Solutionnaire du chapitre 14

1. a) L'excentricité est

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1 \\
&= \frac{\left(70\,000 \frac{m}{s}\right)^2 \left(5\times 10^{10} m\right)}{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 2\times 10^{30} kg} - 1 \\
&= 0,8461
\end{aligned}
$$

b) Puisque l'excentricité est entre 0 et 1, l'orbite est elliptique.

c) La distance est

$$
\begin{aligned}
r &= r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta} \\
&= 5\times 10^{10} m \frac{1+0,8461}{1+0,8461\cdot\cos 90^\circ} \\
&= 9,23\times 10^{10} m
\end{aligned}
$$

Ce qui est 92,3 millions de km.

2. Le temps entre les deux configurations a et b correspond au quart de la période de la planète *X*. Il est donc égal à

$$
t = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{r_X^3}{GM}}
$$

On doit trouver à quel pourcentage de la période de la planète *Y* ce temps correspond. On doit donc faire le rapport de ce temps et de la période de la planète *Y*. On va appeler ce rapport *f*.

$$\begin{aligned} f &= \frac{t}{T_Y} \\ &= \frac{\frac{1}{4} 2\pi\sqrt{\frac{r_X^3}{GM}}}{2\pi\sqrt{\frac{r_Y^3}{GM}}} \\ &= \frac{\sqrt{r_X^3}}{4\sqrt{r_Y^3}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r_X^3}{r_Y^3}} \end{aligned}$$

Puisque $r_X = 3r_Y$, on arrive à

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(3r_Y)^3}{r_Y^3}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{27r_Y^3}{r_Y^3}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{27} \\ &= 1,299 \end{aligned}$$

Le déplacement angulaire de la planète Y est donc

$$\theta = 1,299 \cdot 360° = 467,7°$$

3. La distance est

$$\begin{aligned} r_p &= a(1-e) \\ &= 1,496\times 10^{11} m (1-0,01671) \\ &= 1,471\times 10^{11} m \end{aligned}$$

4. La distance est

$$\begin{aligned} r_a &= a(1+e) \\ &= 1,496\times 10^{11} m \cdot (1+0,01671) \\ &= 1,521\times 10^{11} m \end{aligned}$$

5. La vitesse est

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg}{1,496\times 10^{11}\,m}\frac{1+0,01671}{1-0,01671}} \\ &= 30\,286\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

6. La vitesse est

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg}{1,496\times 10^{11}\,m}\frac{1-0,01671}{1+0,01671}} \\ &= 29\,291\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

7. La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(1,496\times 10^{11}\,m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg}} \\ &= 3,156\times 10^{7}\,s \\ &= 365,26\,j \end{aligned}$$

8. L'énergie est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GMm}{2a} \\ &= -\frac{6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}\,kg\cdot 5,972\times 10^{24}\,kg}{2\cdot 1,496\times 10^{11}\,m} \\ &= -2,649\times 10^{33}\,J \end{aligned}$$

9. En prenant les valeurs au périhélie, le moment cinétique est

$$\begin{aligned} L &= mv_p r_p \\ &= 5{,}972\times10^{24}kg\cdot 30\,286\tfrac{m}{s}\cdot\left(1{,}471\times10^{11}m\right) \\ &= 2{,}661\times10^{40}\tfrac{kgm^2}{s} \end{aligned}$$

10. a) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{GM_c\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)} \\ &= \sqrt{6{,}674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1{,}9885\times10^{30}kg\cdot\left(\frac{2}{1{,}5\times10^{11}m}-\frac{1}{1{,}496\times10^{11}m}\right)} \\ &= 29{,}705\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

b) On trouve l'angle avec la formule suivante.

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} r &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \\ 1{,}5\times10^{11}m &= \frac{1{,}496\times10^{11}m\cdot\left(1-0{,}01671^2\right)}{1+0{,}01671\cdot\cos\theta} \end{aligned}$$

En isolant l'angle, on obtient

$$\begin{aligned} \cos\theta &= -0{,}1762 \\ \theta &= 100{,}2° \end{aligned}$$

c) Comme le moment cinétique est conservé, on doit avoir

$$L = mvr\sin\theta$$

On a donc

$$L = mvr\sin\theta$$
$$2{,}661\times10^{40}\,\tfrac{kgm^2}{s} = 5{,}972\times10^{24}kg\cdot 29\,705\,\tfrac{m}{s}\cdot 1{,}5\times10^{11}m\cdot\sin\theta$$
$$\sin\theta = 0{,}99986$$
$$\theta = 89{,}05° \text{ ou } 90{,}95°$$

