dissipe tous les doutes en 1687. La chute libre est automatiquement un mouvement à accélération constante dans la théorie de Newton. En fait, Newton montre que l'accélération n'est pas tout à fait constante puisque la force de gravitation diminue un peu avec l'altitude. Toutefois, les variations d'accélération sont faibles près de la surface de la Terre et l'accélération est pratiquement constante.

Exemples pour la chute libre

La plupart du temps, on trouve assez rapidement la solution aux problèmes de chute libre en utilisant les équations du MRUA avec une accélération de 9,8 m/s² vers le bas.

$$v = v_0 + at$$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$2a\left(y - y_0\right) = v^2 - v_0^2$$

(On utilise y à la place de x parce que le mouvement est vertical.) L'équation

$$y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_0 + v\right)t$$

n'est pas vraiment utile, car c'est une équation qu'on utilise quand on ne connait pas a. Or, avec la chute libre, on sait que l'accélération est 9,8 m/s².

Erreur fréquente : mauvais signe pour a.

L'accélération est toujours vers le bas pour la chute libre. On remarque que certains étudiants pensent que l'accélération est vers le haut quand l'objet monte et vers le bas quand l'objet descend. C'est faux. En montant, la vitesse est vers le haut et l'accélération est vers le bas. Comme la vitesse et l'accélération sont dans des directions opposées, l'objet ralentit. En descendant, la vitesse et l'accélération sont toutes les deux vers le bas. La grandeur de la vitesse augmente alors puisque c'est ce qui arrive quand l'accélération est dans le même sens que la vitesse.

Erreur fréquente : dire que a = 0 au point le plus haut.

L'accélération est toujours de 9,8 m/s² vers le bas pendant la chute, incluant au point le plus haut. C'est seulement la vitesse qui est nulle au point le plus haut. Si l'accélération était nulle, la vitesse de l'objet resterait constante. Comme la vitesse à cet endroit est nulle, l'objet resterait toujours immobile au point le plus haut.

Erreur fréquente : dire que v = 0 quand l'objet frappe le sol.

Si on demande, par exemple, quand un objet va arriver au sol, et qu'on peut résoudre ce problème avec une équation dans laquelle il y a une vitesse, certains étudiants vont mettre que v = 0 au sol. Il est vrai que la vitesse après la collision avec le sol est nulle, mais ce qu'on doit mettre dans l'équation est la vitesse juste avant le contact avec le sol. Dès que l'objet touche au sol, l'accélération change et l'équation de la chute libre ne s'applique plus.

Exemple 1.8.1

On lance un objet vers le haut avec une vitesse de 20 m/s à partir du sol.

a) Jusqu'à quelle hauteur va-t-il monter ?

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser un axe dirigé vers le haut et dont l'origine $y = 0$ m est au sol.

Nous avons donc a = -9,8 m/s² (négatif, car on a choisi un axe est vers le haut et l'accélération est vers le bas), v_0 = 20 m/s et y_0 = 0 m. On atteint la hauteur maximale quand la vitesse est nulle. (L'objet monte quand la vitesse est positive et descend quand la vitesse est négative. On a donc la hauteur maximale quand $v = 0$.) On cherche donc y quand $v = 0$. On résout directement ce problème avec l'équation

$$2a(y - y_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2 \cdot \left(-9{,}8 \tfrac{m}{s^2}\right) \cdot \left(y - 0m\right) = 0 - \left(20 \tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y = 20{,}4m$$

b) Combien faut-il de temps pour atteindre cette hauteur maximale ?

On résout directement ce problème avec l'équation

$$v = v_0 + at$$
$$0 = 20 \tfrac{m}{s} + \left(-9{,}8 \tfrac{m}{s^2}\right) \cdot t$$
$$t = 2{,}04s$$

c) Quelle sera la vitesse de l'objet quand il va revenir au sol ?

Quand l'objet revient au sol, il revient à $y = 0$. On peut donc résoudre directement ce problème avec l'équation suivante.

$$2a(y - y_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2 \cdot \left(-9{,}8 \tfrac{m}{s^2}\right) \cdot \left(0m - 0m\right) = v^2 - \left(20 \tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$v = \pm 20 \tfrac{m}{s}$$

Puisqu'on utilise un axe positif vers le haut et que l'objet va assurément vers le bas lors de son retour au sol, on garde le signe négatif. La vitesse est donc –20 m/s.

On note souvent une tendance à faire ce problème en deux parties : la montée et la descente. Bien que ce ne soit pas mauvais de faire cette séparation, elle est inutile puisqu'on peut faire ce calcul directement puisque l'accélération est toujours constante dans ce mouvement.

d) Combien faut-il de temps pour que l'objet revienne au sol ?

On résout directement ce problème avec l'équation

$$v = v_0 + at$$
$$-20\tfrac{m}{s} = 20\tfrac{m}{s} + \left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\cdot t$$
$$t = 4,08s$$

(Vous voyez qu'il ne fallait pas mettre v = 0 pour la vitesse au sol. On doit mettre la vitesse juste avant le contact avec le sol.)

e) Quel est le déplacement entre 1 s et 1,5 s après le départ de l'objet ?

Pour résoudre ce problème, calculons les positions à t = 1 s et t = 1,5 s.

À t = 1 s, on a

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0m + 20\tfrac{m}{s}\cdot 1s + \frac{1}{2}\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\cdot(1s)^2 \\ &= 15,1m \end{aligned}$$

À t = 1,5 s, on a

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= 0m + 20\tfrac{m}{s}\cdot 1,5s + \frac{1}{2}\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\cdot(1,5s)^2 \\ &= 18,98m \end{aligned}$$

Le déplacement est donc

$$\Delta y = 18,98m - 15,1m = 3,88m$$

f) Au bout de combien de temps l'objet sera-t-il à 10 m du sol ?

