13 L'ÉQUILIBRE

Une échelle est appuyée sur un mur. Il n'y a pas de friction entre le mur et l'échelle alors qu'il y a une force de friction faite par le sol sur l'échelle. Quel est l'angle minimum θ requis pour que l'échelle ne glisse pas et tombe au sol ?

www.hometownroofingcontractors.com/blog/9-reasons-diy-rednecks-should-never-fix-their-own-roof

Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

13.1 L'ÉQUILIBRE STATIQUE

La statique est l'étude des objets continuellement au repos. Il n'y a aucune accélération et aucune accélération angulaire pour l'objet ou n'importe quelle composante de l'objet. Ça peut sembler facile, mais ça peut devenir assez complexe si on étudie un objet comme le pont de Québec. Dans ce cas, la statique nous permet de déterminer la tension dans chacune des poutres du pont. Évidemment, cette partie de la physique est très importante pour les ingénieurs qui doivent construire des édifices ou des ponts. En connaissant les forces exercées par les composantes, on est en mesure de déterminer quel doivent être la composition et la taille de ces composantes pour résister au contraire imposées.

À la base, les équations sont très simples et ne sont pas nouvelles. Si l'accélération et l'accélération angulaire sont nulles, on doit simplement avoir les conditions suivantes :

Conditions d'équilibre statique

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum \tau = 0$$

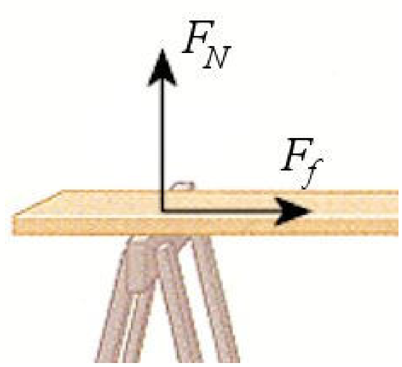
(On travaillera uniquement avec des forces en x et en y, il n'y aura pas de force en z.)

Force entre deux objets en contact

Deux objets en contact, sans fixation

On a déjà vu les forces entre deux objets quand ils sont simplement en contact. Ce sont la normale et la friction.

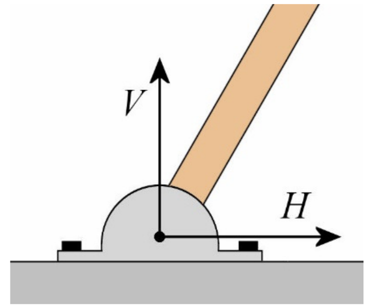
Ce sont les forces présentes quand les deux objets ne sont pas fixés ensemble. Cela signifie qu'il n'y a pas de clous, pas de vis, pas de soudures ou autres trucs du genre. Les objets se touchent simplement.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/cat-walks-along-uniform-plank-400-m-long-amass-700-kg-plank-supported-two-sawhorses-one-04-q844008

Les pivots

Parfois, les deux objets sont reliés ensemble par un pivot. Ce pivot fixe les deux objets ensemble, mais permet aux deux objets de tourner librement. Le pivot peut alors exercer une force (qui en en fait une normale), mais pas de moment de force.

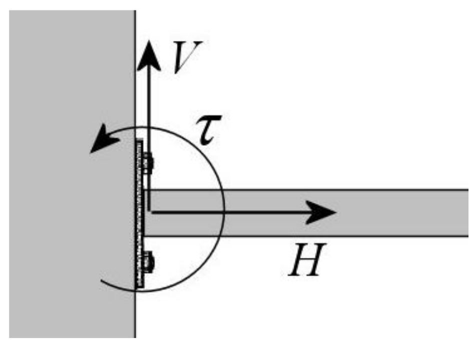


La force normale faite par le pivot peut être dans n'importe quelle direction. On va séparer cette force entre les objets en deux composantes. Il est habituel d'appeler ces deux composantes *H*, pour la composante horizontale, et *V*, pour la composante verticale.

Dans les chapitres précédents, la normale devait toujours être positive parce qu'on tenait déjà compte de la direction de la force. Toutefois, il est très difficile de connaitre la direction de la normale ici puisque la normale peut être dans n'importe quelle direction avec un pivot. On va donc supposer que les composantes sont positives, mais il sera alors possible qu'on obtienne alors des valeurs négatives pour les composantes *H* et *V*. Si on obtient une réponse négative, c'est que la composante est dans la direction opposée à celle supposée.

Deux objets fixés ensemble

Dans ce cas, les deux objets peuvent être fixés ensemble par des vis, des clous, une soudure ou un autre truc du genre. Alors, les fixations peuvent exercer une force qui empêche l'objet de se déplacer. Encore une fois, on va décomposer cette force en composantes horizontale et verticale, notées *H* et *V*. Les fixations peuvent aussi empêcher l'objet de tourner, ce qui signifie qu'il peut y avoir un moment de force fait par la fixation.



Ici aussi, les composantes *H* et *V* pourront être négatives. Comme la force entre les objets peut être dirigée dans n'importe quelle direction, les composantes peuvent être positives ou négatives. Le moment de force pourrait aussi être négatif puisqu'on peut empêcher l'objet de tourner dans un sens ou l'autre.

Méthode de résolution

1) Trouver toutes les forces agissant sur le ou les objets qu'on étudie.

   a) La gravitation

      Il y a une force de gravitation sur tous les objets, à moins qu'on néglige leur masse.

   b) Forces de contact

      b1) Si l'objet touche à un autre objet sans qu'il soit fixé. On a alors les forces suivantes.

- Une normale, qui est une force de répulsion entre les objets.
- Une force de friction (à moins qu'on spécifie qu'il n'y en a pas).

b2) S'il y a un pivot, on a les forces suivantes.

- Composante horizontale H de la normale
- Composante verticale V de la normale

b3) Si l'objet est fixé solidement à un autre, on a les forces suivantes.

- Composante horizontale H de la normale
- Composante verticale V de la normale
- Moment de force fait par la fixation.

c) Les forces faites par les cordes ou les tiges.

Toutes les cordes font une force de tension.
Toutes les tiges font une force de tension ou de compression.

2) Séparez ces forces en composantes x et y avec

$$F_x = F\cos\theta \qquad\qquad F_y = F\sin\theta$$

3) Calculer le moment de force de chacune de ces forces, en prenant soin de donner le bon signe au moment de force.

4) Faites vos équations de l'équilibre statique

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum \tau = 0$$

Comme il n'y a pas d'accélération, on a plus de liberté pour choisir nos axes (rappelez-vous, il fallait placer un axe dans le sens de l'accélération). En statique, on peut utiliser n'importe quelle orientation pour les axes, pourvu que x soit perpendiculaire à y.

5) Résoudre ces équations pour trouver les inconnus.

Il est suggéré de faire les étapes 2 et 3 en utilisant un tableau ayant la forme suivante.

Forces	x	y	τ
Poids	0	-294 N	0 Nm
Corde 1	$-T_1$	0	$T_1 \cdot 2\text{ m} \cdot \sin 30°$
Corde 2	$T_2 \cos 45°$	$T_2 \sin 45°$	$-T_2 \cdot 3\text{ m} \cdot \sin 45°$

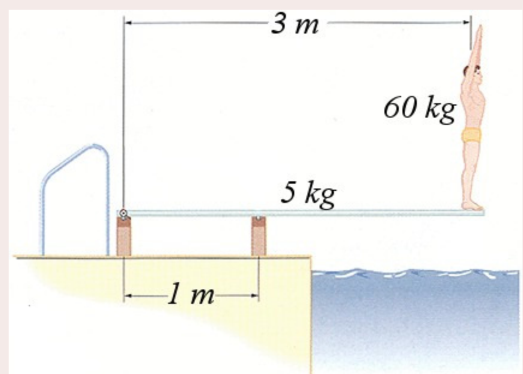
Il sera alors facile de faire l'étape 4. On additionne tous les éléments de la colonne x pour faire la somme des forces en x, tous les éléments de la colonne y pour faire la somme des forces en y et tous les éléments de la colonne τ pour faire la somme des moments de forces.

Quand il n'y a pas d'axe de rotation

L'ajout de l'équation des moments de force nous amène à chercher un axe de rotation, ce qui n'est pas toujours évident. Si une échelle est posée sur le mur et qu'on tente de faire les équations des forces et des moments de force sur l'échelle, on peut se demander où est l'axe de rotation. En fait, on peut mettre l'axe de rotation où on veut. L'idéal est de placer l'axe de rotation à l'endroit où il y a le plus de forces inconnues qui s'appliquent. Cela simplifie un peu les équations à résoudre puisque les moments de force faits par ces forces sont alors nuls.

Exemple 13.1.1

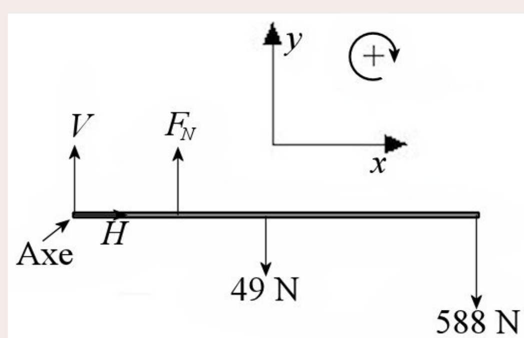
Dans la situation suivante, la planche du tremplin est reliée au poteau de gauche par un pivot alors que la planche est simplement déposée sur le poteau de droite. Il n'y a pas de friction entre le poteau de droite et la planche. Quelle est la force faite sur la planche du tremplin par chacun des poteaux qui soutiennent la planche ?



user.physics.unc.edu/~rowan/PHYS24-05/p24units/unit11/WCHAP11-3.html

Il y a 4 forces sur la planche du tremplin.

