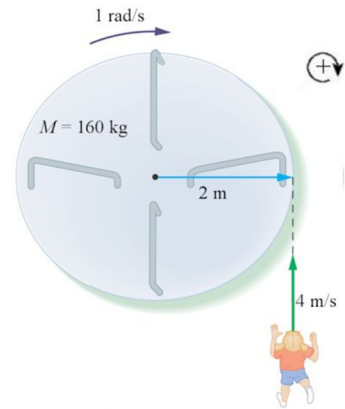


# 12 LA ROTATION

*Un enfant (obèse) de 60 kg court à 4 m/s vers une plaque circulaire qui tourne initialement dans la direction indiquée sur la figure. Quelle est la vitesse de rotation quand l'enfant est sur la plaque ?*



[user.physics.unc.edu/~rowan/p24site/p24units/unit11/WCHAP11-7.html](http://user.physics.unc.edu/~rowan/p24site/p24units/unit11/WCHAP11-7.html)



[www.lat34.com/2013/06/24/2013-x-games-real-street-semi-finals/](http://www.lat34.com/2013/06/24/2013-x-games-real-street-semi-finals/)

Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

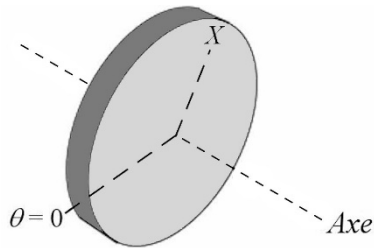
Nous allons maintenant ajouter la rotation. Il pourra alors avoir deux mouvements pour un objet : un mouvement en ligne droite (qu'on appellera translation) et un mouvement de rotation. Ce pourrait être, par exemple, avoir une balle qui roule le long d'un plan incliné.

Dans ce chapitre, nous allons presque uniquement parler de rotation autour d'un axe fixe, c'est-à-dire qui ne change pas d'orientation. Cela exclut donc la description du mouvement d'une toupie, qui tourne sur elle-même en même temps que l'axe de rotation change d'orientation.

## 12.1 LA CINÉMATIQUE DE ROTATION

### Position, vitesse et accélération angulaires

Pour être en mesure de décrire le mouvement de rotation, on doit connaître l'orientation de l'objet. Pour ce faire, on peut utiliser un angle.



Supposons qu'il y a une marque sur l'objet (X sur la figure). On peut décrire l'orientation en spécifiant l'angle que fait cette marque par rapport à une référence  $\theta = 0$ . On travaillera ici avec des angles en radians. Nous aurons le choix de décider dans quelle direction on aura un angle positif et dans quelle direction on aura un angle négatif.

Le déplacement angulaire correspond au changement d'orientation de l'objet.

#### Déplacement angulaire

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

On peut ensuite utiliser la vitesse angulaire pour déterminer si un objet tourne plus ou moins rapidement sur lui-même. Si l'objet tourne vite, l'angle change rapidement et si l'objet tourne lentement, l'angle change lentement. Cela nous laisse penser que la vitesse angulaire correspond au taux de variation de l'angle.

#### Vitesse angulaire moyenne

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

#### Vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Ces vitesses sont en rad/s.

Dans ce chapitre, nous décrirons uniquement la rotation d'objets rigides. Les objets rigides sont des solides pour lesquelles la vitesse angulaire est la même pour tous les atomes de

l'objet. Par exemple, si on fait tourner un pot de jus, on pourrait faire tourner le pot, mais pas le jus. La vitesse angulaire du jus n'est donc pas la même que celle du pot et il ne s'agit pas d'un objet rigide. Notez qu'au début de ce chapitre, les objets ne se déformeront pas non plus pendant leur rotation.

La vitesse angulaire est reliée à la période dans le cas où la vitesse angulaire est constante. On se rappelle que la période ( $T$ ) est le temps que prend un objet pour faire un tour dans un mouvement circulaire. Ainsi, on tourne d'un tour ( $2\pi$  rad) pendant la période de la rotation ( $T$ ) et on obtient le lien suivant entre la période et la vitesse angulaire.

#### Lien entre la période et la vitesse angulaire (quand $\omega$ est constante)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Toutefois, la vitesse de rotation peut changer. Si une roue qui tourne ralentit, alors sa vitesse angulaire diminue. On peut décrire ce changement de vitesse en donnant le rythme auquel la vitesse angulaire change. Ce taux est l'accélération angulaire.

#### Accélération angulaire moyenne

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

#### Accélération angulaire instantanée

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Ces accélérations sont en rad/s<sup>2</sup>

Dans un contexte plus général, la vitesse angulaire et l'accélération angulaire sont des vecteurs. Avec un axe fixe, il n'est vraiment pas nécessaire de les considérer comme des vecteurs. Seul le signe (selon notre sens positif choisi) sera nécessaire.

## Équations de la cinématique de rotation si l'accélération angulaire est constante

Si l'accélération angulaire est une constante, on peut intégrer les définitions précédentes pour obtenir les équations de la cinématique de rotation.

On a alors

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

et

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Ça s'est fait peut-être un peu vite, mais dites-vous que c'est exactement identique à ce qu'on a fait au premier chapitre pour obtenir les équations de la cinématique de translation. Comme on a fait au chapitre 1, on peut également combiner ces deux équations pour former deux autres équations. On obtient alors les quatre équations suivantes.

### Équations de la cinématique de rotation avec accélération angulaire constante

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$2\alpha(\theta - \theta_o) = \omega^2 - \omega_o^2$$

$$\theta = \theta_o + \frac{1}{2}(\omega_o + \omega)t$$

Comme dans le cas de la cinématique de translation, il y a presque toujours une de ces quatre formules qui va résoudre directement votre problème.

### Exemple 12.1.1

La poulie de cette figure, initialement au repos, commencera à tourner dans la direction positive avec une accélération angulaire constante de  $3 \text{ rad/s}^2$ .



- a) Quelle est la vitesse angulaire 2 secondes plus tard ?

La vitesse angulaire est

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_o + \alpha t \\ &= 0 + 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 2\text{s} \\ &= 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2012-october-19](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2012-october-19)

- b) Quel est le nombre de tours fait par la poulie en 10 secondes ?