(Cette valeur est très senseible aux arrondissements…)

11. 1) Dans la première possibilité, on suit une orbite avec les caractéristiques suivantes.

$$r_p = 1{,}5\times10^{11}m$$
$$r_a = 7{,}8\times10^{11}m$$

Le demi-grand axe de cette orbite de transfert est

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{7{,}8\times10^{11}m + 1{,}5\times10^{11}m}{2} = 4{,}65\times10^{11}m$$

Le temps sera donc de

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\ &= \pi\sqrt{\frac{\left(4{,}65\times10^{11}m\right)^3}{6{,}674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1{,}9885\times10^{30}kg}} \\ &= 8{,}647\times10^7 s \\ &= 1000{,}8\,jours \end{aligned}$$

2) Dans la deuxième possibilité, on suit premièrement une orbite qui fait le transfert de la Terre à Vénus avec les caractéristiques suivantes.

$$r_p = 1\times10^{11}m$$
$$r_a = 1{,}5\times10^{11}m$$

Le demi-grand axe de cette orbite de transfert est

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{1{,}5\times10^{11}m + 1\times10^{11}m}{2} = 1{,}25\times10^{11}m$$

Le temps pour cette première partie est donc

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\
&= \pi \sqrt{\frac{\left(1,25\times 10^{11} m\right)^3}{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times 10^{30} kg}} \\
&= 1,205\times 10^{7} s \\
&= 139,5\, jours
\end{aligned}$$

On suit ensuite une orbite qui fait le transfert de Vénus à Jupiter avec les caractéristiques suivantes.

$$\begin{aligned}
r_p &= 1\times 10^{11} m \\
r_a &= 7,8\times 10^{11} m
\end{aligned}$$

Le demi-grand axe de cette orbite de transfert est

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{7,8\times 10^{11} m + 1\times 10^{11} m}{2} = 4,4\times 10^{11} m$$

Le temps pour cette seconde partie est donc

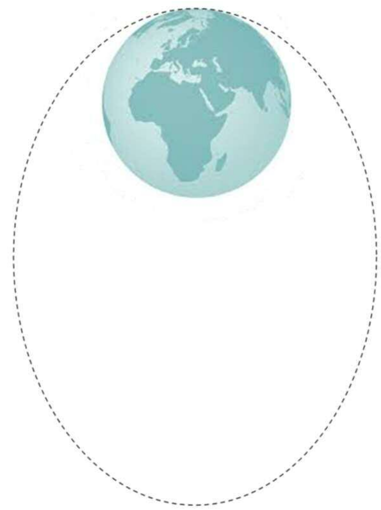
$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \\
&= \pi \sqrt{\frac{\left(4,4\times 10^{11} m\right)^3}{6,674\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times 10^{30} kg}} \\
&= 7,959\times 10^{7} s \\
&= 921,2\, jours
\end{aligned}$$

Le temps total de ce deuxième trajet est donc de

139,5 jours + 921,2 jours = 1060,7 jours

La première possibilité est donc la meilleure.

12. En lançant tangentiellement, on a l'orbite suivante.



Avec cette orbite, r_p est le rayon de la Terre et r_a est la plus grande distance entre le centre de la Terre et l'objet.

Avec la conservation de l'énergie, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a}$$

Puisque la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 0,85 v_{lib} \\ &= 0,85\sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{aligned}$$

On arrive à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(0,85\sqrt{\frac{2GM}{R}}\right)^2 - \frac{GMm}{R} &= -\frac{GMm}{2a} \\ \frac{1}{2}m(0,85)^2\frac{2GM}{R} - \frac{GMm}{R} &= -\frac{GMm}{2a} \\ (0,85)^2\frac{1}{R} - \frac{1}{R} &= -\frac{1}{2a} \\ \left((0,85)^2 - 1\right)\frac{1}{R} &= -\frac{1}{2a} \\ a &= \frac{R}{2\left(1-(0,85)^2\right)} \\ a &= \frac{200R}{111} \end{aligned}$$

Puisque

$$r_p + r_a = 2a$$

On arrive à

$$r_a + R = 2\frac{200R}{111}$$
$$r_a = \left(\frac{400}{111} - 1\right)R$$
$$r_a = \frac{289}{111}R$$