1) La force de gravitation sur la planche de 5 kg (49 N vers le bas).
2) La force du poteau de gauche (Composantes H et V, car c'est un pivot).
3) La force du poteau de droite (une normale vers le haut, car ils ne sont pas fixés ensemble).
4) La force faite par la personne (une normale vers le bas égale au poids de la personne (588 N)).



On a le choix de placer l'axe de rotation où on veut. On l'a placé à gauche complètement, à l'endroit où il y a le plus de forces inconnues qui s'appliquent.

Le tableau des forces est

Forces	x	y	τ
Poids planche	0	-49 N	49 N · 1,5 m · sin 90° = 73,5 Nm
Poteau 1	H	V	0 Nm
Poteau 2	0	F_N	$-F_N$ · 1 m · sin 90° = $-F_N$ · 1 m
Plongeur	0	-588 N	588 N · 3 m · sin 90° = 1764 Nm

Les deux équations des forces sont

$$\sum F_x = 0 \qquad \to \qquad H = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad \to \qquad -49N + V + F_N - 588N = 0$$

Avant de faire la somme de moment de force, vous pouvez vérifier si les équations des forces peuvent résoudre à elles seules votre problème (ça arrive quelquefois). Ce n'est pas le cas ici, car il y a trois inconnues, mais seulement deux équations. On doit donc faire la somme des moments de force.

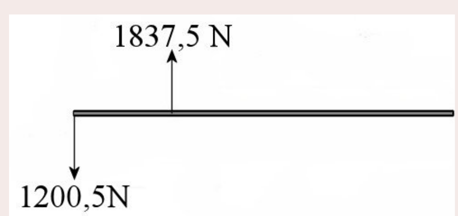
$$\sum \tau = 0 \qquad \to \qquad 73,5Nm - F_N \cdot 1m + 1764Nm = 0$$

On peut résoudre cette équation pour trouver

$$F_N = 1837,5N$$

Avec ce résultat, on trouve la valeur de V avec la somme des forces en y.

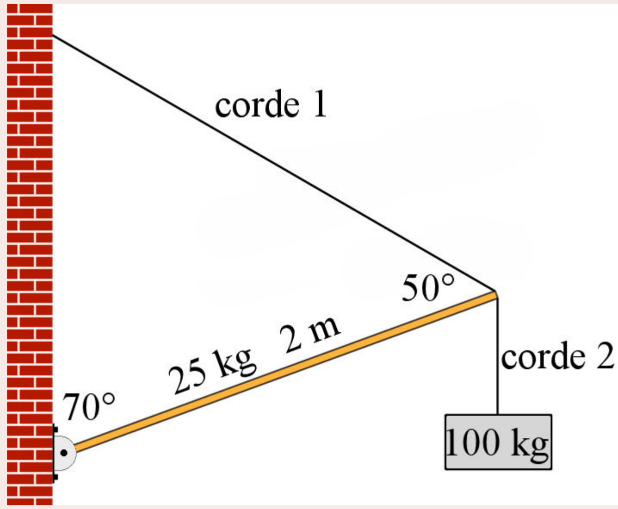
$$-49N + V + F_N - 588N = 0$$
$$-49N + V + 1837,5N - 588N = 0$$
$$V = -1200,5N$$



On voit que le poteau de gauche doit absolument être vissé à la planche, car le poteau tire sur la planche. Si la planche était simplement déposée sur le poteau, la planche se soulèverait, car une normale ne peut pas faire une force d'attraction entre deux objets. Les vis doivent aussi être en mesure de fournir 1200,5 N sinon tout arrache. On doit donc choisir des vis assez grosses pour qu'elles résistent à une telle force. Le poteau de droite n'a pas besoin d'être vissé, car le poteau pousse sur la planche, ce qu'une normale peut très bien faire.

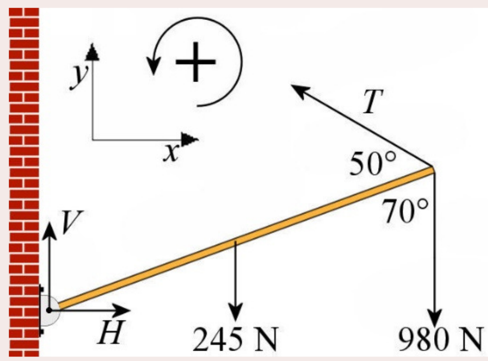
Exemple 13.1.2

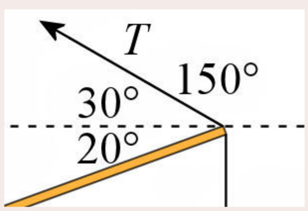
Dans la situation suivante, quelle est la tension de la corde et quelle est la force faite par le pivot sur la poutre (grandeur et direction) ?



Il y a 4 forces sur la poutre.

1) Le poids de la poutre (245 N vers le bas).
2) La force faite par le pivot (*H* et *V*).
3) La tension de la corde 1 (*T*).
4) La tension de la corde 2 (égale au poids de la masse de 100 kg, donc 980 N).





La direction de la force de tension de la corde 1 est montrée sur la figure de gauche.

On a donc le tableau suivant.

Forces	*x*	*y*	*τ*
Poids poutre	0	-245 N	-245 N · 1 m · sin 70° = -230,2 Nm
Pivot	*H*	*V*	0 Nm
Tension 1	*T* cos 150°	*T* sin 150°	*T* · 2 m · sin 50° = *T* · 1,532 m
Tension 2	0	-980 N	-980 N · 2 m · sin 70° = -1841,8 Nm

Les équations sont donc

$$\sum F_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad H + T\cos 150° = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \rightarrow \qquad -245N + V + T\sin 150° - 980N = 0$$

$$\sum \tau = 0 \qquad \rightarrow \qquad -230,2Nm + T \cdot 1,532m - 1841,8Nm = 0$$

On remarque qu'il n'y a qu'un seul inconnu à la troisième équation. On peut donc isoler T pour obtenir

$$T = 1352,4N$$

On peut ensuite utiliser cette valeur de la tension pour résoudre les deux autres équations.

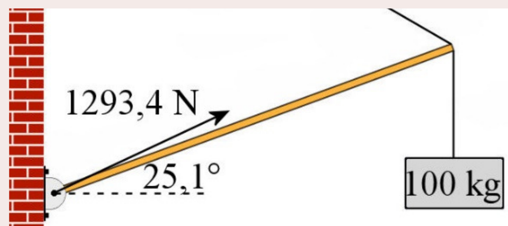
$$H + T\cos 150° = 0$$
$$H + 1352,4N \cdot \cos 150° = 0$$
$$H = 1171,2N$$

$$-245N + V + T\sin 150° - 980N = 0$$
$$-245N + V + 1352,4N \cdot \sin 150° - 980N = 0$$
$$V = 548,8N$$

La grandeur et la direction se trouvent finalement à partir des composantes.

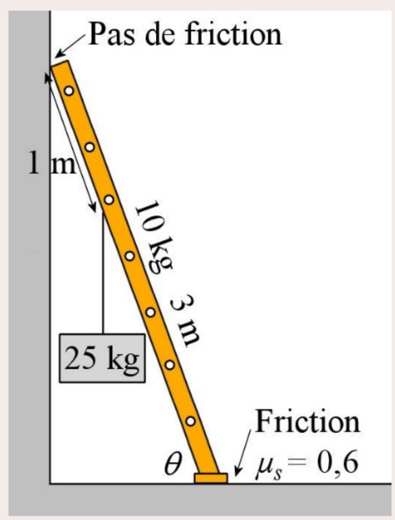
$$F_{pivot} = \sqrt{H^2 + V^2} = 1293,4N$$

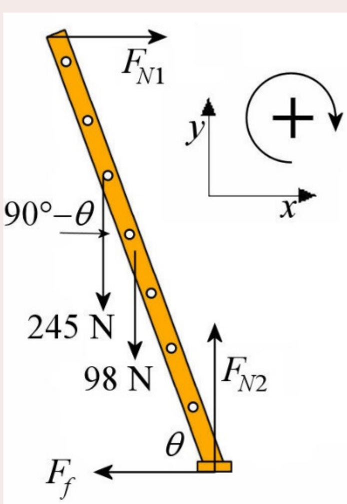
$$\theta = \arctan \frac{V}{H} = 25,1^0$$



Exemple 13.1.3

Une échelle est appuyée sur un mur tel qu'illustré sur la figure. Il n'y a pas de friction entre le mur et l'échelle alors qu'il y a une force de friction faite par le sol sur l'échelle. Quel est l'angle minimum θ requis pour que l'échelle ne glisse pas et tombe au sol ?





Il y a 5 forces sur l'échelle.

1) Le poids de l'échelle (98 N).
2) La normale avec le mur (F_{N1}).
3) La normale avec le sol (F_{N2}).
4) La friction avec le sol (F_f).
5) La tension de la corde qui tient la boite (245 N).

On ne connait pas la direction de la force de friction. Elle peut être vers la droite ou vers la gauche. On va supposer qu'elle est vers la gauche. Si on obtient une valeur positive, elle est effectivement vers la gauche. Si on obtient une valeur négative, la force est plutôt vers la droite.