On peut résoudre directement à l'aide de

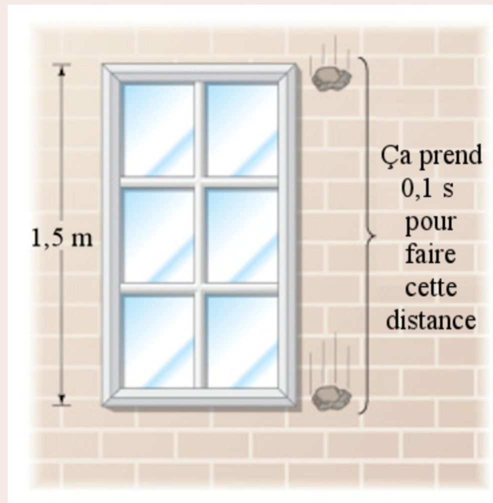
$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$10m = 0m + 20\tfrac{m}{s}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\left(-9,8\tfrac{m}{s^2}\right)\cdot t^2$$
$$t = 0,583s \quad \text{et} \quad 3,498s \quad \text{(solutions d'une équation quadratique)}$$

Il y a deux réponses et ces deux réponses sont bonnes puisque l'objet est à 10 m de sol une fois en montant et une autre fois en redescendant.

La plupart des problèmes sont comme ceux de ce dernier exemple : une des équations du MRUA va résoudre directement le problème. Il existe cependant quelques problèmes où cela ne fonctionnera pas. En voici un.

Exemple 1.8.2

Une pierre lancée verticalement à partir du haut du toit d'un édifice passe devant une fenêtre de 1,5 m de haut en 0,1 s. Le haut de la fenêtre est à 10 m du toit. À quelle vitesse la pierre a-t-elle été lancée ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/falling-stone-takes-033-s-travel-past-window-22-m-tall-figure-height-top-window-stone-fall-q3912013

Il manque d'informations pour résoudre ce problème directement. Mais, puisqu'on a une information concernant une partie du mouvement (le temps pour aller du haut de la fenêtre au bas de la fenêtre), il peut être intéressant de séparer ce problème en deux parties.

1) Du toit jusqu'au haut de la fenêtre.
2) Du haut de la fenêtre jusqu'au bas de la fenêtre.

Nous allons commencer par la deuxième partie. Nous allons travailler avec un axe des y dirigé vers le bas et dont le y = 0 m est situé au toit. Pour cette partie, nous connaissons :

L'accélération (a = 9,8 m/s². Elle est positive, car l'axe des y est vers le bas)
La position initiale (y_0 = 10 m)
La position finale (y = 11,5 m)
Le temps pour ce déplacement (0,1 s)

Cela nous permet donc de trouver la vitesse initiale de cette partie, c'est-à-dire la vitesse de la pierre quand elle est vis-à-vis du haut de la fenêtre. On trouve cette vitesse avec l'équation suivante.

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$11,5m = 10m + v_0 \cdot 0,1s + \frac{1}{2} \cdot 9,8 \tfrac{m}{s^2} \cdot (0,1s)^2$$

$$v_0 = 14,51 \tfrac{m}{s}$$

On peut ensuite se concentrer sur la première partie du mouvement (du toit jusqu'au haut de la fenêtre). Pour cette partie, nous connaissons

L'accélération (a = 9,8 m/s²)

La position initiale (y_0 = 0 m)
La position finale (y = 10 m)
La vitesse finale (v = 14,51 m/s)

On peut alors trouver la vitesse initiale avec

$$2a(y-y_0)=v^2-v_0^2$$
$$2\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot(10m-0m)=\left(14,51\tfrac{m}{s}\right)^2-{v_0}^2$$
$$v_0=\pm 3,813\tfrac{m}{s}$$

La pierre a donc été lancée avec une vitesse de 3,813 m/s vers le haut ou vers le bas. Les deux réponses sont bonnes parce que si vous lancez la pierre vers le haut à 3,813 m/s, elle revient à la hauteur du toit avec une vitesse de même grandeur, mais dirigée vers le bas ce qui donne le même résultat que si on l'avait lancée directement vers le bas à 3,813 m/s.

1.9 LE MOUVEMENT À ACCÉLÉRATION NON CONSTANTE

Que faire maintenant si l'accélération n'est pas constante ? Dans ce cas, il faut oublier les équations du MRUA et retourner à nos définitions de base de la vitesse et de l'accélération.

$$v=\frac{dx}{dt} \qquad\qquad a=\frac{dv}{dt}$$

À partir de ces définitions, on peut trouver la vitesse d'un objet si on connait la formule de la position en fonction du temps. Il suffit de dériver la formule de la position pour y arriver. Pour obtenir l'accélération, on n'a qu'à dériver la formule de la vitesse. Mais que faire si on veut faire le contraire, c'est-à-dire trouver la position si on connait la formule de la vitesse ? Dans le fond, quand on y pense bien, on n'a qu'à faire le contraire de la dérivée !

Exemple 1.9.1

La vitesse d'un objet est donnée par $v=9\tfrac{m}{s^3}\cdot t^2$. À quelle position est l'objet à t = 5 s s'il est à x = 10 m quand t = 0 s ?