Ceci est la distance entre le centre de la Terre et l'objet. La distance entre l'objet et la surface est

$$d = r_a - R$$
$$d = \frac{289}{111}R - R$$
$$d = \frac{178}{111}R$$
$$d = \frac{178}{111}\cdot 6371km$$
$$d = 10\,217km$$

13. Pour trouver le temps, on utiliser la 2e loi de Kepler.

$$\Delta A = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2}\Delta t$$

Si la comète fait un tour complet, on a

$$A_{ellipse} = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2}T$$

Si la comète passe du point 1 au point 2, l'équation donne

$$A_{gris} = \frac{\sqrt{GM_c r_p (1+e)}}{2}t$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on arrive a

$$\frac{A_{gris}}{A_{ellipse}} = \frac{t}{T}$$

(Ce qui n'est pas étonnant, puisque la loi de Kepler affirme que les aires sont les mêmes dans des temps égaux. Le rapport des aires est donc égal au rapport des temps.)

Il reste à trouver l'aire de la zone en gris. Cette aire

$$\begin{aligned}
A &= A_{\text{moitié de l'ellipse}} - A_{\text{triangle}} \\
&= \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{2} - \frac{(2b)\cdot c}{2} \\
&= \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{2} - bc \\
&= \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{2} - a\sqrt{1-e^2}\cdot ae \\
&= \pi a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{\pi}\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{A_{gris}}{A_{ellipse}} = \frac{t}{T}$$

$$\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{\pi}\right)}{\pi a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{t}{T}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{\pi}\right) = \frac{t}{T}$$

Le temps est donc

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{\pi}\right) = \frac{t}{T} \\
\left(\frac{1}{2}-\frac{0,87}{\pi}\right) = \frac{t}{50a} \\
t = 11,15a
\end{gathered}$$

14. On a 3 équations et 3 inconnus

$$v_P = \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}} \quad \rightarrow \quad 2\,200\tfrac{m}{s} = \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}}$$
$$v_A = \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}} \quad \rightarrow \quad 1\,700\tfrac{m}{s} = \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}} \quad \rightarrow \quad 3\,888\,000s = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$

Pour résoudre ce système, on va premièrement multiplier la première équation par la deuxième équation.

$$2\,200\tfrac{m}{s}\cdot 1\,700\tfrac{m}{s} = \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}}\cdot\sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$
$$3,74\times 10^6\,\tfrac{m^2}{s^2} = \frac{GM_c}{a}$$

Si on multiplie maintenant la racine de cette équation par la troisième, on obtient

$$\sqrt{3,74\times 10^6\,\tfrac{m^2}{s^2}}\cdot 3\,888\,000s = \sqrt{\frac{GM_c}{a}}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$
$$7,519034\times 10^9\,m = 2\pi\sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{a^3}{GM_c}}$$
$$7,519034\times 10^9\,m = 2\pi a$$
$$a = 1,196691\times 10^9\,m$$
$$a = 1196\,691km$$

De là, on peut trouver la masse de la planète

$$3\,888\,000s = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_c}}$$
$$3\,888\,000s = 2\pi\sqrt{\frac{\left(1,196691\times 10^9\,m\right)^3}{6,674\times 10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\,M_c}}$$
$$M_c = 6,706\times 10^{25}\,kg$$

On peut trouver l'excentricité avec une des formules de vitesse. On peut aussi la trouver en divisant les deux formules de vitesse.

$$\frac{2\,200\,\frac{m}{s}}{1\,700\,\frac{m}{s}} = \frac{\sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}}}{\sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1-e}{1+e}}}$$

$$\frac{2\,200\,\frac{m}{s}}{1\,700\,\frac{m}{s}} = \sqrt{\frac{GM_c}{a}\frac{1+e}{1-e}}\cdot\sqrt{\frac{a}{GM_c}\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\frac{22}{17} = \frac{1+e}{1-e}$$

$$22(1-e) = 17(1+e)$$

$$22 - 22e = 17 + 17e$$

$$5 = 39e$$

$$e = \frac{5}{39} = 0{,}1282$$

15. a) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2GM_{soleil}}{r_p}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1{,}9885\times 10^{30}\,kg}{5\times 10^{10}\,m}} \\ &= 72{,}86\,\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

b) Comme on sait que l'énergie mécanique est nulle sur une trajectoire parabolique, on peut trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$0 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r}$$

$$0 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-6{,}674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1{,}9885\times 10^{30}\,kg}{2\times 10^{11}\,m}$$

$$v = 36{,}43\,\tfrac{km}{s}$$

16. On peut trouver la vitesse avec la formule de l'excentricité.

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

$$1,2 = \frac{v_p^2 \left(5\times10^{10} m\right)}{6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30} kg} - 1$$

$$v_p = 76,42 \tfrac{km}{s}$$

b) On pourra trouver sa vitesse avec la conservation de l'énergie. Sur cette trajectoire, l'énergie est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