En prenant le point de contact avec le sol comme axe de rotation (parce que c'est là qu'il y a le plus de forces inconnues), le tableau des forces est

Forces	***x***	***y***	$\boldsymbol{\tau}$
Poids échelle	0	-98 N	-98 N · 1,5 m · sin(90°-θ) = -147 Nm · sin(90°-θ)
Normale mur	F_{N1}	0	F_{N1} · 3 m · sin(θ)
Normale sol	0	F_{N2}	0 Nm
Friction sol	-F_f	0	0 Nm
Corde	0	-245 N	-245 N · 2 m · sin(90°-θ) = -490 Nm · sin(90°-θ)

On a donc les équations suivantes.

$$\sum F_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_{N1} - F_f = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad \rightarrow \qquad -98N + F_{N2} - 245N = 0$$
$$\sum \tau = 0 \qquad \rightarrow \qquad -147Nm \cdot \sin\left(90° - \theta\right) + F_{N1} \cdot 3m \cdot \sin\theta - 490Nm \cdot \sin\left(90° - \theta\right) = 0$$

Avec la friction statique, on doit mettre les valeurs de F_f et F_{N2} dans $F_f \leq \mu F_{N2}$.

La 1re équation nous donne $F_f = F_{N1}$ et la 2e équation nous donne $F_{N2} = 343N$.

On a donc

$$F_f \leq \mu_s F_{N2}$$
$$F_{N1} \leq 0,6 \cdot 343N$$
$$F_{N1} \leq 205,8N$$

Il nous reste à trouver F_{N1}, ce qu'on peut faire avec la 3e équation.

$$-147Nm \cdot \sin\left(90° - \theta\right) + F_{N1} \cdot 3m \cdot \sin\theta - 490Nm \cdot \sin\left(90° - \theta\right) = 0$$
$$-147Nm \cdot \cos\theta + F_{N1} \cdot 3m \cdot \sin\theta - 490Nm \cdot \cos\theta = 0$$
$$637Nm \cdot \cos\theta = F_{N1} \cdot 3m \cdot \sin\theta$$
$$212,33N \cdot \cos\theta = F_{N1} \sin\theta$$
$$F_{N1} = \frac{212,33N}{\tan\theta}$$

Notre équation devient donc

$$F_{N1} \leq 205,8N$$
$$\frac{212,33N}{\tan\theta} \leq 205,8N$$
$$\frac{212,33N}{205,8N} \leq \tan\theta$$
$$1,0317 \leq \tan\theta$$

Ce qui donne

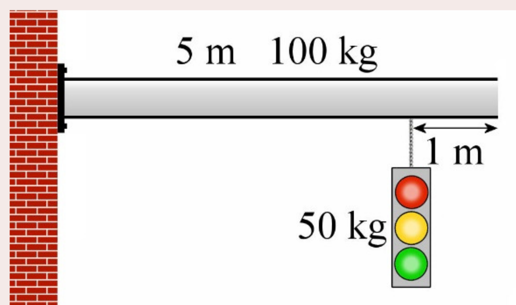
$$45,89° \leq \theta$$

L'angle minimum est donc de 45,89°.

Remarquez que si on attache la boite plus haut dans l'échelle, le moment de force augmente, ce qui fait augmenter l'angle minimum. Si c'est une personne qui monte dans l'échelle, on peut avoir de l'équilibre au départ, mais à mesure qu'elle monte, il faut de plus en plus de friction à la base. Si on dépasse la limite de la friction statique en montant, l'échelle peut se mettre soudainement à glisser, comme dans ce clip.
http://www.youtube.com/watch?v=Fal8QERtim0

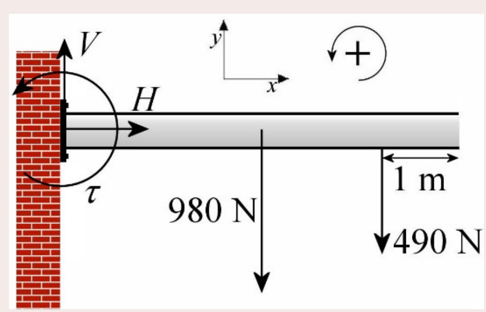
Exemple 13.1.4

Dans la situation montrée sur la figure, déterminez les forces et le moment de force exercés par les vis sur la poutre.



Il y a 3 forces sur la poutre.

1) Le poids de la poutre (980 N vers le bas).
2) Les forces (H et V) et le moment de force (τ) faits par les vis.
3) La tension de la corde qui tient le feu de circulation (égal au poids du feu (490 N)).



En prenant le point de contact avec le mur comme axe de rotation, le tableau des forces est

Forces	x	y	τ
Poids poutre	0	-980 N	-980 N · 2,5 m · sin90° = -2450 Nm
Vis	H	V	τ
Poids feu	0	-490 N	-490 N · 4 m · sin90° = -1960 Nm

On a donc les équations suivantes.

$$\sum F_x = 0 \qquad \to \qquad H = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad \to \qquad -980N - 490N + V = 0$$
$$\sum \tau = 0 \qquad \to \qquad -2450Nm + \tau + -1960Nm = 0$$

Avec la première équation, on trouve

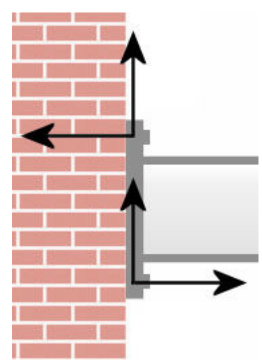
$$H = 0$$

Avec la deuxième équation, on trouve

$$-980N - 490N + V = 0$$
$$V = 1470N$$

Avec la troisième équation, on trouve

$$-2450Nm + \tau + -1960Nm = 0$$
$$\tau = 4410Nm$$



Dans ce dernier exemple, les forces faites par les vis sont montrées sur la figure. Il y a des forces vers le haut, qui font la force V de 1470 N. Le moment de force est obtenu avec les forces horizontales. Ces deux forces ont la même grandeur puisqu'on doit avoir H = 0. Avec les vis du haut qui retiennent la poutre et les vis du bas qui poussent sur la poutre (en fait, c'est le mur qui pousse sur la poutre avec une normale), on obtient un moment de force qui empêche la poutre de tourner.

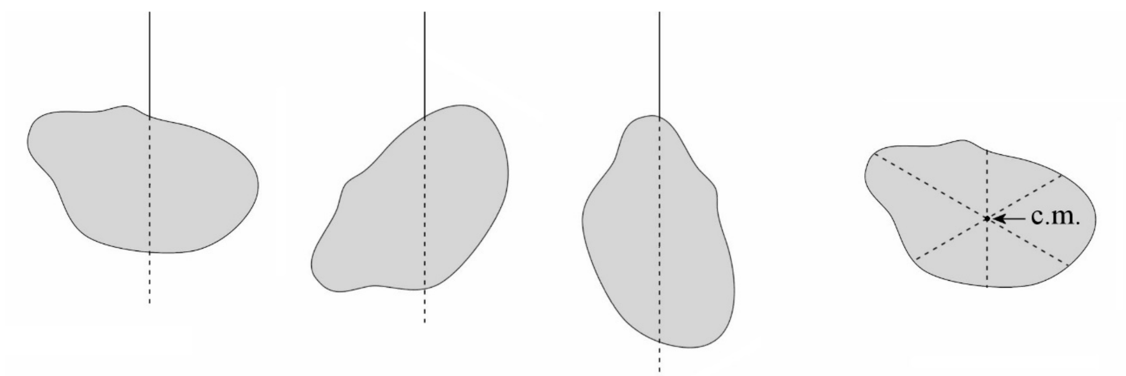
13.2 ÉQUILIBRE STATIQUE ET CENTRE DE MASSE

Objet suspendu

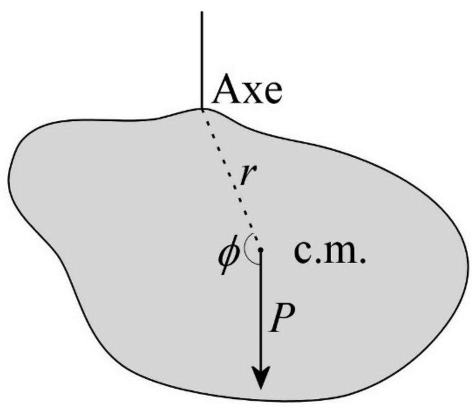
On peut trouver assez facilement le centre de masse expérimentalement en suspendant l'objet grâce à la règle suivante :

À l'équilibre statique, le centre de masse est toujours situé exactement sous le point d'attache.

En attachant l'objet à différents endroits et en traçant des lignes verticales à partir du point d'attache chaque fois, on trouve la position du centre de masse. Le centre de masse est au croisement de ces lignes verticales.



Le centre de masse doit être exactement sous le point d'attache, car la somme des moments de force ne serait pas nulle autrement. En effet, le moment de force net sur l'objet suspendu montré sur la figure est



$$\sum \tau = Pr\sin\phi$$

Comme P et r ne sont pas nuls, on peut avoir l'équilibre seulement si le sinus est nul. La seule solution possible ici est

$$\sin 180° = 0$$

Si l'angle est 180°, c'est que le centre de masse est directement sous le point d'attache.

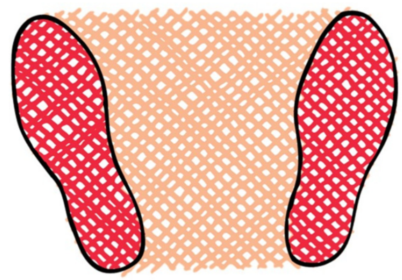
(Remarquez que θ = 0° est aussi une solution. Cela correspond à la situation avec un centre de masse exactement au-dessus du point d'attache. C'est effectivement une position d'équilibre, mais elle est instable. La moindre perturbation va détruire cet équilibre.)