La vitesse étant la dérivée de la position, cela signifie que 9 t^2 est la dérivée de la position. On doit donc trouver quelle fonction il aurait fallu dériver pour obtenir 9 t^2. Cette fonction est 3 t^3 (dérivez-la et vous allez voir qu'on obtient 9 t^2). Mais ce n'est pas la seule solution parce que 3 t^3 +3 donnerait également la même dérivée. En fait, la solution la plus générale est

$$x=3\tfrac{m}{s^3}\cdot t^3+\text{constante}$$

Peu importe la valeur de la constante, on obtient toujours 9 t^2 comme dérivée.

Que faire alors de cette constante inconnue ? Il sera possible de la trouver puisqu'on donne une information supplémentaire, c'est-à-dire la position à un certain moment. On appelle ces données les *conditions initiales*. Ici, on dit que l'objet est à $x = 10$ m quand $t = 0$ s. Si on met ces valeurs dans notre solution on a

$$\begin{gathered}x = 3\tfrac{m}{s^3}\cdot t^3 + \text{constante}\\ 10m = 3\tfrac{m}{s^3}\cdot 0^3 + \text{constante}\\ 10m = 0 + \text{constante}\\ \text{constante} = 10m\end{gathered}$$

On a donc la formule suivante pour la position.

$$x = 3\tfrac{m}{s^3}\cdot t^3 + 10m$$

À $t = 5$ s, l'objet est donc à la position

$$\begin{aligned}x &= 3\tfrac{m}{s^3}\cdot (5s)^3 + 10m\\ &= 385m\end{aligned}$$

De façon un peu plus formelle, faire le contraire de la dérivée s'appelle *faire l'intégrale*. Donc 3 t^3 + constante est l'intégrale de 9 t^2. La notation correcte de cette procédure est

$$\int 9\tfrac{m}{s^3}\cdot t^2 dt = 3\tfrac{m}{s^3}\cdot t^3 + \text{constante}$$

Ça semble un peu lourd, mais vous comprendrez pourquoi on a cette notation dans le cours de calcul intégral. Vous pourrez voir aussi que faire l'intégrale d'une fonction est généralement plus difficile que de trouver la dérivée d'une fonction. « Dérive qui veut, intègre qui peut », dit-on.

Ainsi, on peut généraliser cette façon de faire avec les équations suivantes.

Position à partir de la formule de la vitesse

$$x = \int v dt$$

Vitesse à partir de la formule de l'accélération

$$v = \int a dt$$

Vous n'êtes probablement pas encore très familier avec les intégrales et c'est pour cela qu'on va se limiter à des fonctions de positions x, de vitesses v et d'accélérations a qui sont uniquement des polynômes de t. Vous n'avez donc qu'à connaitre l'intégrale de t avec un exposant. Cette intégrale est

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Cela signifie qu'on augmente l'exposant de t de 1 et on divise par le nouvel exposant obtenu. Par exemple, l'intégrale de t^{20} est $\frac{1}{21}t^{21}$.

Exemple 1.9.2

L'accélération d'un objet est donnée par $a = 6\frac{m}{s^3} \cdot t$. À t = 0 s, la position de l'objet est x = 0 m et sa vitesse est v = 20 m/s. Quelles sont la vitesse et la position à t = 5 s ?

Commençons par faire le calcul de la vitesse par l'intégrale. La vitesse est

$$v = \int a dt$$
$$v = \int 6\frac{m}{s^3} \cdot t dt$$
$$v = 3\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + C$$

En utilisant les conditions initiales, on a

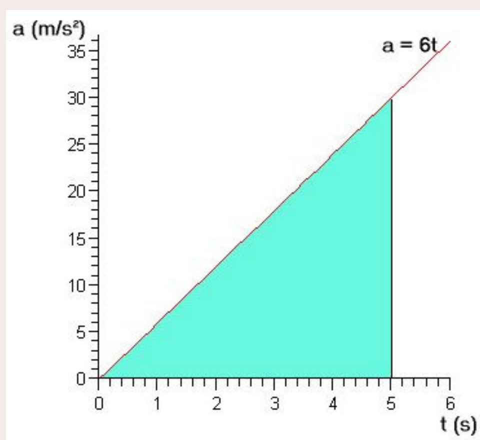
$$v = 3\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + C$$
$$20\frac{m}{s} = 0 + C$$
$$C = 20\frac{m}{s}$$

La vitesse est donc donnée par la formule $v = 3\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + 20\frac{m}{s}$.

À t = 5 s, la vitesse est donc

$$\begin{aligned} v &= 3\frac{m}{s^3} \cdot (5s)^2 + 20\frac{m}{s} \\ &= 95\frac{m}{s} \end{aligned}$$

On aurait pu faire ce calcul par méthode graphique en calculant l'aire suivante en bleu sur le graphique de droite.



L'aire de ce triangle est de 75 m/s. Notez que cette aire est le changement de vitesse. Mais comme on sait que la vitesse initiale est de 20 m/s, cela veut dire que la vitesse est de 95 m/s.