On a donc

$$-\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$-\frac{GM_c(1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM_c}{r}$$

$$\frac{-6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30} kg \cdot (1-1,2)}{2\cdot 5\times10^{10} m} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{-6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30} kg}{2\times10^{11} m}$$

$$2,6542\times10^6 \tfrac{J}{kg} = \frac{1}{2}v^2 + -6,6356\times10^6 \tfrac{J}{kg}$$

$$v = 43,10 \tfrac{km}{s}$$

17. a) Pour connaitre la forme de l'orbite, on va calculer le signe de l'énergie mécanique de la comète. Cette énergie est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

On n'a pas la masse de la comète, mais de toute façon, on ne veut savoir que le signe de l'énergie. On a donc

$$\begin{aligned} E_{mec} &= m\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_T}{r}\right) \\ &= m\left(\frac{1}{2}\left(100\tfrac{m}{s}\right)^2 - \frac{6,674\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg}{10^{11}m}\right) \\ &= m\left(1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Comme la valeur est positive, l'orbite est hyperbolique.

b) On sait que

$$E_{mec} = m\left(1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}\right)$$

Au point le plus près de la Terre, on aura donc

$$\begin{aligned} m\left(1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}\right) &= \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_T m}{r_p} \\ 1014,2872\tfrac{m^2}{s^2} &= \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p} \end{aligned}$$

Il nous faut une deuxième équation pour résoudre. Cette deuxième équation est la conservation du moment cinétique.

$$\begin{aligned} vr\sin\psi &= v_p r_p \\ 100\tfrac{m}{s}\cdot 10^{11}m\cdot\sin 0,5^\circ &= v_p r_p \\ 8,7265\times10^{10}\tfrac{m^2}{s} &= v_p r_p \\ v_p &= \frac{8,7265\times10^{10}\tfrac{m^2}{s}}{r_p} \end{aligned}$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation de l'énergie, on arrive à

$$1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}=\frac{1}{2}v_p^2-\frac{GM_T}{r_p}$$

$$1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{8,7265\times10^{10}\tfrac{m^2}{s}}{r_p}\right)^2-\frac{GM_T}{r_p}$$

$$1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}=\frac{3,8076211\times10^{21}\tfrac{m^4}{s^2}}{r_p^2}-\frac{3,9857128\times10^{14}\tfrac{m^3}{s^2}}{r_p}$$

$$1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}r_p^2=3,8076211\times10^{21}\tfrac{m^4}{s^2}-3,9857128\times10^{14}\tfrac{m^3}{s^2}r_p$$

$$1014,2872\cdot r_p^2+3,9857128\times10^{14}m\cdot r_p-3,8076211\times10^{21}m^2=0$$

La solution de cette équation quadratique est

$$\begin{aligned}r_p&=\frac{-3,9857128\times10^{14}m\pm\sqrt{\left(3,9857128\times10^{14}m\right)^2-4\cdot1014,2872\cdot3,8076211\times10^{21}m^2}}{2\cdot1014,2872}\\&=\frac{-3,9857128\times10^{14}m\pm3,9855190\times10^{14}m}{2\cdot1014,2872}\\&=\frac{1,938\times10^{10}m}{2\cdot1014,2872}\\&=9\,553\,km\end{aligned}$$

Comme cette valeur est plus grande que le rayon de la Terre, la comète ne frappe pas la Terre. Elle passe cependant très près (à 3182 km de la surface).

c) On peut trouver l'excentricité avec la formule de l'énergie

$$E_{mec}=-\frac{GM_cm(1-e)}{2r_p}$$

$$1014,2872\tfrac{m^2}{s^2}\cdot m=-\frac{6,674\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,972\times10^{24}kg\cdot m(1-e)}{2\left(9,553\times10^6m\right)}$$

$$(1-e)=-4,86\times10^{-5}$$

$$e=1,0000486$$

18. Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg}{\left(6,471\times10^{6}m\right)^2} \\ &= 9,518\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

19. Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GMr}{R^3} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 5,371\times10^{6}m}{\left(6,371\times10^{6}m\right)^3} \\ &= 8,278\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

20. a) Le champ est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg}{\left(1,737\times10^{6}m\right)^2} \\ &= 1,624\,\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

b) Le poids de la personne est

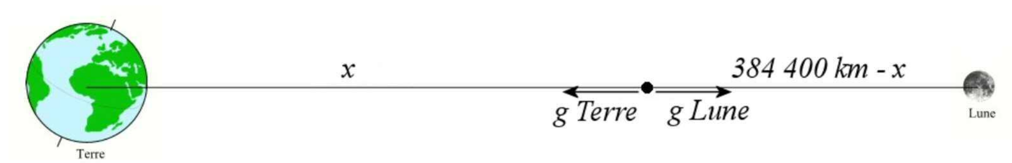
$$\begin{aligned} P &= mg \\ &= 70kg\cdot 1,624\,\tfrac{N}{kg} \\ &= 113,68N \end{aligned}$$

c) Comme le poids de cette personne sur Terre est de 70 kg x 9,8 N/kg = 686 N, le rapport entre le poids sur la Lune et le poids sur Terre est

$$\frac{113,68N}{686N} = 0,166$$

Le poids sur la Lune est donc seulement 16,6 % du poids de la personne sur Terre.

21. On a la configuration suivante.



En additionnant les champs, on a

$$g = -\frac{GM_{Terre}}{x^2} + \frac{GM_{Lune}}{\left(3,844 \times 10^8 m - x\right)^2}$$

Puisqu'on veut que le champ soit nul, on doit avoir

$$0 = -\frac{GM_{Terre}}{x^2} + \frac{GM_{Lune}}{\left(3,844 \times 10^8 m - x\right)^2}$$

$$\frac{GM_{Terre}}{x^2} = \frac{GM_{Lune}}{\left(3,844 \times 10^8 m - x\right)^2}$$

$$\frac{M_{Terre}}{x^2} = \frac{M_{Lune}}{\left(3,844 \times 10^8 m - x\right)^2}$$

$$\left(3,844 \times 10^8 m - x\right)^2 = \frac{M_{Lune}}{M_{Terre}} x^2$$

$$\left(3,844 \times 10^8 m - x\right)^2 = \frac{7,34 \times 10^{22} kg}{5,972 \times 10^{24} kg} x^2$$

$$\left(3,844 \times 10^8 m - x\right)^2 = 0,01229 x^2$$

$$1,4776 \times 10^{17} m^2 - 7,688 \times 10^8 m \cdot x + x^2 = 0,01229 x^2$$

$$1,4776 \times 10^{17} m^2 - 7,688 \times 10^8 m \cdot x + 0,9877 x^2 = 0$$

La solution de cette équation quadratique est

$$x = 346\ 037 \text{ km}$$

Le champ est donc nul à 346 037 km de la Terre.

(Il y a une autre solution à 432 330 km de la Terre. À cet endroit, les champs sont de mêmes grandeurs, mais le champ total n'est pas nul, car les champs sont dans la même direction.)

22. On va utiliser un axe des x vers la droite et un axe des y vers le haut. Le champ fait par la Lune est vers la gauche, donc vers les x négatifs. Le champ fait par la Lune est

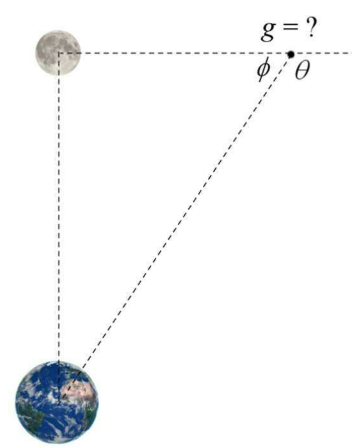
$$\begin{aligned} g_{Lx} &= -\frac{GM}{r^2} \\ &= -\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}\,kg}{\left(1,5\times10^8\,m\right)^2} \\ &= -2,177\times10^{-4}\,\frac{N}{kg} \end{aligned}$$

Pour trouver la grandeur du champ fait par la Terre, il faut savoir la distance entre la Terre et l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette distance est

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(3,844\times10^8\,m\right)^2+\left(1,5\times10^8\,m\right)^2} \\ &= 4,126\times10^8\,m \end{aligned}$$

La grandeur du champ fait par la Terre est donc

$$\begin{aligned} g_T &= \frac{GM}{r^2} \\ &= \frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg}{\left(4,126\times10^8\,m\right)} \\ &= 2,341\times10^{-3}\,\frac{N}{kg} \end{aligned}$$



Pour séparer ce champ en composante, on doit connaitre l'angle θ. On trouve premièrement l'angle ϕ.