Objet posé sur le sol

Pour qu'il y ait équilibre, les objets posés sur le sol doivent respecter la règle suivante :

À l'équilibre statique, le centre de masse est toujours situé au-dessus de la surface délimitée par tous les points d'appui de l'objet.

On peut voir sur cette figure ce qu'on veut dire quand on parle de surface délimitée par tous les points d'appui de l'objet. Une chaise a quatre points d'appui, ce qui délimite un carré (ou presque). Pour que la chaise soit en équilibre, le centre de masse doit être au-dessus de ce carré. Si on place la chaise sur deux pattes, il n'y a plus que deux points d'appui. L'aire délimitée par les points d'appui devient une ligne reliant les deux pattes qui touchent au sol. Il devient alors presque impossible que la chaise soit en équilibre dans ce cas, car, même si on réussit à mettre le centre de masse au-dessus de cette ligne, la moindre perturbation va pousser le centre de masse et il ne sera plus au-dessus de la ligne. La chaise va alors tomber.

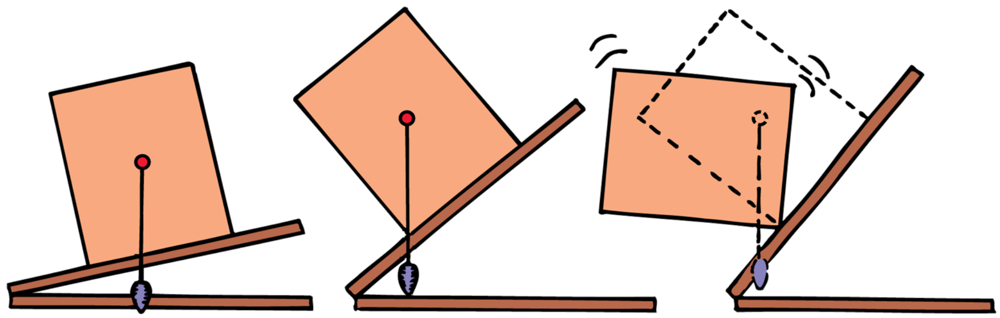


Dans le cas d'un humain debout, la zone délimitée par les points d'appui est représentée sur la figure. Elle inclut le dessous des pieds (en rouge) et la région entre les pieds (en rose). Pour rester en équilibre, le centre de masse de la personne doit être au-dessus de cette région. Si la personne lève un pied, l'aire délimitée par les points d'appui se réduit alors à l'aire sous l'autre pied. Le centre de masse de la personne doit alors être au-dessus du pied au sol pour que la personne soit en équilibre.

schools.wikia.com/wiki/Center_of_Mass

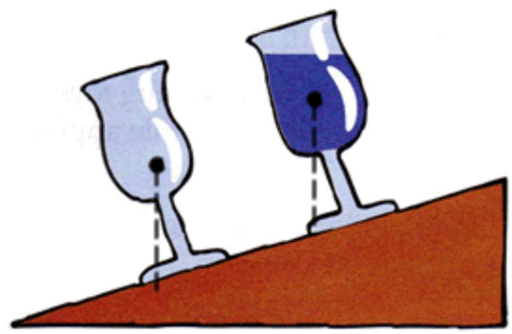
Cette photo nous montre une canette de Mountain Dew en équilibre. La zone délimitée par les points d'appui n'est pas très grande, mais on a réussi à placer le centre de masse au-dessus de cette zone. Cela demande de boire une quantité très précise de liquide pour avoir un centre de masse situé à la bonne place.

Plaçons maintenant une boite sur un plan incliné. Au départ, quand la pente est peu importante, on voit que le centre de masse est au-dessus de la surface délimitée par les points d'appui (qui est ici le dessous de la boite). La boite est donc en équilibre. La 2e image représente l'inclinaison maximale où on a l'équilibre. Le centre de masse est toujours au-dessus du dessous de la boite, mais de justesse. Si on incline la pente davantage, le centre de masse n'est plus au-dessus du dessous de la boite et elle tombe.



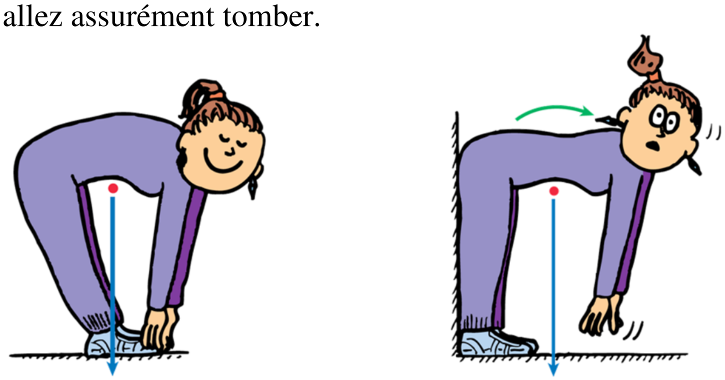
schools.wikia.com/wiki/Center_of_Mass

Si on pose un verre comme celui de la figure sur un plan incliné et qu'il est vide, il est à l'équilibre. Si on ajoute de l'eau, le centre de masse du verre va être plus haut et il se peut que cette montée fasse que le centre de masse ne soit plus au-dessus de la surface délimitée par les points d'appui (ici un cercle qui correspond au pied du verre). Si cela se produit, le verre tombe.

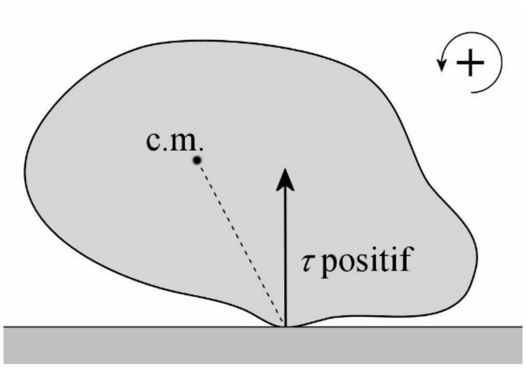


www.batesville.k12.in.us/physics/PhyNet/Mechanics/CenterOfMass/answers/ch10_answers.htm

Si vous tentez de toucher à vos pieds comme la personne de la figure de gauche, votre centre de masse reste au-dessus de vos pieds et vous ne tombez pas. Pour arriver à cette situation, vos fesses reculeront un peu vers l'arrière quand vous vous penchez pour que le centre de masse reste au-dessus de vos pieds. Si vous accotez vos fesses sur un mur, elles ne peuvent plus reculer et le centre de masse de votre corps ne peut pas rester au-dessus de vos pieds. Vous allez assurément tomber.

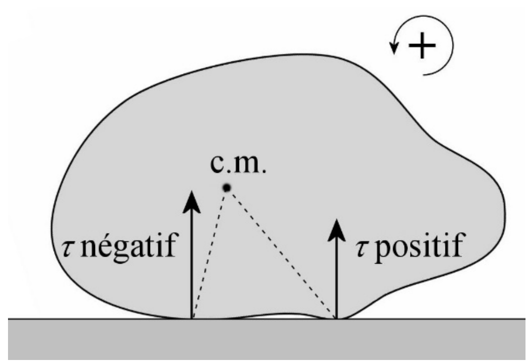


Vous pouvez admirer ici toute une série de démonstrations concernant l'équilibre.
http://www.youtube.com/watch?v=2VpzHJ_R55I
On peut montrer que le centre de masse doit être au-dessus de la zone délimitée par les points d'appui assez simplement. Supposons que le centre de masse n'est pas au-dessus de la zone délimitée par les points d'appui.



Si on prend le centre de masse comme axe de rotation, le moment de force fait par n'importe quelle normale agissant sur la zone d'appui est positif (avec le sens positif choisi sur la figure). Il est donc impossible que le moment de force net soit nul, car il n'y a aucun moment de force négatif pour annuler ces moments de force positifs. On ne peut donc avoir un équilibre.

La situation n'est pas la même s'il y a un autre point d'appui de l'autre côté du centre de masse. Les forces à droite du centre de masse font un moment de force positif et les forces à gauche du centre de masse font un moment de force négatif. Il est donc possible que le moment de force totale soit nul. Comme il faut des normales de chaque côté du centre de

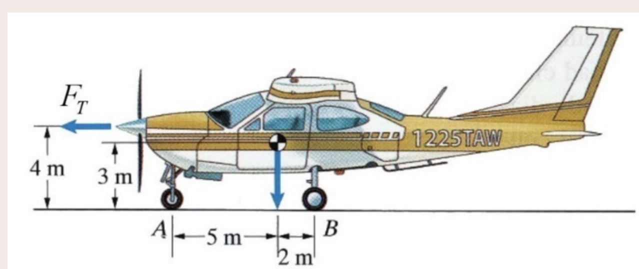


13.3 ÉQUILIBRE D'UN OBJET QUI ACCÉLÈRE

Quand un objet accélère, l'axe n'est pas fixe et on doit prendre le centre de masse comme axe de rotation. (Voyez ce document qui explique pourquoi http://physique.merici.ca/mecanique/cm_pour_axe.pdf)

Exemple 13.3.1

Quelle proportion du poids de cet avion de 800 kg est soutenue par les trains avant et arrière quand l'avion est au début du décollage et que le moteur exerce une force de 1000 N ?