On trouve ensuite la position avec l'intégrale suivante.

$$x = \int v dt$$

$$x = \int \left(3\tfrac{m}{s^3} \cdot t^2 + 20\tfrac{m}{s}\right) dt$$

$$x = 1\tfrac{m}{s^3} \cdot t^3 + 20\tfrac{m}{s} \cdot t + C$$

En utilisant les conditions initiales, on a

$$x = 1\tfrac{m}{s^3} \cdot t^3 + 20\tfrac{m}{s} \cdot t + C$$

$$0 = 0 + 0 + C$$

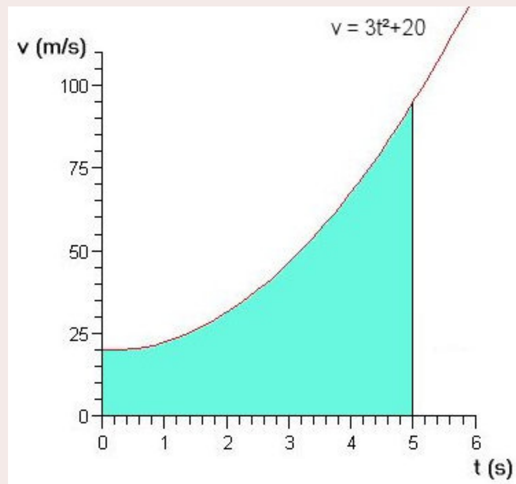
$$C = 0$$

La position est donc donnée par la formule $x = 1\tfrac{m}{s^3} \cdot t^3 + 20\tfrac{m}{s} \cdot t$.

La position à t = 5 s est donc

$$x = 1\tfrac{m}{s^3} \cdot (5s)^3 + 20\tfrac{m}{s} \cdot 5s$$

$$= 225m$$



On peut également faire cette partie par méthode graphique. Pour y arriver, il faut trouver l'aire sous la courbe de la figure de droite.

La difficulté ici, c'est qu'on n'a pas de formule pour calculer une aire ayant cette forme. (En fait, il y en a une, mais vous ne l'avez probablement jamais vue.) Ne soyez pas tristes de ne pas pouvoir calculer cette aire. Dans le fond, vous savez comment faire puisqu'on a calculé l'aire à l'aide de l'intégrale pour arriver à 225 m. Cela signifie qu'on peut calculer l'aire sous les courbes à l'aide d'intégrales. Vous pourrez explorer davantage cette merveilleuse idée dans le cours de calcul intégral.

Remarquez encore une fois que cette aire donne le déplacement, donc le changement de position. Comme la position initiale est de 0 m, on obtient que la position au bout de 5 secondes est 225 m. Si la position initiale avait été de 10 m, la position finale aurait été de 235 m (225 m de plus que la position initiale).

Une petite variante

L'exemple suivant montre comment résoudre un problème dans lequel on donne la vitesse en fonction de la position et non pas en fonction du temps. (Cette façon de faire va plus loin que ce que vous avez besoin de faire dans ce cours. C'est là juste pour vous montrer que c'est possible de résoudre ce genre de problème.)

Exemple 1.9.3

La vitesse d'un objet est donnée par $v = \frac{x}{2s}$. À $t = 0$ s, on a $x = 100$ m. Quelles sont la vitesse et la position à $t = 5$ s ?

On a

$$v = \frac{x}{2s}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2s}$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{2s}dt$$

On peut ensuite intégrer pour obtenir

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{2s}dt$$
$$\ln(x) = \frac{t}{2s} + C$$

En utilisant les conditions initiales, on a

$$\ln(100m) = \frac{0s}{2s} + C$$
$$C = \ln(100m)$$

La position en fonction du temps est donc

$$\ln(x) = \frac{t}{2s} + \ln(100m)$$
$$\ln(x) - \ln(100m) = \frac{t}{2s}$$
$$\ln\frac{x}{100m} = \frac{t}{2s}$$
$$\frac{x}{100m} = e^{t/2s}$$
$$x = 100m \cdot e^{t/2s}$$

À $t = 5$ s, la position est donc

$$x = 100m \cdot e^{5s/2s}$$
$$= 1218m$$

et la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{2s} \\ &= \frac{1218m}{2s} \\ &= 609\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Déplacement

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Vitesse moyenne

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Vitesse instantanée

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Équation du mouvement si la vitesse est constante

$$x = x_0 + vt$$

Moment où deux objets initialement distants de *L* sont à la même place s'ils se déplacent à vitesse constante.

$$t = \frac{L}{v_1 - v_2}$$

Accélération moyenne

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Accélération instantanée

$$a = \frac{dv}{dt}$$

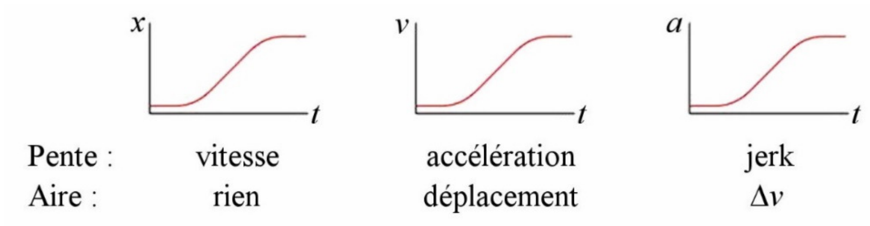
Position à partir de la formule de la vitesse

$$x = \int v\,dt$$

Vitesse à partir de la formule de l'accélération

$$v = \int a\,dt$$

Interprétations graphiques



Équations pour le MRUA

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$
$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

Chute gravitationnelle

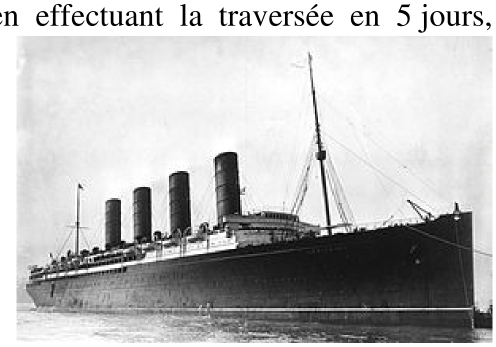
$$a_{\text{gravitationnelle}} = 9{,}8 m/s^2 \text{ vers le bas}$$
$$g = 9{,}8 \tfrac{m}{s^2}$$

EXERCICES

1.3 La vitesse moyenne

1. Quelle était la vitesse moyenne de la capsule Apollo 11 (en km/h) sachant qu'elle s'est rendue à la Lune, distante de 384 400 km, en 72 heures et 49 minutes ?