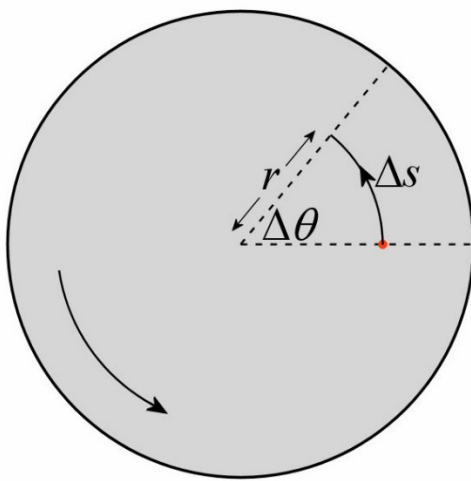
Pour trouver le nombre de tours, on va premièrement trouver le déplacement angulaire. Si on pose que la position initiale est notre origine ( $\theta_o = 0$ ), l'angle final est notre déplacement angulaire.

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (10\text{s})^2 \\ &= 150\text{rad}\end{aligned}$$

La poulie a donc tourné de 150 rad. Comme on fait un tour chaque  $2\pi$  rad, le nombre de tours est

$$\begin{aligned} N &= \frac{150 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \\ &= 23,87 \end{aligned}$$

## La distance parcourue, la vitesse et l'accélération à un certain endroit sur l'objet en rotation



Si on est sur une plaque en rotation à une certaine distance de l'axe, on parcourt une certaine distance à mesure que l'objet tourne ( $\Delta s$  sur la figure). Il existe bien sûr un lien entre la distance parcourue ( $\Delta s$ ) et le déplacement angulaire de l'objet ( $\Delta\theta$ ). Ce lien vient en fait de la définition d'un radian.

La définition de l'angle en radian est

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

On a donc

**Distance parcourue à une distance  $r$  de l'axe pour un déplacement angulaire de  $\Delta\theta$**

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

On peut également trouver la grandeur de la vitesse d'un objet qui reste continuellement à la distance  $r$  de l'axe. Pour y arriver, nous n'avons qu'à diviser l'équation précédente par le temps pour obtenir la vitesse scalaire moyenne

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

et à faire tendre le temps vers zéro

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{r d\theta}{dt} \\ \frac{ds}{dt} &= r \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

On a pu sortir le  $r$  de la dérivée parce qu'on veut savoir la vitesse d'un objet toujours à la même distance de l'axe, ce qui signifie que  $r$  est donc une constante. On arrive donc à

### Grandeur de la vitesse à une distance $r$ de l'axe

$$v = r\omega$$

Ainsi, plus on s'éloigne de l'axe de rotation, plus la vitesse sera grande. C'est ce qu'on peut voir dans ce vidéo.

<https://www.youtube.com/watch?v=atzsv63a1FE>

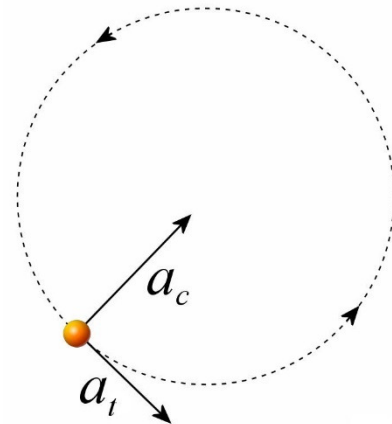
Laissez faire les commentaires gras de Maurice et concentrez-vous sur les patineuses. Vous voyez que les patineuses doivent patiner plus vite, plus elles sont loin de l'axe de rotation. Il en est ainsi parce que la vitesse ( $v$ ) augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'axe de rotation si la vitesse angulaire ( $\omega$ ) est constante. La vitesse angulaire est constante puisque toutes les patineuses doivent tourner du même angle durant le même temps pour que la ligne de patineuses reste bien droite.

On peut finalement trouver l'accélération à une certaine distance de l'axe. Dérivons notre équation de la vitesse. On a alors

$$\begin{aligned} v &= r\omega \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(r\omega)}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= r \frac{d\omega}{dt} \\ a &= r\alpha \end{aligned}$$

Puisque la vitesse est la vitesse tangentielle (puisque l'objet est toujours à la même distance  $r$  de l'axe), on obtient en fait l'accélération tangentielle ( $a_t$ ). Sur la figure, elle est dans le même sens que la rotation, ce qui ferait augmenter la vitesse. Elle pourrait aussi être orientée dans la direction opposée à la rotation. Dans ce cas, la vitesse diminuerait.

Mais attention : il ne faut pas oublier que dans un mouvement circulaire, il y a aussi l'accélération centripète ( $a_c$ ). On a donc



### Grandeur de l'accélération à une distance $r$ de l'axe

**Accélération tangentielle**  $a_t = r\alpha$

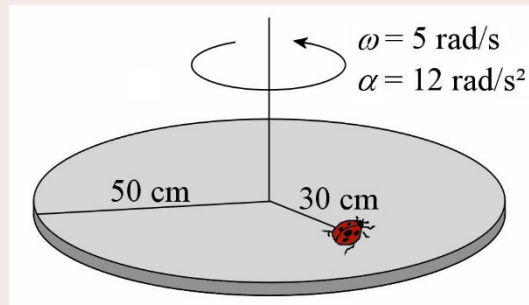
**Accélération centripète**  $a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

**Accélération**  $a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$



**Exemple 12.1.2**

Une bestiole est à 30 cm de l'axe de rotation d'une plaque tournante de 1 m de diamètre. La vitesse angulaire initiale est de 5 rad/s et elle augmente au rythme de 12 rad/s<sup>2</sup>.



- a) Quelle est la grandeur de la vitesse de la bestiole à ce moment ?

La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= r\omega \\ &= 0,3\text{m} \cdot 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ &= 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- b) Quelle est la grandeur de l'accélération à ce moment ?

La grandeur de l'accélération est

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$$

On doit donc trouver en premier lieu les accélérations tangentielle et centripète.

L'accélération tangentielle est

$$\begin{aligned} a_t &= r\alpha \\ &= 0,3\text{m} \cdot 12 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \\ &= 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

L'accélération centripète est

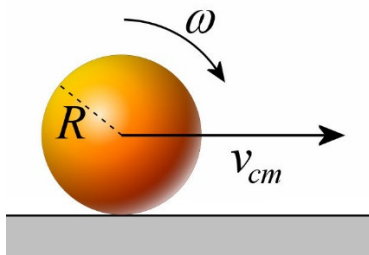
$$\begin{aligned} a_c &= r\omega^2 \\ &= 0,3\text{m} \cdot \left(5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

La grandeur de l'accélération est donc

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \\ &= \sqrt{\left(3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} \\ &= 8,32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

## Les conditions de roulement sans glissement

Si une sphère ou un cylindre roule sans qu'il y ait de glissement entre l'objet et le sol, la rotation doit se faire à un rythme très précis. Il y a bien sûr un lien entre la vitesse du centre de masse et la vitesse angulaire parce que si la vitesse augmente, l'objet doit tourner plus vite. Cela est bien évident : si vous augmentez la vitesse de votre voiture, les roues tourneront plus vite.