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{384\,400}{150\,000} \\ \phi &= 68,68° \end{aligned}$$

L'angle θ est donc

$$\begin{aligned}\theta &= 180° - \phi \\ &= 180 - 68,68° \\ &= 111,32°\end{aligned}$$

Les composantes du champ de la Terre sont donc

$$\begin{aligned}g_{Tx} &= 2,341\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\cos\left(-111,32°\right) \\ &= -8,510\times10^{-4}\,\tfrac{N}{kg}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{Ty} &= 2,341\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\sin\left(-111,32°\right) \\ &= -2,181\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\end{aligned}$$

Les composantes du champ total sont donc

$$\begin{aligned}g_x &= g_{Lx} + g_{Tx} \\ &= -2,177\times10^{-4}\,\tfrac{N}{kg} - 8,510\times10^{-4}\,\tfrac{N}{kg} \\ &= -1,069\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_y &= g_{Ly} + g_{Ty} \\ &= 0 + -2,181\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg} \\ &= -2,181\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\end{aligned}$$

La grandeur du champ est donc

$$\begin{aligned}g &= \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \\ &= \sqrt{\left(1,069\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\right)^2 + \left(2,181\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\right)^2} \\ &= 2,429\times10^{-3}\,\tfrac{N}{kg}\end{aligned}$$

23. a) La force est

$$\begin{aligned} F &= \frac{GMm}{r^2} \\ &= \frac{6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5{,}972\times10^{24}\,kg\cdot 7{,}34\times10^{22}\,kg}{\left(3{,}844\times10^{8}\,m\right)^2} \\ &= 1{,}980\times10^{20}\,N \end{aligned}$$

b) Par la troisième loi de Newton, la force est aussi

$$1{,}980\times10^{20}\,N$$

24. La force de marée faite par le Soleil est

$$F_{Soleil} = \frac{2GM_{Soleil}mR_{Terre}}{r^3_{Soleil-Terre}}$$

et la force de marée faite par la Lune est

$$F_{Lune} = \frac{2GM_{Lune}mR_{Terre}}{r^3_{Lune-Terre}}$$

Le rapport des deux est donc

$$\begin{aligned} \frac{F_{Lune}}{F_{Soleil}} &= \frac{\left(\frac{2GM_{Lune}mR_{Terre}}{r^3_{Lune-Terre}}\right)}{\left(\frac{2GM_{Soleil}mR_{Terre}}{r^3_{Soleil-Terre}}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{M_{Lune}}{r^3_{Lune-Terre}}\right)}{\left(\frac{M_{Soleil}}{r^3_{Soleil-Terre}}\right)} \\ &= \frac{M_{Lune}r^3_{Soleil-Terre}}{M_{Soleil}r^3_{Lune-Terre}} \\ &= \frac{7{,}34\times10^{22}\,kg\cdot\left(1{,}496\times10^{11}\,m\right)^3}{1{,}9885\times10^{30}\,kg\cdot\left(3{,}844\times10^{8}\,m\right)^3} \\ &= 2{,}18 \end{aligned}$$

25. On doit avoir

$$F_{marées} = 1\% \text{ de } mg$$
$$\frac{2GM_{Lune}mR_{Terre}}{r^3_{Lune-Terre}} = 0,01mg$$