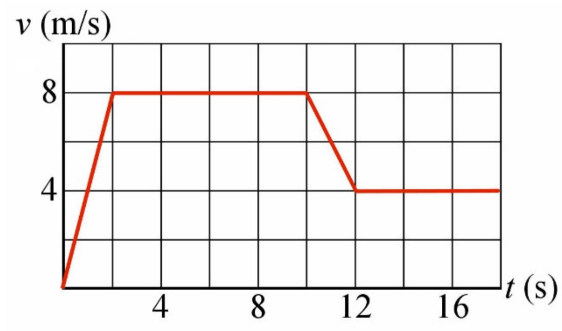
2. En 1907, le paquebot *Lusitania* a battu le record pour la traversée la plus rapide de l'Atlantique pour remporter le ruban bleu. Il battait ainsi le paquebot *Deutschland* qui détenait le ruban bleu depuis 1903 en effectuant la traversée en 5 jours, 11 heures et 54 minutes avec une vitesse moyenne de 23,15 nœuds. Le *Lusitania* a fait mieux en effectuant la traversée avec une vitesse moyenne de 23,99 nœuds. Sachant que 1 nœud = 1,853 km/h, par combien de temps le *Lusitania* a-t-il battu le *Deutschland ?*



en.wikipedia.org/wiki/RMS_Lusitania

1.4 La vitesse instantanée

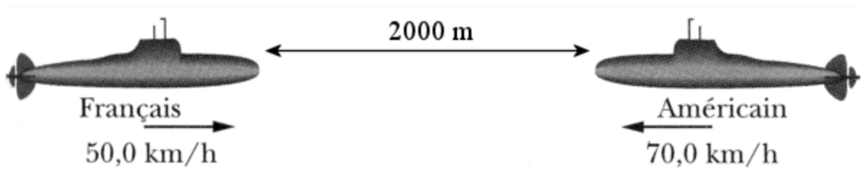
3. La vitesse d'un panda en colère en fonction du temps est donnée par le graphique de droite. Quel est le déplacement du panda entre t = 2 s et t = 14 s ?



1.5 Le mouvement à vitesse constante

4. Richard fait une promenade en ligne droite en marchant avec une vitesse constante de 5 km/h. Combien de temps a duré sa promenade si son déplacement fut de 350 m ?

5. Dans combien de temps et à quel endroit ces deux sous-marins vont-ils entrer en collision ?



Halliday, Resnick, Walker, Ondes, optique et physique moderne, Chenelière/McGraw-Hill, 2004

6. Alors qu'elle était en vacances près d'une rivière, la petite Nicole attrape un poisson avec ses mains, ce qui ne plait pas à une famille de grizzlis qui se régalait tout près de là. Les ours, fâchés, se lancent à la poursuite de la petite Nicole. Affolée, Nicole court à 15 km/h vers la voiture familiale, qui est à une distance de 100 m, alors que les ours, qui sont à 30 m de Nicole au départ, se lancent à sa poursuite avec une vitesse de 25 km/h. Les ours vont-ils attraper Nicole ?

www.shoppedornot.com/shopped-or-not/girl-running-from-bear/

7. En allant de Québec à Boston, Dieudonné va à 110 km/h pendant 4 heures et à 130 km/h pendant 2 heures.

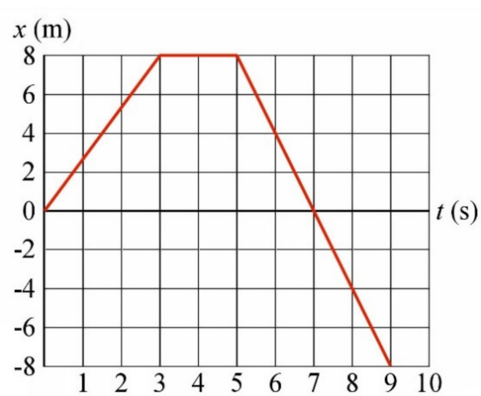
   a) Quel est son déplacement total ?
   b) Quelle est sa vitesse moyenne ?

8. Phil se déplace à 30 m/s pendant 80 s, puis revient sur ses pas avec une vitesse de 20 m/s pendant 15 s.

   a) Quel est son déplacement total ?
   b) Quelle est la distance parcourue par Phil ?
   c) Quelle est sa vitesse moyenne ?
   d) Quelle est sa vitesse scalaire moyenne ?

9. Un tremblement de terre génère deux types d'ondes différentes qui se propagent dans le sol. Il y a les ondes primaires, qui voyagent à 8 km/s et les ondes secondaires qui voyagent à 5 km/s. Ainsi, un observateur situé à une certaine distance de l'épicentre du tremblement de terre recevra les ondes primaires en premier et ensuite les ondes secondaires. À quelle distance de l'épicentre est l'observateur si les ondes secondaires arrivent 40 secondes après les ondes primaires ?

10. La position d'un objet en fonction du temps est donnée par le graphique suivant.



   a) Quel est le déplacement de l'objet entre $t = 0$ s et $t = 9$ s ?
   b) Quelle est la distance parcourue par l'objet entre $t = 0$ s et $t = 9$ s ?
   c) Quelle est la vitesse moyenne entre $t = 3$ s et $t = 9$ s ?
   d) Quelle est la vitesse à $t = 1$ s ?
   e) Quelle est la vitesse à $t = 8$ s ?