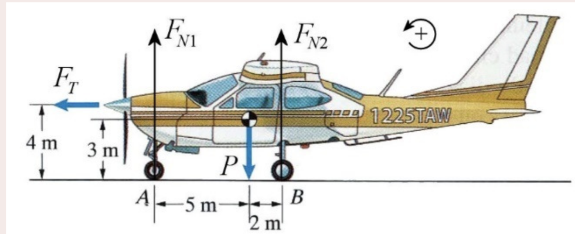
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/183-2800-n-airplane-begins-takeoff-run-t-propeller-exerts-horizontal-force-t-1000-n-neglec-q56576776

S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle. Toutefois, la somme des forces n'est pas nulle puisque l'avion accélère.

$$\sum F_x = ma \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum \tau = 0$$

Il y a 4 forces sur l'avion.

1- Le poids (7840 N).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).
4- La poussée des moteurs (F_T = 1000 N).



Comme l'avion accélère, on doit prendre le centre de masse comme axe de rotation.

Le tableau des forces est

Forces	*x*	*y*	τ
Poids	0	-7840 N	0
Normale 1	0	F_{N1}	$-F_{N1} \cdot 5$ m
Normale 2	0	F_{N2}	$F_{N2} \cdot 2$ m
Moteur	F_T	0	1000 N · 1 m = 1000 Nm

On a donc les équations suivantes.

$$\sum F_x = ma \qquad \rightarrow \qquad F_T = ma$$
$$\sum F_y = 0 \qquad \rightarrow \qquad -7840N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$
$$\sum \tau = 0 \qquad \rightarrow \qquad -F_{N1} \cdot 5m + F_{N2} \cdot 2m + 1000Nm = 0$$

Pour trouver les normales, on doit donc résoudre les deux équations suivantes.

$$F_{N1} \cdot 5m - F_{N2} \cdot 2m = 1000Nm$$
$$F_{N1} + F_{N2} = 7840N$$

Si on isole F_{N2} dans la 2e équation

$$F_{N2} = 7840N - F_{N1}$$

et qu'on remplace dans la 1re équation, on a

$$F_{N1} \cdot 5m - (7840N - F_{N1}) \cdot 2m = 1000Nm$$
$$F_{N1} \cdot 5m - 15\,680Nm + F_{N1} \cdot 2m = 1000Nm$$
$$F_{N1} \cdot 7m = 16\,680Nm$$
$$F_{N1} = 2383N$$

On peut ensuite trouver F_{N2} avec la 2e équation.

$$F_{N1} + F_{N2} = 7840N$$

$$2383N + F_{N2} = 7840N$$
$$F_{N2} = 5457N$$

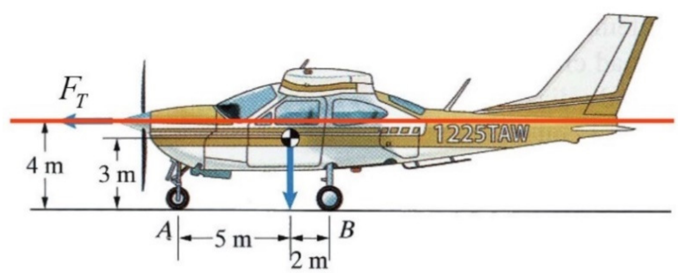
Comme le train avant supporte 2383 N des 7840 N du poids, le train avant supporte 30,4 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 5457 N des 7840 N du poids, le train arrière supporte 69,6 % du poids de l'avion.

On pourrait calculer que quand l'avion est au repos sur la piste, 28,6 % du poids est supporté par le train avant et 71,4 % du poids est supporté par le train arrière.

On remarque que le poids est maintenant un peu plus supporté par le train avant que le train arrière par rapport aux valeurs quand l'avion n'accélère pas. C'est le contraire de ce qui se passe avec une voiture. Quand on accélère avec une voiture, la normale augmente sur les roues arrière et diminue sur les roues avant.

En fait, le changement de normales dépend du point d'application de la force qui fait accélérer l'objet. Dans notre exemple, la force de poussée est située sur une ligne qui passe au-dessus du centre de masse de l'avion.



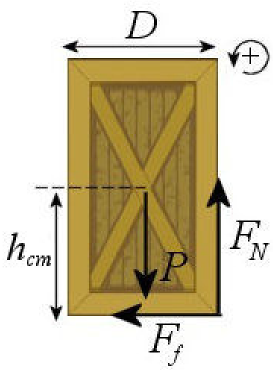
Dans ce cas, la poussée fait un moment de force qui cherche à faire descendre le nez de l'avion, ce qui écrase davantage le train avant sur la piste. Cela entraine une augmentation de la normale sur le train avant.

Si la force de poussée est sur une ligne qui passe en dessous de centre de masse, alors la poussée fait un moment de force qui cherche à faire monter le nez de l'avion, ce qui entraine une diminution de la normale sur le train avant. C'est ce qui arrive si les moteurs sont sous les ailes de l'avion. C'est aussi ce qui arrive avec une voiture qui accélère puisque la force qui fait accélérer la voiture est la force de friction entre les roues et le sol. Cette force parallèle au sol est évidemment sur une ligne passant sous le centre de masse de la voiture.

Accélération maximale sans basculer

Une boite est posée dans un camion qui accélère. On va supposer que le coefficient de friction est suffisamment grand pour que la boite puisse suivre le camion. Quelles sont alors les conditions pour que la boite soit en équilibre ?

www.canstockphoto.com/delivery-cargo-truck-13682465.html



Si la boite tombait, elle tomberait vers l'arrière du camion en pivotant sur son coin inférieur droit. Il y aurait donc un mouvement de rotation. Si la boite ne tombe pas, c'est qu'il n'y a pas de rotation et que la somme des moments de force est nulle. On va chercher la plus grande accélération pour laquelle le moment de force net peut être nul. Cela signifie qu'on doit examiner le cas limite suivant : la boite est juste sur le bord de basculer. Elle est donc en équilibre sur son coin inférieur droit. Les forces sur la boite sont donc celles illustrées sur la figure. Les dimensions indiquées sont la largeur de la boite (D) et la hauteur du centre de masse (h_{cm}).

Ainsi, le poids fera un moment de force nul, car il s'applique au centre de masse. Par contre, la friction et la normale feront des moments de force. Avec ce que l'on sait ici, nous pourrons les calculer plus rapidement en utilisant la formule

$$\tau = Fr_{\perp}$$

Le moment de force net est donc

$$\sum \tau = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_N \frac{D}{2} - F_f h_{cm} = 0$$

La somme est égale à zéro, car l'accélération angulaire est nulle. Rappelez-vous qu'on fait le cas limite où l'objet est en équilibre sur son coin et ne bascule pas. S'il était en train de basculer, l'accélération ne serait pas nulle.

On peut trouver la normale et la force de friction en faisant la somme des forces.

$$\sum F_x = ma_x \qquad \rightarrow \qquad F_f = ma_{\max}$$
$$\sum F_y = ma_y \qquad \rightarrow \qquad -mg + F_N = 0$$

La somme des forces en x est égale à ma, car la boite suit le mouvement du camion. Puisque le camion accélère, la boite doit avoir la même accélération.

Si on isole la normale et la friction dans ces équations et qu'on substitue dans notre équation du moment de force, on a

$$F_N \frac{D}{2} - F_f h_{cm} = 0$$
$$\cancel{m}g \frac{D}{2} - \cancel{m}a_{\max} h_{cm} = 0$$

Ce qui nous donne

Accélération maximale d'un objet qui accélère sans basculer sur une surface horizontale

$$a_{\max} = \frac{gD}{2h_{cm}}$$

L'accélération maximale de la boite ne dépend pas de la masse de la boite, mais dépend de sa largeur et de la hauteur du centre de masse. Plus la boite est large (D élevée), plus il sera difficile de la faire basculer et donc plus l'accélération pourra être grande. Plus le centre de masse est bas (h_{cm} petit) plus l'accélération maximale pourra être grande. Comparons avec deux exemples.

Exemple 13.3.2

La boite dans ce camion a 2 m de largeur et 1 m de hauteur. Quelle est l'accélération maximale qui peut avoir le camion sans que la boite bascule ?

www.canstockphoto.com/delivery-cargo-truck-13682465.html

Comme la hauteur du centre de masse de la boite est 0,5 m, l'accélération maximale est

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \frac{gD}{2h_{cm}} \\ &= \frac{9,8\frac{m}{s^2}\cdot 2m}{2\cdot 0,5m} \\ &= 19,6\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

C'est relativement élevé. En fait, la boite risque fort de glisser avant de tomber, car il faudrait un coefficient de friction de 2 entre la boite et le camion pour atteindre cette accélération. Comme c'est plutôt rare d'avoir des coefficients de friction aussi élevés, elle va probablement glisser avant de basculer.

Exemple 13.3.3

La boite dans ce camion a 1 m de largeur et 2 m de hauteur. Quelle est l'accélération maximale qui peut avoir le camion sans que la boite bascule ?

www.canstockphoto.com/delivery-cargo-truck-13682465.html

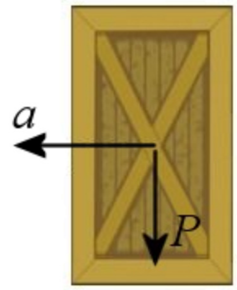
Comme la hauteur du centre de masse de la boite est 1 m, l'accélération maximale est

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \frac{gD}{2h_{cm}} \\ &= \frac{9,8\frac{m}{s^2}\cdot 1m}{2\cdot 1m} \\ &= 4,9\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

C’est beaucoup moins que pour la boite de l’exemple précédent. Cette boite risque davantage de tomber avant de glisser (il faudrait alors un coefficient de friction inférieur à 0,5 pour qu’elle glisse avant de basculer).