Pour trouver, le lien entre les deux, imaginons que la roue fasse un tour durant le temps  $T$ . Dans ce cas, elle aura avancé d'une distance égale à la circonférence de la roue. La vitesse est donc

$$v_{cm} = \frac{2\pi R}{T}$$

Puisqu'elle a fait un tour durant le même temps, la vitesse angulaire est

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

En comparant ces deux équations, on trouve facilement le lien entre la vitesse et la vitesse angulaire.

### Lien entre la vitesse et la vitesse angulaire s'il y a roulement sans glissement

$$v_{cm} = \omega R$$

En dérivant par rapport au temps, on trouve également le lien entre l'accélération et l'accélération angulaire.

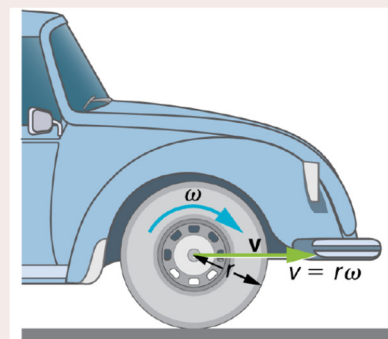
### Lien entre l'accélération et l'accélération angulaire s'il y a roulement sans glissement

$$a_{cm} = \alpha R$$

### Exemple 12.1.3

Une voiture se déplace à 90 km/h. Combien de tours par minute font les roues si elles ont un diamètre de 60 cm ?

La vitesse du centre de masse de la roue est la même que celle de la voiture. Ainsi, la vitesse angulaire de la roue est



College physics, openstax



$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v_{cm}}{R} \\ &= \frac{25 \frac{m}{s}}{0,3m} \\ &= 83,33 \frac{rad}{s}\end{aligned}$$

Le nombre de tours par secondes est donc

$$\frac{83,33 \frac{rad}{s}}{2\pi \frac{rad}{tour}} = 13,26 \frac{tours}{s}$$

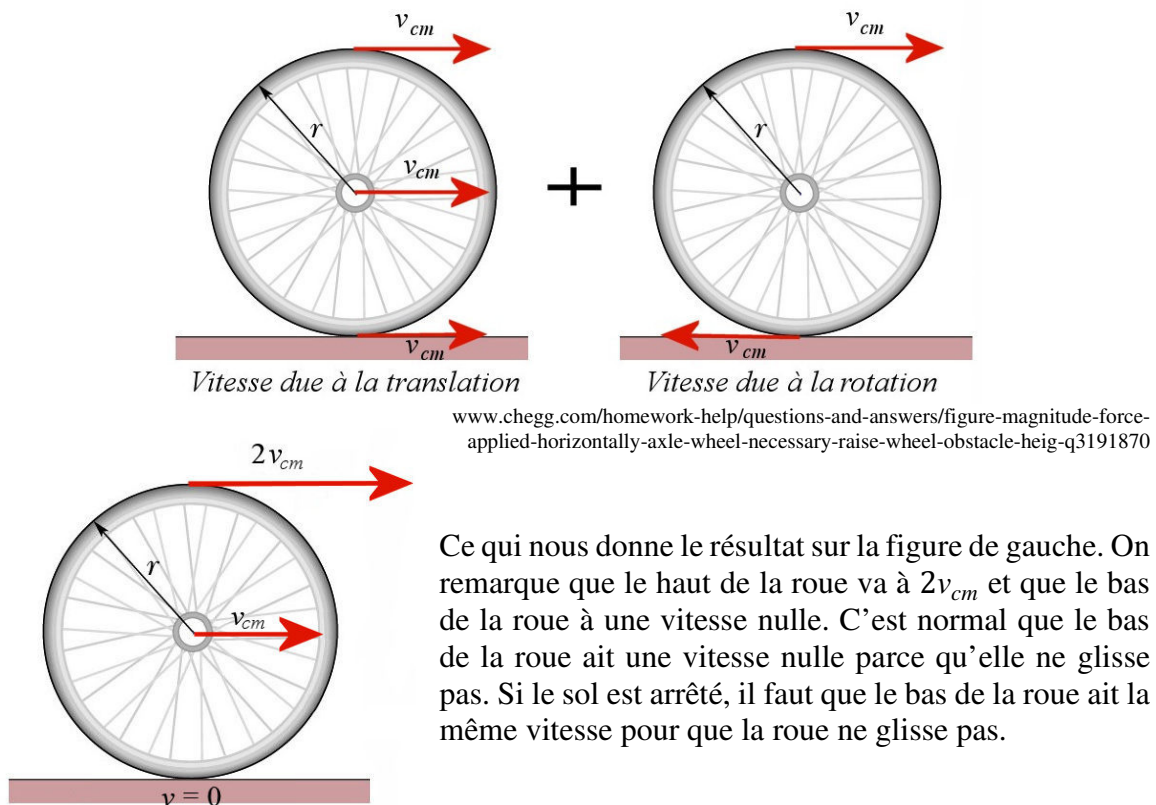
En une minute, le nombre de tours est

$$13,26 \frac{tours}{s} \cdot 60 \frac{s}{min} = 795,8 \frac{tours}{min}$$

Cherchons maintenant la vitesse de quelques points de la roue. La vitesse d'un morceau de la roue est le résultat de deux vitesses : la vitesse de translation, qui est la même partout, et la vitesse de rotation qui augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'axe. Sur le bord de la roue, la vitesse de rotation est égale à la vitesse du centre de masse s'il n'y a pas de glissement, car

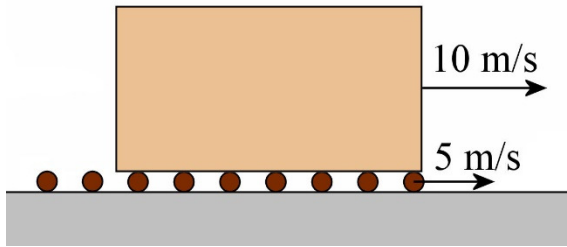
$$v = \omega r = \frac{v_{cm}}{R} R = v_{cm}$$

On doit donc combiner les vitesses indiquées sur la figure suivante.