11. La position d'un objet est donnée par la formule $x = 4\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - 5\frac{m}{s} \cdot t + 10m$.

   a) Quelle est la vitesse moyenne entre $t = 0$ s et $t = 2$ s ?
   b) Quelle est la vitesse à $t = 2$ s ?

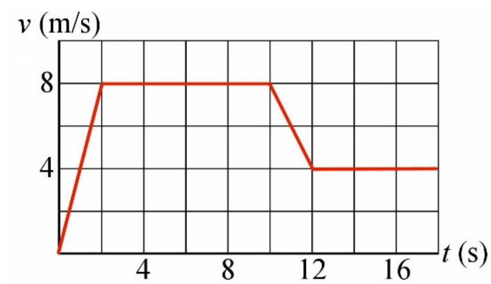
1.6 L'accélération

12. Une Kia Optima turbo passe d'une vitesse nulle à une vitesse de 100 km/h en 6,1 s. Quelle est l'accélération moyenne de la voiture ?

13. Une Acura TSX allant à 120 km/h s'arrête en 3,6 s lors d'un freinage intense. Quelle est l'accélération moyenne de cette voiture lors du freinage ?

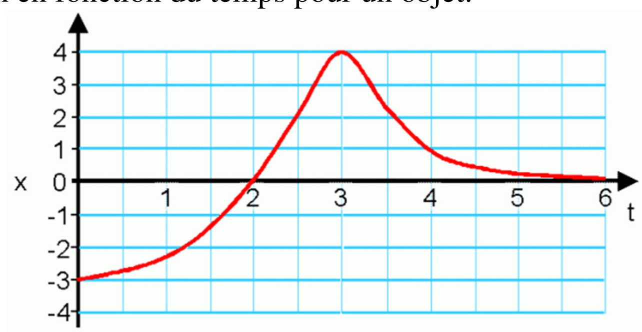
14. La vitesse d'un objet en fonction du temps est donnée par le graphique suivant.

a) Quelle est l'accélération moyenne entre $t = 0$ s et $t = 4$ s ?
b) Quelle est l'accélération moyenne entre $t = 10$ s et $t = 12$ s ?
c) Quelle est l'accélération moyenne entre $t = 4$ s et $t = 8$ s ?
d) Quelle est l'accélération à $t = 1$ s ?
e) Quelle est l'accélération à $t = 14$ s ?



15. Voici le graphique de la position en fonction du temps pour un objet.

a) Quel est le signe de l'accélération à $t = 1$ s ?
b) Quel est le signe de l'accélération à $t = 3$ s ?
c) Quel est le signe de l'accélération à $t = 4$ s ?



www.kwantlen.ca/science/physics/faculty/mcoombes/webtests/xtgraphquiz/xtGraphQuiz.htm

16. La position d'un objet est donnée par la formule $x = 3\frac{m}{s^3} \cdot t^3 - 8\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 2\frac{m}{s} \cdot t - 6m$.

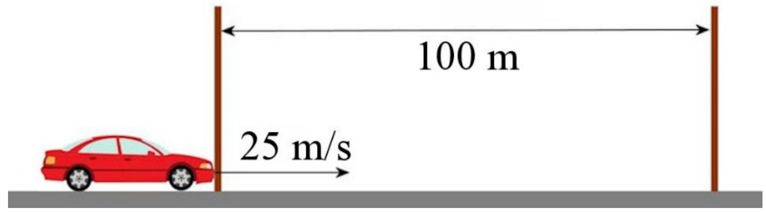
a) Quelle est l'accélération moyenne entre $t = 0$ s et $t = 1$ s ?
b) Quelle est l'accélération à $t = 2$ s ?
c) Quel est le jerk à $t = 1$ s ?

1.7 Le mouvement à accélération constante

17. Une BMW part d'une vitesse nulle pour accélérer avec une accélération de 5 m/s² pendant 6 s.

a) Quelle est le déplacement de la voiture pendant cette période ?
b) Quelle est la vitesse de la voiture 6 s après le départ ?

18. Il y a deux poteaux distants de 100 m sur le bord de la route. Ulysse passe sur cette route en voiture en se déplaçant avec une accélération constante. Quand Ulysse passe à côté du premier poteau, il a une vitesse de 25 m/s. Quand Ulysse passe à côté du deuxième poteau, sa vitesse est maintenant de 15 m/s.



a) Combien de temps a-t-il fallu à Ulysse pour faire le trajet entre les deux poteaux ?
b) Quelle est l'accélération de la voiture ?
c) Supposons qu'il y a un troisième poteau à 100 m à droite du deuxième poteau. Quelle sera la vitesse de la voiture quand elle arrivera à ce troisième poteau si l'accélération reste la même ?

19. Près de la fin de la course de 1600 m (en ligne droite), Mahamadou donne un dernier effort pour terminer la course. Alors qu'il est à 1400 m de la ligne de départ et qu'il a une vitesse de 5 m/s, ses efforts lui permettent d'avoir une accélération constante jusqu'à la fin et de parcourir les 200 derniers mètres en 25 secondes.

a) Quelle est l'accélération de Mahamadou durant ces 200 derniers mètres ?
b) Quelle est la vitesse de Mahamadou quand il arrive à la fin de la course ?

20. Lors d'une compétition de bowling, Olivier lance sa boule avec une vitesse de 10 m/s. Pendant qu'elle se dirige vers les quilles, la friction fait ralentir la boule au rythme de 0,2 m/s², de sorte que la boule frappe les quilles avec une vitesse de 9,65 m/s. Quelle est la distance entre l'endroit où Olivier a lancé sa boule et les quilles ?