Équilibre et direction du poids apparent

Nous allons trouver un résultat intéressant si on calcule la direction du poids apparent quand la boite est sur le point de basculer. Les composantes du poids apparent sont



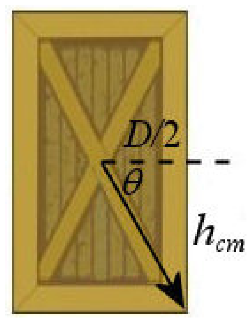
$$P_{app\ x} = -ma_x = -m\left(\frac{-gD}{2h_{cm}}\right) = \frac{mgD}{2h_{cm}}$$

$$P_{app\ y} = -mg$$

La direction du poids apparent est donc

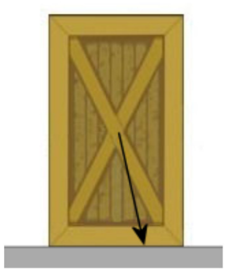
$$\tan\theta = \frac{P_{app\ y}}{P_{app\ x}} = \frac{-mg}{\frac{mgD}{2h_{cm}}} = \frac{-h_{cm}}{\frac{1}{2}D}$$

Mais cela veut dire que le poids apparent pointe alors directement vers le coin de la boite. En effet, quand le vecteur pointe vers le coin, la tangente de l’angle est



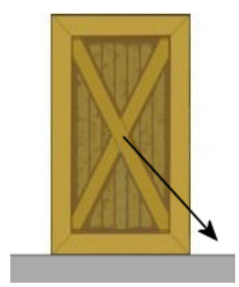
$$\tan\theta = \frac{-h_{cm}}{\frac{1}{2}D}$$

Ainsi, à l’accélération maximale, le poids apparent pointe vers le coin de la boite.



Si l’accélération est plus petite que l’accélération maximale, on peut montrer facilement que le point apparent est plus vertical et pointe vers un endroit au sol qui est sous la boite. Dans ce cas, la boite ne bascule pas.

Si l’accélération est plus grande que l’accélération maximale, on peut facilement montrer que le poids apparent est moins vertical. Il pointe alors vers un endroit du sol qui n’est pas sous la boite. Dans ce cas, la boite bascule.

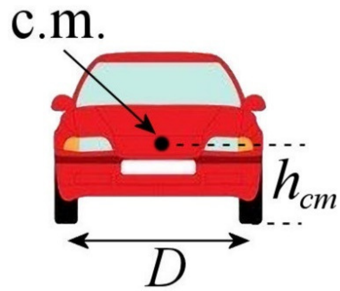


On arrive donc à la conclusion suivante.

Pour qu'un objet soit à l'équilibre, il faut que le poids apparent de l'objet pointe dans la zone délimitée par les points d'appui de l'objet.

Autos et motos dans un virage

On peut appliquer ces résultats à la conduite automobile. Dans un virage, l'automobile a une accélération centripète. Il y a donc une accélération maximale à ne pas dépasser, sinon l'auto bascule. Comme l'accélération centripète dépend de la vitesse, il y a donc une vitesse maximale. Si on dépasse cette vitesse maximale, la voiture va basculer et faire des tonneaux. On trouve cette vitesse avec notre équation de l'accélération maximale.



fr.depositphotos.com/2577683/stock-illustration-Car.html

$$a_{\max} = \frac{gD}{2h_{cm}}$$

$$\frac{v_{\max}^2}{r} = \frac{gD}{2h_{cm}}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{grD}{2h_{cm}}}$$

Dans le cas d'une voiture, D est la distance entre les roues (qu'on appelle la *voie*) et h_{cm} est la hauteur du centre de masse. On a donc intérêt à avoir une hauteur du centre de masse très petit par rapport à la voie. C'est le cas des formules 1 par exemple.

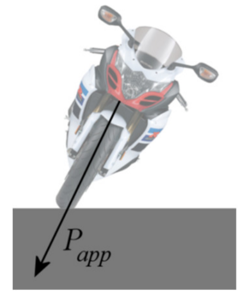
Les véhicules qui ont une hauteur du centre de masse assez grande par rapport à la voie ont davantage tendance à faire des tonneaux. Les camions font évidemment partie de cette catégorie, car ils ont une voie comparable aux voitures, mais leur centre de masse est beaucoup plus haut. Ce n'est pas pour rien qu'il y a parfois des avertissements pour éviter que les camions s'engagent dans certains virages trop rapidement. Vous pouvez d'ailleurs en voir un dans ce vidéo.

https://www.youtube.com/watch?v=rD4KOm-f3eE

Après les camions, les véhicules utilitaires sportifs (VUS) sont les plus susceptibles de faire des tonneaux à cause de leur centre de masse plutôt élevé par rapport à leur voie. En voici trois qui font des tonneaux.

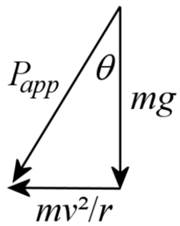
http://www.youtube.com/watch?v=WjhNnEL26Vs
http://www.youtube.com/watch?v=kOC4PjCdHKY
http://www.youtube.com/watch?v=I60smSzHGgM

Nos résultats expliquent aussi pourquoi les motos doivent s'incliner dans un virage. Il faut que le poids apparent de la moto et du passager pointe vers la zone d'appui, donc vers l'endroit où la roue touche à la route.



gambarmotor-3000.blogspot.ca/2013_07_18_archive.html

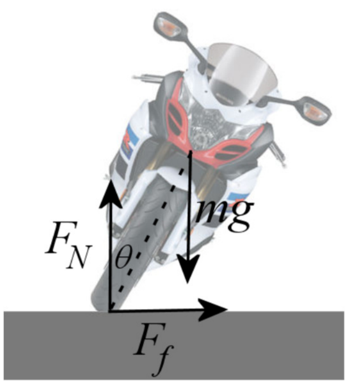
Sachant cela, trouvons l'angle d'inclinaison de la moto. La grandeur de la composante en x du poids apparent de la moto est mv^2/r et la grandeur de la composante en y du poids apparent est mg. Ainsi l'angle est



$$\tan\theta = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

On peut aussi arriver à cet angle avec la somme des moments de force. La figure suivante montre les forces sur la moto.



La somme des moments de forces, mesurés à partir du centre de masse (ce qu'on doit obligatoirement faire), est

$$\sum\tau = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_N d\sin\theta - F_f d\cos\theta = 0$$

où d est la longueur de la ligne pointillée sur la figure. Puisque la normale est égale au poids et que la force de friction est égale à la force centripète, l'équation devient

$$mgd\sin\theta - \frac{mv^2}{r}d\cos\theta = 0$$

Si on isole l'angle, on obtient

$$mgd\sin\theta = \frac{mv^2}{r}d\cos\theta$$

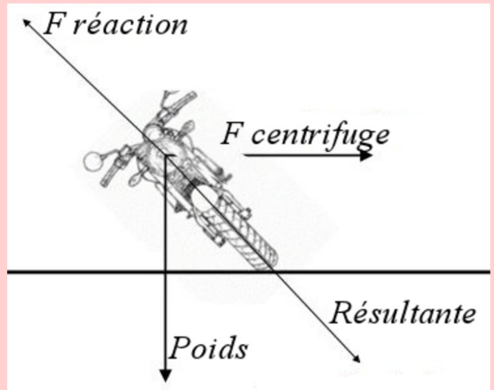
$$g\sin\theta = \frac{v^2}{r}\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

Si la moto va plus vite, il y a davantage d'accélération centripète. Avec plus d'accélération, le poids apparent s'incline davantage par rapport à la verticale. Cela signifie que l'angle d'inclinaison de la moto dans une courbe augmente avec la vitesse.

Erreur fréquente : Invoquer une force centrifuge pour expliquer l'inclinaison des motos.

Si vous faites une petite recherche sur internet pour trouver une explication à l'inclinaison des motos, vous allez inévitablement tomber sur l'explication qui ressemble à ceci :



> *Sur la moto, il y a une force de gravitation et une force centrifuge. Le moment de force fait par ces deux forces (mesuré à partir du contact avec le sol) doit s'annuler, ce qui permet de déterminer l'angle d'inclinaison.*

forum.motonline-france.com/viewtopic.php?f=64&t=1265&start=60

Évidemment, cela ne peut pas être tout à fait correct puisque la force centrifuge n'existe pas. On utilise même cette explication dans le « pour la science » de juillet 2003 et une explication similaire dans le « pour la science » de février 2016 pour expliquer pourquoi les bobsleighs montent sur la piste dans les virages !

(Petite nuance : l'explication avec la force centrifuge est correcte si on se place dans un référentiel qui accélère. Dans ce cas, il apparait des forces fictives, dont une s'appelle la force centrifuge. Toutefois, j'estime qu'on devrait éviter les subtilités des repères accélérés quand on tente de vulgariser la physique.)

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Conditions d'équilibre statique

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum \tau = 0$$

À l'équilibre statique, le centre de masse est toujours situé exactement sous le point d'attache.

À l'équilibre statique, le centre de masse est toujours situé au-dessus de la surface délimitée par tous les points d'appui de l'objet.