Ce qui nous donne le résultat sur la figure de gauche. On remarque que le haut de la roue va à  $2v_{cm}$  et que le bas de la roue à une vitesse nulle. C'est normal que le bas de la roue ait une vitesse nulle parce qu'elle ne glisse pas. Si le sol est arrêté, il faut que le bas de la roue ait la même vitesse pour que la roue ne glisse pas.

Cela signifie que si vous allez en voiture à 100 km/h, le haut de vos roues se déplace à 200 km/h.



Cela veut dire aussi que si on pousse un gros bloc de pierre qui roule sur des billots, le bloc, en contact avec le dessus des billots, ira deux fois plus vite que les billots comme illustrés sur la figure.

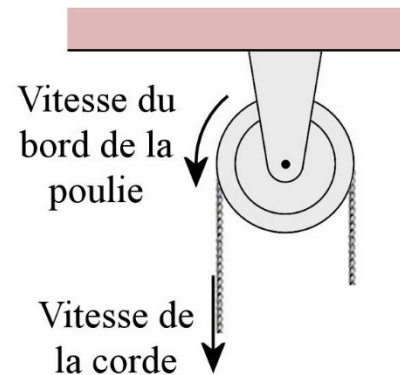
## Les conditions pour une corde sur une poulie

Quand une corde passe dans une poulie et qu'elle ne glisse pas, la vitesse de la corde doit être la même que la vitesse de la poulie à l'endroit où passe la corde.

Cela signifie que si la corde passe dans la poulie à une distance  $r$  de l'axe de rotation, la vitesse de la poulie à cette distance de l'axe doit être égale à la vitesse de la corde. On doit donc avoir

$$v_{\text{corde}} = v_{\text{poulie}}$$

$$v_{\text{corde}} = \omega r$$



De plus, si, on dérive pour obtenir les accélérations, on arrive à

$$a_{\text{corde}} = \alpha r$$

Les conditions sont donc les suivantes.

**Lien entre les vitesses et les accélérations pour une corde passant dans une poulie quand la corde ne glisse pas sur la poulie**

$$v_{\text{corde}} = \omega r$$

$$a_{\text{corde}} = \alpha r$$

où  $r$  est la distance entre la corde et l'axe de rotation

**Exemple 12.1.4**

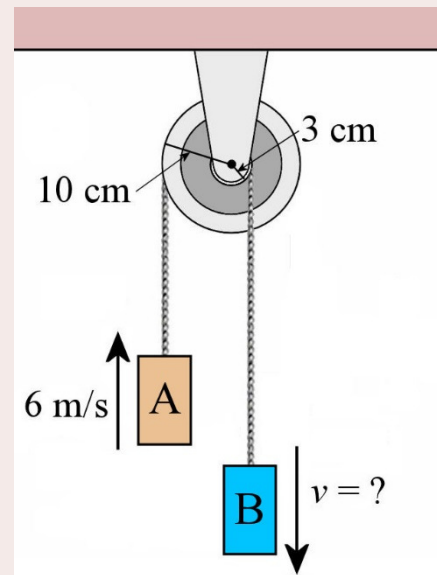
Dans la situation montrée sur la figure, quelle est la vitesse du bloc  $B$  si les cordes ne glissent pas sur la poulie ?

La corde de gauche a la même vitesse que le bloc  $A$ . Comme cette corde passe dans la poulie à 100 mm de l'axe, la vitesse de la poulie à 100 mm de l'axe doit être de 6 m/s. La vitesse angulaire de la poulie est donc

$$\begin{aligned}v_{\text{corde 1}} &= \omega r \\6 \frac{\text{m}}{\text{s}} &= \omega \cdot 0,1 \text{m} \\ \omega &= 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

La corde de droite a la même vitesse que le bloc  $B$ . Comme cette corde passe dans la poulie à 30 mm de l'axe, la vitesse de la poulie à 30 mm de l'axe doit être égale à la vitesse du bloc  $B$ . Cette vitesse est

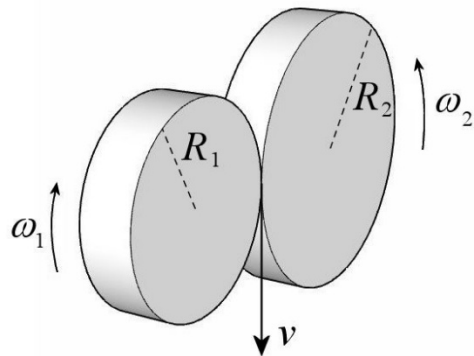
$$\begin{aligned}v_{\text{corde 2}} &= \omega r \\v_B &= 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,03 \text{m} \\v_B &= 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

**La transmission du mouvement de rotation**

Si deux roues sont en contact et qu'il n'y a pas de glissement entre les deux, il existe un lien entre les vitesses angulaires des roues. Comme il n'y a pas de glissement, la vitesse des roues doit être la même au point de contact. On a donc

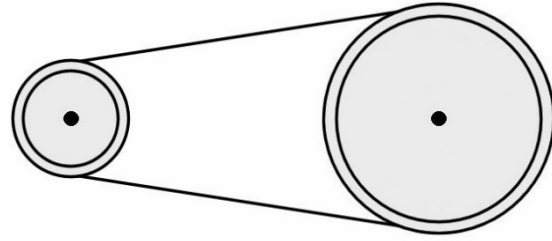
$$v_1 = v_2$$

Ce qui nous donne

**La transmission du mouvement de rotation.**

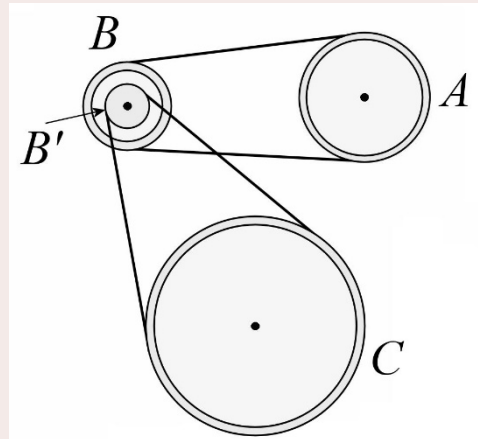
$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

Cette relation reste valide même si les roues ne sont pas en contact, mais sont plutôt reliées par une courroie ou une chaîne. Dans ce cas,  $R$  représente la distance entre l'axe de rotation et l'endroit où la courroie ou la chaîne est en contact avec la roue.



### Exemple 12.1.5

La poulie  $A$  ayant un rayon de 15 cm tourne avec une vitesse angulaire de 10 rad/s. La poulie  $B$  a un rayon de 10 cm, la poulie  $B'$ , qui est soudée à la poulie  $B$ , a un rayon de 5 cm et la poulie  $C$  a un rayon de 25 cm. Quelle est la vitesse angulaire de la poulie  $C$  ?