On a donc

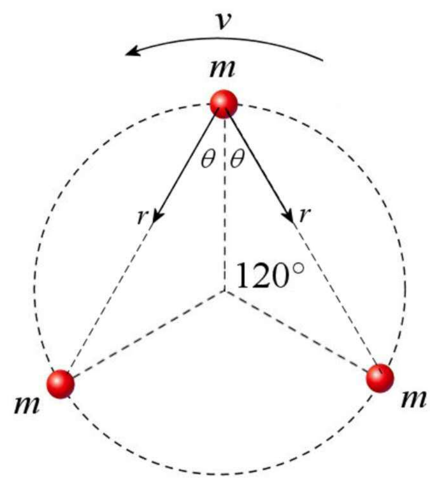
$$\frac{2GM_{Lune}R_{Terre}}{r^3_{Lune-Terre}} = 0,01g$$
$$r_{Lune-Terre} = \sqrt[3]{\frac{2GM_{Lune}R_{Terre}}{0,01g}}$$
$$r_{Lune-Terre} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times 10^{22}\,kg\cdot 6,371\times 10^{6}\,m}{0,01\cdot 9,8\,\frac{N}{kg}}}$$
$$r_{Lune-Terre} = 8\,603\,951m = 8604km$$

26. La distance est

$$\begin{aligned} r &= 2,42285\sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}}R_p \\ &= 2,42285\sqrt[3]{\frac{1408\,\frac{kg}{m^3}}{5427\,\frac{kg}{m^3}}}\cdot R_{Soleil} \\ &= 1,545R_{Soleil} \\ &= 1,545\cdot 695\,500km \\ &= 1\,074\,743\text{ km} \end{aligned}$$

À 46 000 000 km, elle n'est vraiment pas en danger.

27. On va trouver la force nette sur chaque planète. Chaque planète subit la force gravitationnelle des deux autres. Les directions de ces forces sont



Puisque la somme des angles d'un triangle doit donner 180°, l'angle θ doit être 30°.

La distance r se trouve à partir du rayon de la trajectoire (R) avec la loi des cosinus

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(120°) \\ &= R^2 \left(2 - 2\cos(120°)\right) \\ &= 3R^2 \end{aligned}$$

La force de gravitation faite par chaque masse est donc

$$\begin{aligned} F &= G\frac{MM}{r^2} \\ &= G\frac{M^2}{3R^2} \end{aligned}$$

La composante de cette force dirigée vers le centre du cercle est

$$\begin{aligned} F_R &= F\cos 30° \\ &= F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= G\frac{M^2}{3R^2}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Si on additionne les deux composantes des forces faites par les deux planètes, on a

$$\begin{aligned}\sum F_R &= G\frac{M^2}{3R^2}\frac{\sqrt{3}}{2} + G\frac{M^2}{3R^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= G\frac{M^2}{3R^2}\sqrt{3}\\ &= G\frac{M^2}{\sqrt{3}R^2}\end{aligned}$$

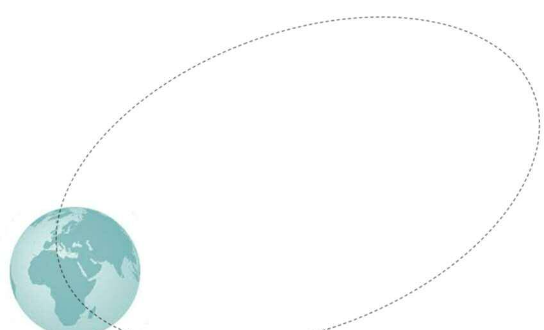
Cette force doit être égale à la force centripète

$$M\frac{4\pi^2 R}{T^2} = G\frac{M^2}{3R^2}\sqrt{3}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}M\frac{4\pi^2 R}{T^2} &= G\frac{M^2}{\sqrt{3}R^2}\\ \frac{1}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2\sqrt{3}R^3}\\ T^2 &= \frac{4\pi^2\sqrt{3}R^3}{GM}\\ T^2 &= \frac{4\pi^2\sqrt{3}\left(10^{10}m\right)^3}{6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot10^{24}kg}\\ T^2 &= 1,02455\times10^{18}s^2\\ T &= 1,0122\kappa10^9 s\\ T &= 32,07 ans\end{aligned}$$

28. a) En lançant ainsi un objet à partir de la surface de la Terre, on arrive à une orbite ressemblant à ceci



Avec la conservation de l'énergie, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a}$$

Puisque la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 0,85v_{lib} \\ &= 0,85\sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{aligned}$$