Accélération maximale d'un objet qui accélère sans basculer sur une surface horizontale

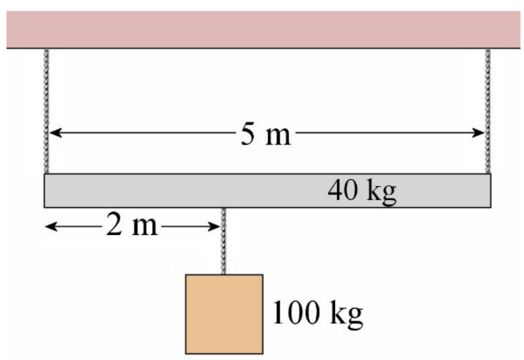
$$a_{\max} = \frac{gD}{2h_{cm}}$$

Pour qu'un objet soit à l'équilibre, il faut que le poids apparent de l'objet pointe dans la zone délimitée par les points d'appui de l'objet.

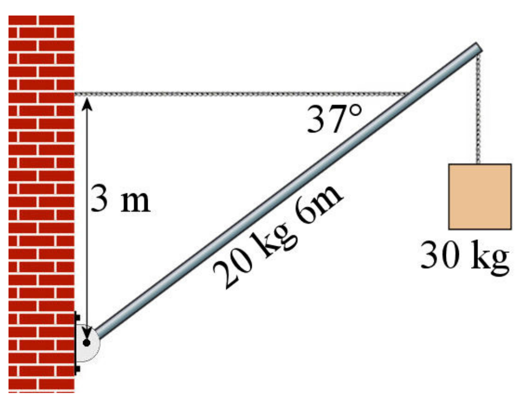
EXERCICES

13.1 L'équilibre statique

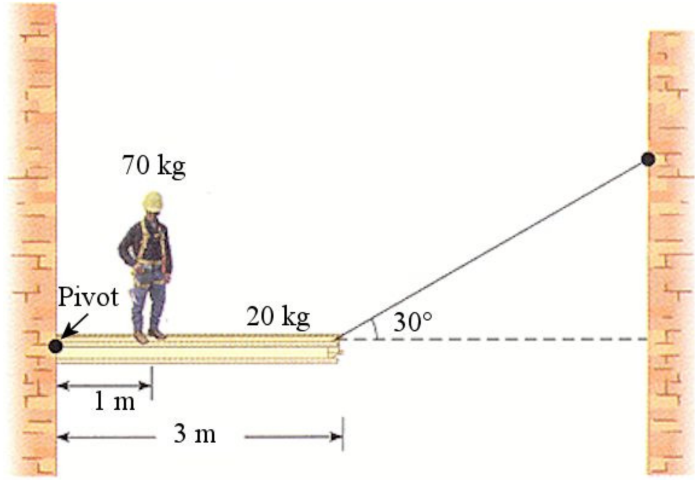
1. Quelles sont les tensions des deux câbles qui soutiennent cette poutre ?



2. Quelle est la tension de la corde horizontale et la force faite par le pivot sur la poutre (grandeur et direction) dans cette situation ?

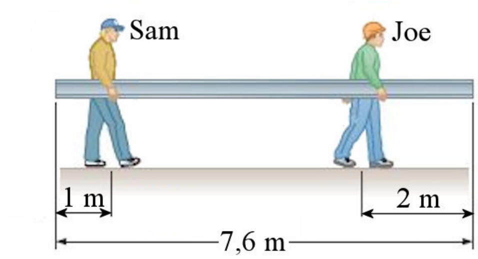


3. Quelles sont la tension de la corde et la force faite par le pivot sur la poutre (grandeur et direction) dans cette situation ?



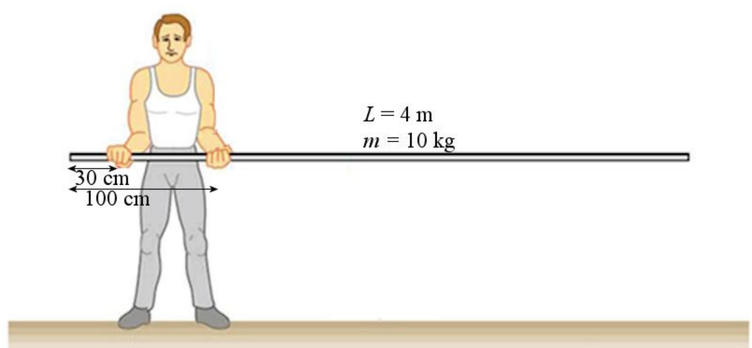
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2010-november-09

4. Quelle est la force exercée par chacun de ces deux travailleurs pour soutenir cette poutre de 100 kg ?



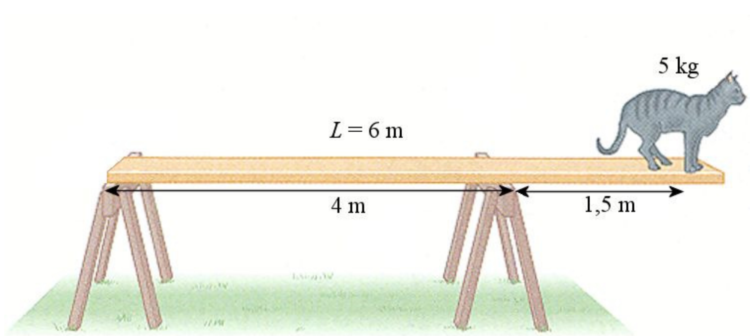
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/i-need-solve-using-torque-i-lost-choosing-pivot-point-unknowns-sam-joe-i-unsure-handle-dis-q1274167

5. Étienne soutient une tige telle qu'illustrée sur la figure. Quelle est la force exercée par chacune de ses mains ?



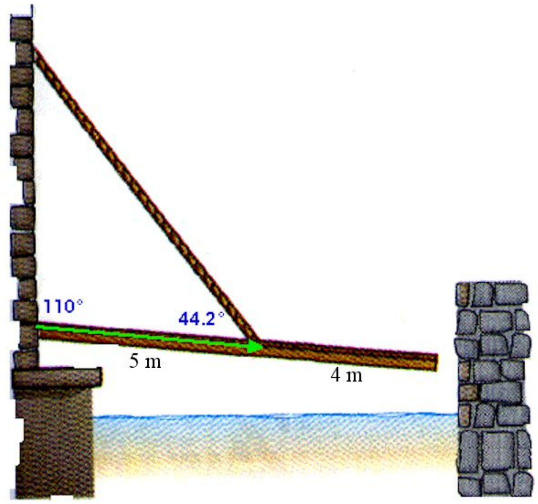
cnx.org/content/m42173/latest/?collection=col11406/latest

6. Si ce chat avance un peu, la planche bascule. Quelle est la masse de la planche ?



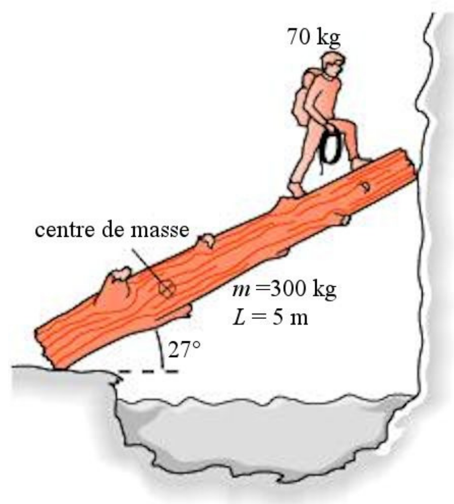
www.physicsforums.com/showthread.php?t=160750

7. Quelle est la tension de la corde qui soutient ce pont de 200 kg et quelle est la force exercée par le pivot (grandeur et direction) ?



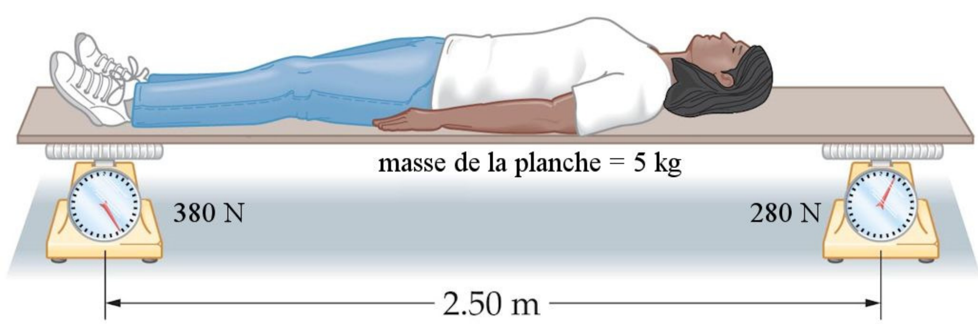
www.ux1.eiu.edu/~cfadd/1350/Hmwk/Ch12/Ch12.html

8. Gaëlle monte le long d'un tronc d'arbre tel qu'illustré sur la figure. Le tronc a une longueur de 5 m et son centre de masse est à 2 m de gros bout du tronc. Il n'y a pas de friction entre le tronc et la paroi verticale alors que le coefficient de friction statique entre le tronc et le sol est de 0,8. Gaëlle peut-elle se rendre jusqu'au bout du tronc sans que celui-ci glisse ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/climbers-attempting-cross-stream-place-350-log-vertical-frictionless-ice-cliff-opposite-fi-q1058471