Commençons par trouver la vitesse angulaire de la poulie  $B$ . On a

$$\begin{aligned}\omega_A R_A &= \omega_B R_B \\ 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,15\text{m} &= \omega_B \cdot 0,1\text{m} \\ \omega_B &= 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

La poulie  $B'$  tourne avec la même vitesse angulaire puisqu'elle est soudée à la poulie  $B$ . On trouve donc la vitesse angulaire de la poulie  $C$  avec

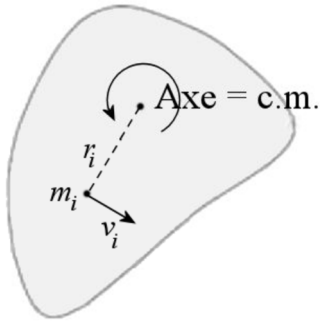
$$\begin{aligned}\omega_B R_{B'} &= \omega_C R_C \\ 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,05\text{m} &= \omega_C \cdot 0,25\text{m} \\ \omega_C &= 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

## 12.2 L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION ET LE MOMENT D'INERTIE

### Objet qui tourne autour d'un centre de masse immobile

Calculons l'énergie cinétique totale en sommant l'énergie cinétique de chaque atome composant l'objet. On a alors

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



Comme la vitesse à une distance  $r$  de l'axe de rotation est  $v = \omega r$ , on a

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2$$

La vitesse angulaire étant la même pour toutes les petites masses, c'est une constante qu'on peut sortir de la somme. On a ainsi

$$\begin{aligned} E_k &= \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 \end{aligned}$$

La quantité entre parenthèses est une quantité qui revient souvent en rotation. Elle porte le nom de *moment d'inertie* (nom donné par Euler en 1758).

### Le moment d'inertie d'un objet

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Dans cette équation,  $r$  est la distance entre l'atome et l'axe de rotation (qui, ici, est au centre de masse). Les unités du moment d'inertie sont des kg m<sup>2</sup>.

On verra plus loin que le moment d'inertie nous indique si l'objet est difficile à mettre en rotation. Plus un objet aura un moment d'inertie élevé, plus il sera difficile à mettre en rotation. C'est l'équivalent, pour le mouvement de rotation, de la masse, qui mesure l'inertie pour le mouvement de translation. Cependant, en rotation, l'inertie ne dépend pas uniquement de la masse, elle dépend aussi de la forme de l'objet.

Le terme « moment » vous intrigue peut-être. Il n'est pas utilisé ici dans le sens d'« instant », mais plutôt dans son sens mathématique. Un moment est une quantité multipliée par une distance avec une certaine puissance. Si la puissance est deux, comme c'est le cas ici avec  $r^2$ , c'est un moment d'ordre 2. Remarquez que quand on calculait le centre de masse d'un objet, on calculait un moment d'ordre 1. Cette terminologie sera présente partout dans ce chapitre.

Dans le calcul de moment d'inertie, il y a la distance entre les petites masses et l'axe de rotation. Ici, comme l'axe est au centre de masse, on calcule le moment d'inertie en utilisant les distances entre chaque masse et le centre de masse. Pour indiquer qu'on a calculé le moment d'inertie avec les distances du centre de masse, on note le moment d'inertie  $I_{cm}$ .

En utilisant la formule du moment d'inertie, l'énergie cinétique

$$E_k = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$$

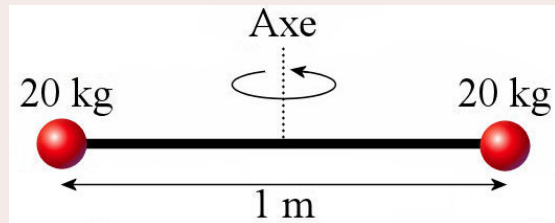
devient donc

### Énergie cinétique d'un objet qui tourne autour d'un axe immobile qui passe par le centre de masse

$$E_k = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

#### Exemple 12.2.1

L'objet représenté sur la figure tourne en faisant 1 tour par seconde. Quelle est son énergie cinétique ? (On néglige la masse de la tige et on considère que les deux masses de 20 kg sont ponctuelles.)



Pour calculer l'énergie cinétique, on doit avoir le moment d'inertie de l'objet. Comme chacune des masses de 20 kg sont à 50 cm de l'axe, on a

$$\begin{aligned} I_{cm} &= \sum m_i r_i^2 \\ &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \\ &= 20\text{kg} \cdot (0,5\text{m})^2 + 20\text{kg} \cdot (0,5\text{m})^2 \\ &= 10\text{kgm}^2 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de rotation est donc

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10\text{kgm}^2 \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 197,4\text{J} \end{aligned}$$

Si on avait trouvé la vitesse de chacune des masses et ensuite fait la somme des  $\frac{1}{2}mv^2$ , nous aurions trouvé la même valeur.

Notez qu'un objet qui tourne sur lui-même dans les airs ou dans l'espace tourne nécessairement autour de son centre de masse.

### Objet qui tourne autour d'un axe immobile qui n'est pas au centre de masse de l'objet

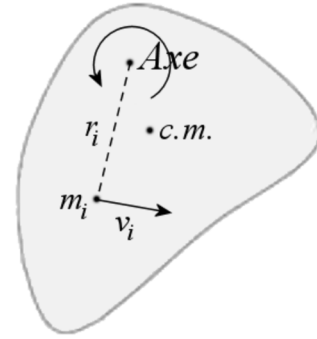
#### La formule de l'énergie cinétique

Calculons l'énergie cinétique totale en sommant l'énergie cinétique de chaque atome composant l'objet. On a alors

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Comme la vitesse à une distance  $r$  de l'axe de rotation est  $v = \omega r$ , on a

$$\begin{aligned} E_k &= \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2 \end{aligned}$$



On retrouve donc cette fameuse somme des masses et des distances au carré. Cette somme est le moment d'inertie

$$I = \sum m_i r_i^2$$

et l'énergie est donc

**Énergie cinétique d'un objet qui tourne autour d'un axe qui ne passe pas par le centre de masse**

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

### Le moment d'inertie avec un axe ne passant pas au centre de masse

Dans ce dernier calcul, le moment d'inertie est différent puisque les distances ne sont pas mesurées par rapport à un axe situé au centre de masse, comme c'était le cas avec  $I_{cm}$ , mais par rapport à un axe situé à un autre endroit. Cela change toutes les distances et change complètement le résultat de la somme. La valeur de  $I$  d'un objet dépend donc de la position de l'axe de rotation.