On arrive à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(0,85\sqrt{\frac{2GM}{R}}\right)^2 - \frac{GMm}{R} &= -\frac{GMm}{2a} \\ \frac{1}{2}m(0,85)^2\frac{2GM}{R} - \frac{GMm}{R} &= -\frac{GMm}{2a} \\ (0,85)^2\frac{1}{R} - \frac{1}{R} &= -\frac{1}{2a} \\ \left((0,85)^2 - 1\right)\frac{1}{R} &= -\frac{1}{2a} \\ a &= \frac{R}{2\left(1-(0,85)^2\right)} \\ a &= \frac{200R}{111} \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de r_a, il nous manque la valeur de l'excentricité. Pour la trouver, on va utiliser la deuxième loi de Kepler.

$$rv\sin\psi = \sqrt{GMr_p(1+e)}$$

À la position montrée sur la figure, l'angle entre le rayon et la vitesse est de 135°. On a donc

$$\begin{aligned} Rv\sin 135° &= \sqrt{GMr_p(1+e)} \\ Rv\frac{1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{GMr_p(1+e)} \end{aligned}$$

Puisque la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 0,85 v_{lib} \\ &= 0,85\sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{aligned}$$

On arrive à

$$\begin{aligned} R \cdot 0,85\sqrt{\frac{2GM}{R}}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{GMr_p\left(1+e\right)} \\ 0,85\sqrt{2GMR}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{GMr_p\left(1+e\right)} \\ 0,85\sqrt{R} &= \sqrt{r_p\left(1+e\right)} \end{aligned}$$

Puisque r_p est a (1 – e), on arrive à

$$\begin{aligned} 0,85\sqrt{R} &= \sqrt{a\left(1-e\right)\left(1+e\right)} \\ 0,85\sqrt{R} &= \sqrt{a\left(1-e^2\right)} \\ \left(0,85\right)^2 R &= a\left(1-e^2\right) \end{aligned}$$

Comme on avait

$$a = \frac{200R}{111}$$

L'équation devient

$$\begin{aligned} \left(0,85\right)^2 R &= \frac{200}{111} R\left(1-e^2\right) \\ \left(0,85\right)^2 \frac{111}{200} &= 1-e^2 \\ 0,4009875 &= 1-e^2 \\ e &= 0,77396 \end{aligned}$$

Ainsi, la distance maximale est

$$\begin{aligned} r_a &= a\left(1+e\right) \\ &= \frac{200R}{111}(1+0,77396) \\ &= 3,1963R \end{aligned}$$

La distance entre l'objet et la surface est donc

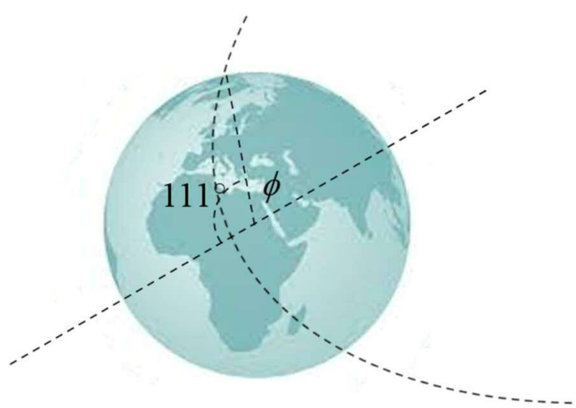
$$\begin{aligned} d &= 3{,}1963R - R \\ &= 2{,}1963R \\ &= 2{,}1963 \cdot 6371km \\ &= 13\,993km \end{aligned}$$

b) Pour connaitre la portée, il faut savoir la valeur de θ sur l'orbite de l'objet.

Puisqu'au départ, l'objet est à la distance *R,* la valeur de θ se trouve avec cette formule

$$\begin{aligned} r &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta} \\ R &= \frac{200}{111}R\frac{1-0,77396^2}{1+0,77396\cos\theta} \\ \frac{111}{200} &= \frac{1-0,77396^2}{1+0,77396\cos\theta} \\ \cos\theta &= -0,3585 \\ \theta &= 111,01° \end{aligned}$$

On a donc la situation suivante.



Ainsi, l'angle entre le point de départ et la distance maximale (ϕ sur la figure) est

$$\begin{aligned} \phi &= 180° - 111,01° \\ &= 68,99° \end{aligned}$$

Comme on a le même angle entre la distance maximale et le point de chute, l'angle entre le point de départ et le point d'arrivée mesurée à partir du centre de la Terre est 137,98°.

Ainsi, la distance entre le point de départ et le point de chute est

$$\begin{aligned} x &= \frac{137,98°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6371km \\ &= 15\,342km \end{aligned}$$