21. Une voiture qui accélère traverse un pont de 30 m de long en 1,2 s. À la fin de la traversée du pont, la vitesse de la voiture était de 20 m/s. Quelle était la vitesse de la voiture au début de la traversée du pont ?

22. La vitesse d'une voiture qui freine avec une accélération constante passe de 30 m/s à 24 m/s sur une distance de 32 m. Quelle est la distance d'arrêt de cette voiture si elle freine avec la même accélération et que la vitesse initiale était de 42 m/s ?

23. En traversant le parc de la Vérendrye en pleine nuit à 108 km/h, Marie-Pascale aperçoit soudainement un orignal en plein milieu de la rue, à 100 m devant sa voiture. Sa voiture continue alors de se déplacer à 108 km/h pendant 0,5 seconde, le temps que Marie-Pascale réagisse et applique les freins, puis la voiture ralentit avec une accélération de 4 m/s². Va-t-elle frapper l'orignal ?

24. Voici les accélérations de Didier et de Gilles lors d'une course de 100 m.

Didier : accélère à 5 m/s² pendant 1,8 seconde puis décélère à 0,1 m/s² jusqu'à la fin

Gilles : accélère à 6 m/s² pendant 1,7 seconde puis décélère à 0,24 m/s² jusqu'à la fin

Évidemment, ils avaient tous les deux une vitesse nulle au départ. Qui remporte la course et par combien de temps ?

25. Deux fusées sont initialement au repos l'une à côté de l'autre. La première fusée part avec une accélération constante de 5 m/s², alors que l'autre fusée part deux secondes plus tard avec une accélération constante de 6 m/s². Où et quand la deuxième fusée va-t-elle rattraper la première ?

26. Une voiture démarre du repos avec une accélération constante de 2 m/s² et ralentit ensuite avec une accélération constante de –5 m/s² jusqu'à ce qu'elle s'arrête. Si le déplacement a été de 400 m, quelle a été la vitesse maximale de la voiture ?

27. Voici la position d'un objet à trois instants.

$$x = 5 \text{ m à } t = 0 \text{ s}$$
$$x = 5 \text{ m à } t = 1 \text{ s}$$
$$x = 9 \text{ m à } t = 2 \text{ s}$$

Où l'objet sera-t-il à $t = 5$ s ?

1.8 La chute libre

28. Voici un vidéo montrant une curieuse activité de chute de citrouilles
https://www.youtube.com/watch?v=tbNKVmWj1K4
On laisse tomber la citrouille d'une hauteur de 12 m.

a) Quelle est la vitesse de la citrouille quand elle frappe la voiture ?
b) Combien de temps a duré à chute de la citrouille ?

29. Arthur lance une pierre vers le haut avec une vitesse de 28 m/s à partir du bord d'une falaise de 80 m de haut.

a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la pierre (hauteur mesurée à partir du haut de la falaise) ?

onlinephys.com/kinematics1Dc.html

b) À quel moment la pierre est-elle à 25 m au-dessus de son point de départ ?
c) À quel moment la pierre est-elle 25 m en dessous de son point de départ ?
d) Quelle est la vitesse de la pierre quand elle est à une hauteur de 20 m au-dessus de son point de départ ?
e) À quels moments la grandeur de la vitesse de la pierre est-elle de 10 m/s ?
f) À quelle hauteur est la pierre quand la grandeur de la vitesse est de 12 m/s ?
g) Quelle est la vitesse de la pierre quand elle arrive au bas de la falaise ?
h) Quel est le temps de vol total de la pierre ?

30. Tony reçoit une balloune remplie d'eau se déplaçant à 24 m/s sur la tête. Elle a été lancée par Tryphon à partir d'une fenêtre située 10 m au-dessus de la tête de Tony. Quelle était la vitesse initiale du ballon ?

31. Julien lance une balle directement vers le haut. À quelle vitesse a été lancée la balle si elle monte jusqu'à une hauteur de 80 m au-dessus de son point de départ ?

32. Hubert botte un ballon directement vers le haut avec son pied. Quelle était la vitesse initiale du ballon s'il est revenu sur le pied d'Hubert après un vol de 12 s ?

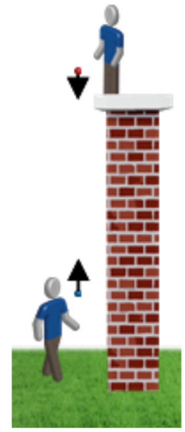
33. On lance un objet directement vers le haut avec une vitesse v_0. Après avoir monté de 5 m, la vitesse de l'objet n'est plus que de 30 % de sa vitesse initiale v_0. Quelle est la valeur de v_0 ?

34. Une fusée, initialement arrêtée au sol, décolle verticalement. Pendant que ses moteurs fonctionnent, la fusée a une accélération de 4 m/s² vers le haut. Au bout de 20 s, les moteurs s'arrêtent et la fusée est en chute libre.

a) Jusqu'à quelle hauteur va monter cette fusée ?
b) Au bout de combien de temps cette fusée revient-elle au sol ?

35. Kim laisse tomber une balle, sans lui donner de vitesse, du haut de la tour du CN à partir d'une hauteur de 400 m. 1 seconde plus tard, Léon lance une balle vers le bas avec une vitesse de 12 m/s. La balle de Léon va-t-elle dépasser la balle de Kim, et si oui, à quelle hauteur et au bout de combien de temps ?