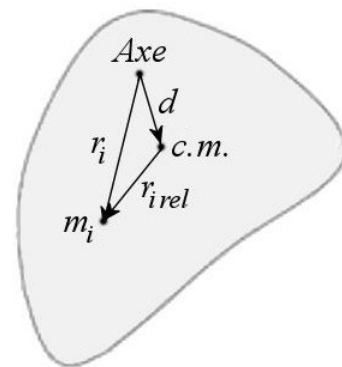
Heureusement, il est possible de connaître la valeur du moment d'inertie avec n'importe quel axe à partir de  $I_{cm}$ . Puisque la position de la masse est aussi

$$\vec{r}_i = \vec{d} + \vec{r}_{i\,rel}$$

( $r_{rel}$  est la position de chaque masse mesurée par rapport au centre de masse.)

On a alors

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i (\vec{r}_{i\,rel} + \vec{d})^2 \\ &= \sum m_i (r_{i\,rel}^2 + 2\vec{r}_{i\,rel} \cdot \vec{d} + d^2) \\ &= \sum m_i r_{i\,rel}^2 + \sum m_i 2\vec{r}_{i\,rel} \cdot \vec{d} + \sum m_i d^2 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= \sum m_i r_{i\text{rel}}^2 + 2\left(\sum m_i \vec{r}_{i\text{rel}}\right) \cdot \vec{d} + \left(\sum m_i\right) d^2 \\
 &= \sum m_i r_{i\text{rel}}^2 + 2\left(\sum m_i \vec{r}_{i\text{rel}}\right) \cdot \vec{d} + m d^2
 \end{aligned}$$

Le deuxième terme est nul puisque

$$\frac{1}{m} \sum m_i \vec{r}_{i\text{rel}} = \vec{r}_{\text{cm rel}}$$

est le calcul de la position du centre de masse en prenant le centre de masse comme origine. Il est évident que si le centre de masse est à l'origine, on a  $r_{\text{cm rel}} = 0$ . Il reste donc

$$I = \sum m_i r_{i\text{rel}}^2 + m d^2$$

Le premier terme est le calcul du moment d'inertie quand l'axe est au centre de masse ( $I_{\text{cm}}$ ) puisque toutes les distances  $r_{\text{rel}}$  sont mesurées à partir du centre de masse. On a donc

**$I$  à partir de  $I_{\text{cm}}$  (théorème des axes parallèles)**

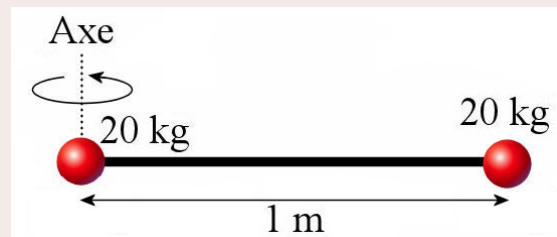
$$I = I_{\text{cm}} + m d^2$$

Rappelons que, dans cette formule,  $d$  est la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse.

Notez que les deux axes en question (celui passant par le centre de masse et celui ne passant pas par le centre de masse) doivent être parallèles pour qu'on puisse appliquer cette formule.

### Exemple 12.2.2

L'objet représenté sur la figure tourne en faisant 1 tour par seconde. Quelle est son énergie cinétique ? (On néglige la masse de la tige et on considère que les deux masses de 20 kg sont ponctuelles.)



Pour calculer l'énergie cinétique, on doit avoir le moment d'inertie de l'objet. On peut le calculer de deux façons. On peut faire

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m_i r_i^2 \\
 &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \\
 &= 20\text{kg} \cdot (0\text{m})^2 + 20\text{kg} \cdot (1\text{m})^2 \\
 &= 20\text{kgm}^2
 \end{aligned}$$

On peut aussi le trouver avec

$$\begin{aligned}
 I &= I_{cm} + md^2 \\
 &= 10\text{kgm}^2 + 40\text{kg} \cdot (0,5\text{m})^2 \\
 &= 20\text{kgm}^2
 \end{aligned}$$

On a utilisé la valeur de  $I_{cm}$  trouvé à l'exemple 12.2.1. Comme le centre de masse de cet objet étant situé exactement à mi-chemin entre les deux boules, la distance entre le centre de masse et l'axe est  $d = 0,5 \text{ m}$ .

L'énergie cinétique est donc

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{2} I \omega^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 20\text{kgm}^2 \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \\
 &= 394,8\text{J}
 \end{aligned}$$

## Objet qui se déplace et qui tourne autour d'un centre de masse

Il arrive qu'un objet puisse faire un mouvement de translation en même temps qu'il tourne sur lui-même autour de son centre de masse. On peut penser aux roues d'une voiture qui avance ou à un projectile qui tourne sur lui-même pendant son vol. Dans ce cas, on peut trouver l'énergie cinétique avec (formule obtenue à la fin du chapitre précédent)

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i\text{rel}}^2$$

La vitesse  $v_{rel}$  est l'écart de vitesse avec le centre de masse.

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{v}_{cm}$$

Puisqu'on soustrait la vitesse du centre de masse, l'effet de la translation est éliminé. Cela signifie qu'on doit uniquement considérer la rotation dans le calcul de  $v_{rel}$ . On a donc  $v_{rel} = \omega r$ , ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i\text{rel}}^2 \\
 &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_{i\text{rel}})^2 \\
 &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \left( \sum m_i r_{i\text{rel}}^2 \right) \omega^2
 \end{aligned}$$

Puisque le terme entre parenthèses est le moment d'inertie (calculé à partir du centre de masse puisqu'on considère les objets qui tournent autour de leur centre de masse), on a

### Énergie cinétique d'un objet qui fait une translation et une rotation

$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2}mv_{cm}^2}_{E_k \text{ de translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{E_k \text{ de rotation}}$$

C'est donc une simple somme des énergies cinétiques de translation et de rotation.

#### Exemple 12.2.3

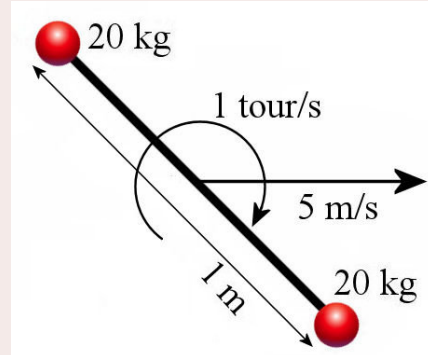
Quelle est l'énergie cinétique de cet objet se déplaçant à 5 m/s et tournant sur lui-même avec 1 tour/s ?