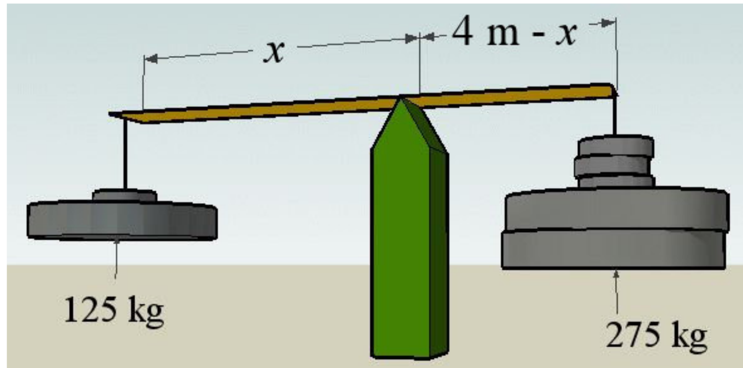
9. En se couchant sur cette planche, Annabelle veut déterminer à quelle distance de ses pieds se trouve son centre de masse.



www.d.umn.edu/~djohns30/phys1001-1/examples/examples3.htm

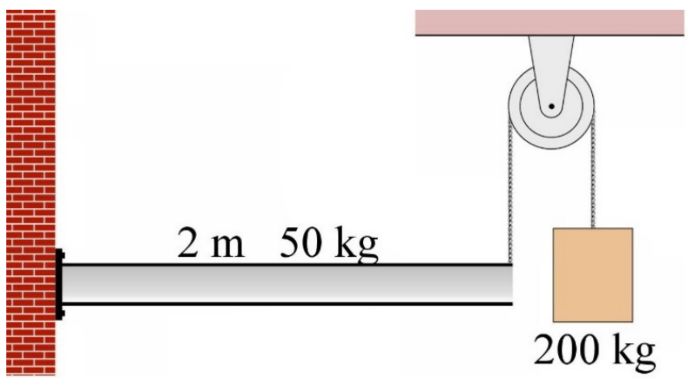
a) Quelle est la masse d'Annabelle ?
b) À quelle distance de ses pieds se situe le centre de masse d'Annabelle ?

10. Des masses de 125 kg et 275 kg sont suspendues à chaque bout d'une planche de 4 m ayant une masse négligeable. Où doit-on placer le pivot pour qu'il y ait équilibre (on cherche x sur la figure) ?

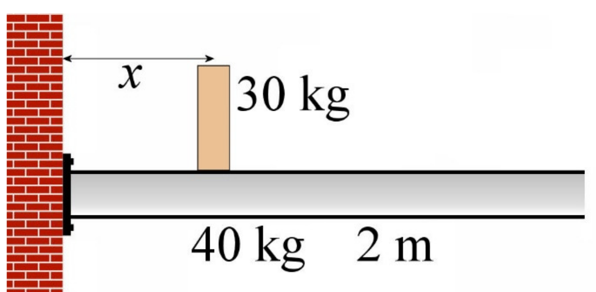


mathcentral.uregina.ca/QQ/database/QQ.09.07/s/eric1.html

11. Dans la situation montrée sur la figure, déterminez la force (grandeur et direction) et le moment de force fait par les vis sur la poutre.



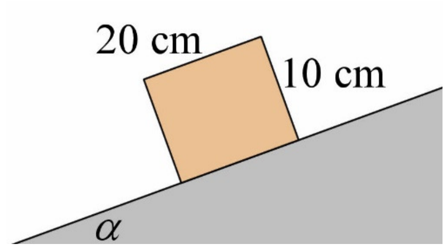
12. Une poutre horizontale d'une masse de 40 kg et d'une longueur de 2 m est visée solidement à un mur. Un bloc de 30 kg est placé sur cette poutre à une certaine distance x du mur.



a) Sachant que les vis peuvent exercer un moment de force maximum de 800 Nm, à quelle distance maximale du mur peut-on placer le bloc de 30 kg sans que les vis cèdent ?
b) À cette distance maximale, quelles sont les composantes horizontales et verticales de la force que les vis exercent sur la barre ?

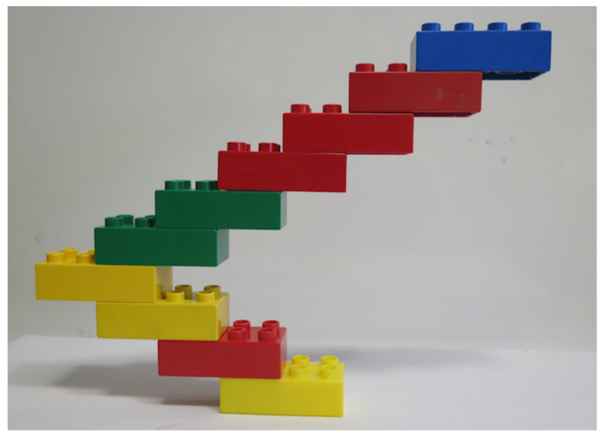
13.2 Équilibre statique et centre de masse

13. Jusqu'à quel angle peut-on incliner cette surface avant que cette boite ne bascule ? (Le centre de masse de la boite est au milieu de la boite.)



14. Roxanne construit une tour de blocs lego ayant la forme montrée sur la figure.

    Il y a 3 blocs vers la gauche, puis tous les autres blocs décalent vers la droite. Quel est le nombre maximal de blocs (au total) que Roxanne peut mettre sans que la tour bascule vers la droite ?



13.3 Équilibre d'un objet qui accélère

15. La boite dans ce camion a une hauteur de 2 m et une largeur de 50 cm. Le centre de masse de la boite est au milieu de la boite.

    a) Quelle est l'accélération maximale que peut avoir ce camion sans que la boite bascule ?
    b) Quelle est la valeur minimale du coefficient de friction qui fera en sorte que la boite basculera avant de glisser ?

16. La boite dans ce camion a une hauteur de 2 m et une largeur de 1 m. Le centre de masse de la boite est au milieu de la boite. Quelle est l'accélération maximale que peut avoir ce camion sans que la boite bascule si le camion monte une pente de 10° ?

17. Dans ce virage, la moto est inclinée de 40° par rapport à la verticale. Le rayon de courbure du virage est de 100 m.

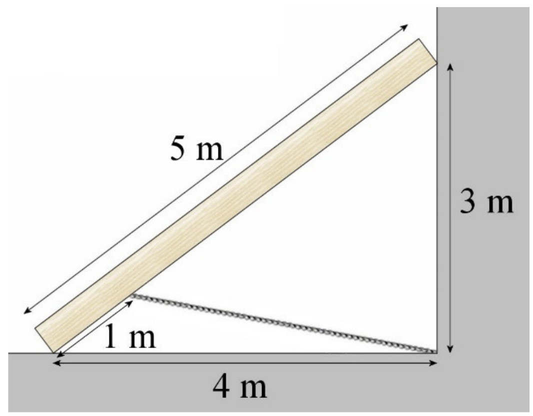
    a) Quelle est la vitesse de la moto (en km/h) ?
    b) Quel doit-être le coefficient de friction minimum entre l'asphalte et le pneu pour que la moto prenne ce virage à cette vitesse sans glisser ?

motorcycle.com.vsassets.com/blog/wp-content/uploads/2013/10/Motorcycle-Cornering-Sparks-1014.jpg

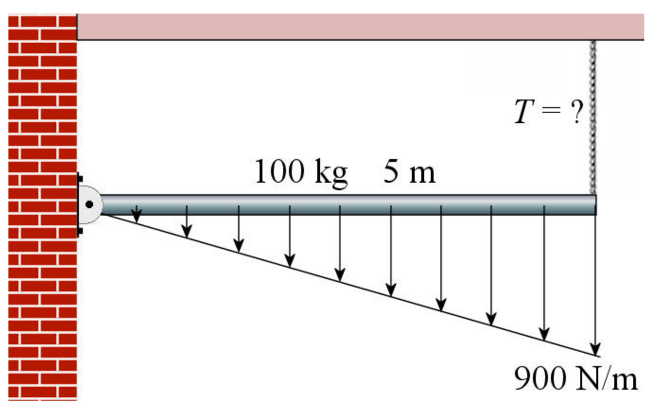
Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

18. Dans la situation montrée sur la figure, il n'y a pas de friction. La masse de la poutre est de 50 kg. Quelle est la tension de la corde ?



19. La figure suivante montre que la poutre supporte une charge sur toute sa longueur. Quand la charge est ainsi répartie uniformément, on donne la densité de force *f*. Par exemple, une densité de force de 50 N/m signifie que la force totale est de 50 N sur une longueur de poutre de 1 m. Cependant, la force n'est pas répartie uniformément ici. Elle augmente graduellement de sorte qu'il n'y a pas de force près du pivot et qu'il y a une densité de force de 900 N/m à l'autre bout de la poutre. Quelle est la tension de la corde ?



RÉPONSES

13.1 L'équilibre statique

1. Câble de gauche = 784 N   Câble de droite = 588 N
2. T = 626,13 N   pivot : 795,1 N à 38,0°
3. T = 653,3 N   pivot : 792,8 N à 135,5°
4. Sam : 383,5 N   Joe : 596,5 N
5. Main droite : 140 N vers le bas   Main gauche : 238 N vers le haut
6. 7,5 kg
7. T = 2377,7 N   pivot : 1050,5 N à -9,9°
8. Elle ne peut pas aller jusqu'au bout du tronc
9. a) 62,3 kg   b) 1,045 m de ses pieds
10. 2,75 m
11. La force est de 1470 N vers le bas, le moment de force est de 3430 Nm dans le sens des aiguilles d'une montre
12. a) 1,388 m   b) V = 686 N vers le haut H = 0

13.2 Équilibre statique et centre de masse

13. 63,4°
14. 13

13.3 Équilibre d'un objet qui accélère

15. a) 2,45 m/s²   b) 0,25
16. 3,124 m/s²
17. a) 103,2 km/h   b) 0,839

Défis

18. 443,1 N
19. 1990 N