36. Johnny, en haut d'une tour, lance une balle vers le bas à 5 m/s alors que Frédérique, au sol, lance une balle vers le haut avec une vitesse de 15 m/s. Les deux balles partent en même temps. Initialement, la balle de Frédérique est à 1 m du sol et la balle de Johnny est à 51 m du sol.



a) Au bout de combien de temps après le départ des balles vont-elles se frapper ?
b) À quelle distance du sol les balles vont-elles se frapper ?
c) Quelle sera la vitesse des balles lors de la collision ?

1.9 Le mouvement à accélération non constante

37. La vitesse d'une voiture téléguidée est donnée par la formule

$$v = 2\tfrac{m}{s^4}\cdot t^3 - 6\tfrac{m}{s^3}\cdot t^2 + 4\tfrac{m}{s^2}\cdot t + 2\tfrac{m}{s}$$

a) Quelle est la position de la voiture à $t = 2$ s si elle était initialement à $x = 5$ m ?
b) Quelle est l'accélération de la voiture à $t = 2$ s ?

38. La vitesse initiale d'un objet est de 4 m/s et son accélération est donnée par la formule

$$a = 36\tfrac{m}{s^4}\cdot t^2 + 10\tfrac{m}{s^2}$$

a) Quelle est la vitesse de cet objet à $t = 1$ s ?
b) Quel est le déplacement de cet objet entre $t = 0$ s et $t = 4$ s ?

Défis

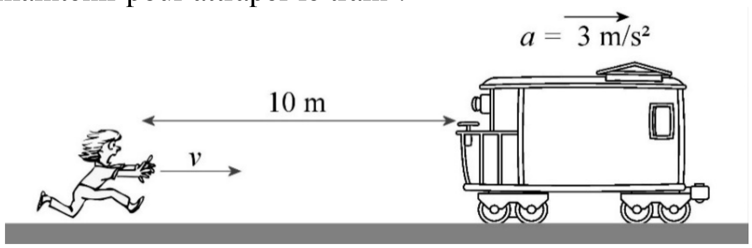
(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

39. Le 30 mars 2012, Larry Dixon parcourait 400 m en 4,503 secondes avec son dragster. On va simplifier un peu en supposant qu'il avait une accélération constante jusqu'à atteindre une vitesse maximale de 534 km/h qu'il a maintenue jusqu'à l'arrivée.

a) Quelle fut la durée de la période d'accélération ?
b) Quelle était l'accélération du dragster au début de son mouvement ?

www.pinterest.com/rlowen31/top-fuel-dragster/

40. Sophie veut embarquer dans un train. Pour y arriver, elle court sur la voie en direction de l'arrière du train. Quand elle est à 10 m du train, ce dernier part avec une accélération constante de 3 m/s². Quelle est la vitesse minimale de course que Sophie doit maintenir pour attraper le train ?



www.clipartkid.com/train-cars-cliparts/ et www.clipartkid.com/running-work-scared-cliparts/

RÉPONSES

1.3 La vitesse moyenne

1. 5279 km/h
2. 4 h 37 min

1.4 La vitesse instantanée

3. 84 m

1.5 La mouvement à vitesse constante

4. 4 min 12 s
5. Dans 60 secondes. La collision est à 833 m à droite de la position initiale du sous-marin français.
6. Les ours la rattrapent avant qu'elle arrive à la voiture et la petite Nicole doit gentiment redonner le poisson aux grizzlis.
7. a) 700 km b) 116,7 km/h
8. a) 2100 m b) 2700 m c) 22,1 m/s d) 28,42 m/s
9. 533 km
10. a) -8 m b) 24 m c) -2,67 m/s d) 2,67 m/s e) -4 m/s
11. a) 3 m/s b) 11 m/s

1.6 L'accélération

12. 4,554 m/s²
13. - 9,26 m/s²
14. a) 2 m/s² b) -2 m/s² c) 0 m/s² d) 4 m/s² e) 0 m/s²
15. a) positif b) négatif c) positif

16. a) -7 m/s² b) 20 m/s² c) 18 m/s³

1.7 Le mouvement à accélération constante

17. a) 90 m b) 30 m/s
18. a) 5 s b) -2 m/s² c) La voiture ne se rend pas jusqu'au troisième poteau
19. a) 0,24 m/s² b) 11 m/s
20. 17,19 m
21. 30 m/s
22. 174,2 m
23. Elle frappe l'orignal
24. Gilles gagne par 0,796 s
25. 22,954 s après le départ de la première fusée, à 1317 m du point de départ
26. 33,81 m/s
27. 45 m

1.8 La chute libre

28. a) 15,34 m/s b) 1,565 s
29. a) 40 m au-dessus du haut de la falaise b) 1,108 s et 4,607 s c) 6,499 s d) ±19,8 m/s e) 1,837 s et 3,878 s f) 32,65 m g) -48,50 m/s h) 7,806 s
30. ±19,49 m/s
31. 39,6 m/s
32. 58,8 m/s
33. 10,38 m/s
34. a) 1127 m b) 43,326 s
35. La balle de Léon rattrape la balle de Kim 2,227 s après le départ de la balle de Léon, à une altitude de 348,97 m
36. a) 2,5 s b) 7,875 m du sol c) La balle de Johnny va à 29,5 m/s vers le bas et la balle de Frédérique va à 9,5 m/s vers le bas.

1.9 Le mouvement à accélération non constante

37. a) 9 m b) 4 m/s²
38. a) 26 m/s b) 864 m

Défis

39. a) 3,613 s b) 41,06 m/s²
40. 7,746 m/s