L'énergie cinétique est

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Puisqu'on sait déjà que le moment d'inertie de cet objet est de  $10 \text{ kgm}^2$  (exemple 12.2.1), on a

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 40 \text{ kg} \cdot \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kgm}^2 \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 500 \text{ J} + 197,4 \text{ J} \\ &= 697,4 \text{ J} \end{aligned}$$



## 12.3 LE MOMENT D'INERTIE

On sait que le moment d'inertie d'un objet est

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Quand il n'y a que quelques masses qui composent le système, comme dans les exemples précédents où il n'y avait que deux masses, ce n'est pas très long à calculer. Cependant, ça peut devenir compliqué si on veut calculer le moment d'inertie d'une sphère par exemple. Il faudrait alors faire la somme sur tous les atomes formant la sphère. Ça risque d'être long.

Heureusement, on peut aussi faire le calcul du moment d'inertie en utilisant le calcul intégral. On sépare l'objet en petites masses infinitésimales et on fait la somme avec l'intégrale suivante.

$$\lim_{m \rightarrow 0} \sum r_i^2 m_i = \int r^2 dm$$

Généralement, le calcul du moment d'inertie avec cette intégrale est assez complexe. Pour un objet en deux dimensions, il faut faire deux intégrales doubles et pour un objet en trois dimensions, il faut faire trois intégrales triples. Comme vous n'avez jamais fait d'intégrales doubles ou triples de ce genre, on ne demandera pas ce type de calcul. Vous pouvez cependant faire le calcul pour un objet en une dimension, c'est-à-dire pour une tige.

Pour calculer le moment d'inertie, on va séparer la tige en petits morceaux de longueur infinitésimale. Le moment d'inertie est alors

$$I = \int x^2 dm$$

Chaque morceau a donc une longueur  $dx$  et une masse  $dm$  et est à une distance  $x$  de l'axe de rotation.



La masse linéique de ce morceau est

$$\lambda = \frac{\text{masse}}{\text{longueur}} = \frac{dm}{dx}$$

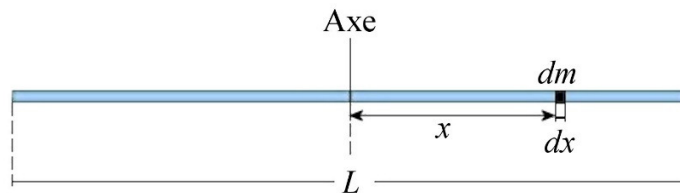
La masse du morceau est donc

$$dm = \lambda dx$$

Pour connaître le moment d'inertie, on doit donc résoudre

$$I = \int x^2 \lambda dx$$

Utilisons cette formule pour calculer le moment d'inertie d'une tige uniforme ( $\lambda = \text{constante}$ ) quand l'axe passe par le centre de la tige. On a alors la situation suivante.



Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_{cm} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx \\ &= \lambda \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \end{aligned}$$

$$= \lambda \left[ \frac{L^3}{24} - \frac{-L^3}{24} \right]$$

$$= \lambda \frac{L^3}{12}$$

Puisque la masse linéique de la tige est

$$\lambda = \frac{m}{L}$$

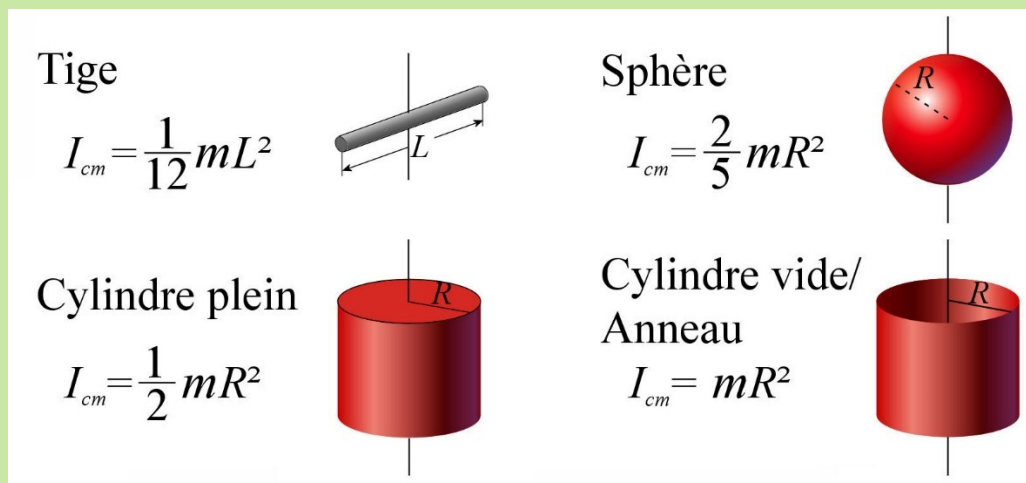
on a comme résultat final

$$I_{cm} = \frac{m}{L} \frac{L^3}{12}$$

$$= \frac{1}{12} mL^2$$

En procédant de façon un peu similaire, mais en trois dimensions, on peut trouver le moment d'inertie de plusieurs objets. Voici les résultats pour 4 formes importantes.

#### Moments d'inertie de 4 objets de densité uniforme



Bien d'autres moments d'inertie ont été calculés. Vous pouvez voir une liste plus complète sur ce site.

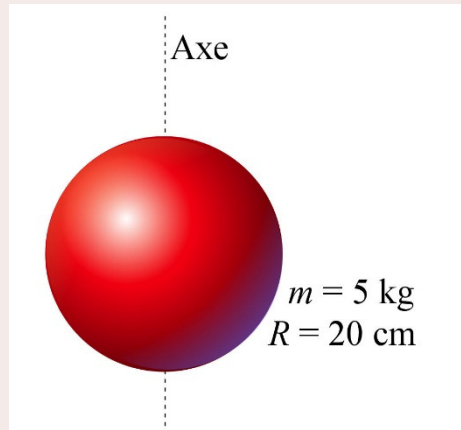
<https://www.livephysics.com/physical-constants/mechanics-pc/moment-inertia-uniform-objects/>

**Exemple 12.3.1**

Quel est le moment d'inertie de cette sphère ?

Avec une sphère et un axe de rotation passant par le centre de masse, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_{cm} &= \frac{2}{5} mR^2 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 5\text{ kg} \cdot (0,2\text{ m})^2 \\ &= 0,08\text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

**Exemple 12.3.2**

Quel est le moment d'inertie de cette sphère ?

Cette fois, l'axe ne passe pas par le centre de masse de la sphère. Le moment d'inertie est donc

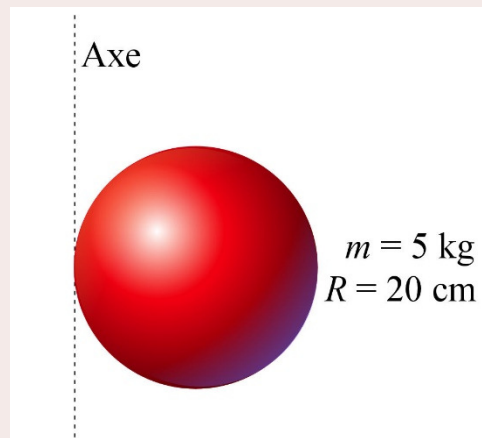
$$I = I_{cm} + md^2$$

Le premier terme ( $I_{cm}$ ) est le moment d'inertie d'une sphère quand l'axe passe par le centre de masse. Ce moment d'inertie est

$$I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$$

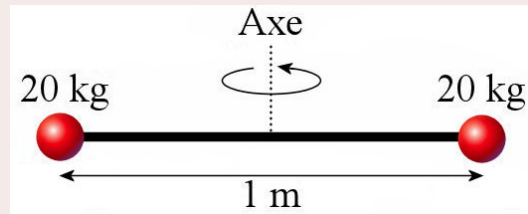
Dans le deuxième terme,  $d$  est la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse de la sphère. Ici, cette distance est de 20 cm. On a donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} mR^2 + mr_{cm}^2 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 5\text{ kg} \cdot (0,2\text{ m})^2 + 5\text{ kg} \cdot (0,2\text{ m})^2 \\ &= 0,28\text{ kgm}^2 \end{aligned}$$



### Exemple 12.3.3

Quel est le moment d'inertie de l'objet représenté sur la figure ? La masse de la tige est de 1,2 kg et le rayon des sphères est de 5 cm. (Cette fois, on ne néglige pas la masse de la tige et on ne considère pas que les deux sphères de 20 kg sont ponctuelles.)



Cet objet est formé d'une tige et de deux sphères.

Le moment d'inertie de la tige (qui tourne autour de son centre de masse) est

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{12} mL^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 1,2 \text{ kg} \cdot (0,9 \text{ m})^2 \\ &= 0,081 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie de la sphère de droite (qui ne tourne pas autour de son centre de masse) est

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{5} mR^2 + md^2 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 20 \text{ kg} \cdot (0,05 \text{ m})^2 + 20 \text{ kg} \cdot (0,50 \text{ m})^2 \\ &= 5,02 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie de la sphère de gauche (qui ne tourne pas autour de son centre de masse) est identique à celui de la sphère de droite.

$$I_3 = 5,02 \text{ kgm}^2$$

Le moment d'inertie totale est donc

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= 0,081 \text{ kgm}^2 + 5,02 \text{ kgm}^2 + 5,02 \text{ kgm}^2 \\ &= 10,121 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

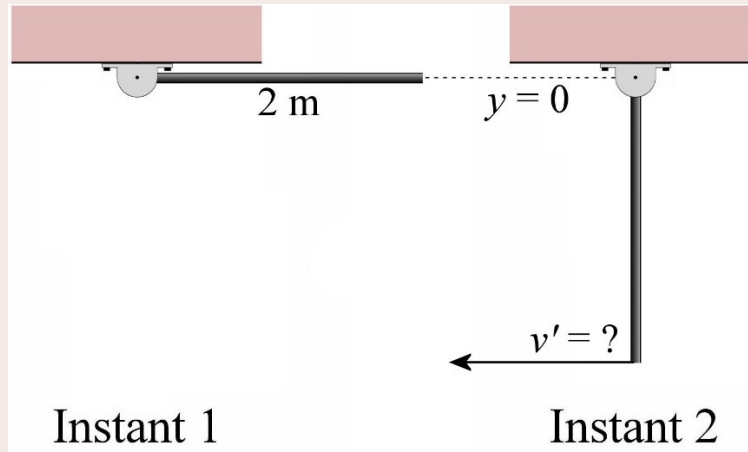
## 12.4 LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Nous allons maintenant appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique avec de la rotation. Il faudra bien faire attention lors du calcul de l'énergie cinétique. Il faut prendre la formule qui s'applique à la situation.



**Exemple 12.4.1**

On tient dans une position horizontale une tige de 2 m et de 6 kg fixée par un bout à un pivot. Quelle sera la vitesse de l'autre bout quand elle sera en position verticale si on laisse tomber la tige ?

Formule de l'énergie mécanique

Comme il n'y a qu'un seul objet, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = E_k + mgy$$

Avec la rotation, l'énergie cinétique n'est pas simplement  $\frac{1}{2}mv^2$ . Nous avons ici le cas d'une tige tournant autour d'un axe immobile ne passant pas par le centre de masse. L'énergie cinétique est donc

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Le moment d'inertie est celui d'une tige fixée par le bout. On peut trouver ce moment avec le théorème des axes parallèles.

$$\begin{aligned} I &= I_{cm} + md^2 \\ &= \frac{1}{12}mL^2 + md^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 6kg \cdot (2m)^2 + 6kg \cdot (1m)^2 \\ &= 8kgm^2 \end{aligned}$$

$d$  est égal à 1 m puisque le centre de masse est au milieu de la tige et l'axe de rotation est au bout de la tige. La distance entre les deux est donc égale à la moitié de la longueur de la tige.

Notez qu'on aurait pu aussi calculer  $I$  ainsi

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 \\
 &= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)mL^2 \\
 &= \frac{1}{3}mL^2 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 6\text{kg} \cdot (2\text{m})^2 \\
 &= 8\text{kgm}^2
 \end{aligned}$$

Calculons maintenant les énergies mécaniques aux instants 1 et 2. On va utiliser un  $y = 0$  situé à la hauteur de l'axe de rotation.

### Énergie à l'instant 1

À l'instant 1, la vitesse angulaire de la tige est nulle et le centre de masse de la tige est à  $y = 0$ . On a donc

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

### Énergie à l'instant 2

À l'instant 2, le centre de masse de la tige est à  $y = -1$  m. On a donc

$$\begin{aligned}
 E' &= \frac{1}{2}I\omega'^2 + mgy' \\
 &= \frac{1}{2}I\omega'^2 + mg(-1\text{m})
 \end{aligned}$$

### Application du principe de conservation de l'énergie mécanique

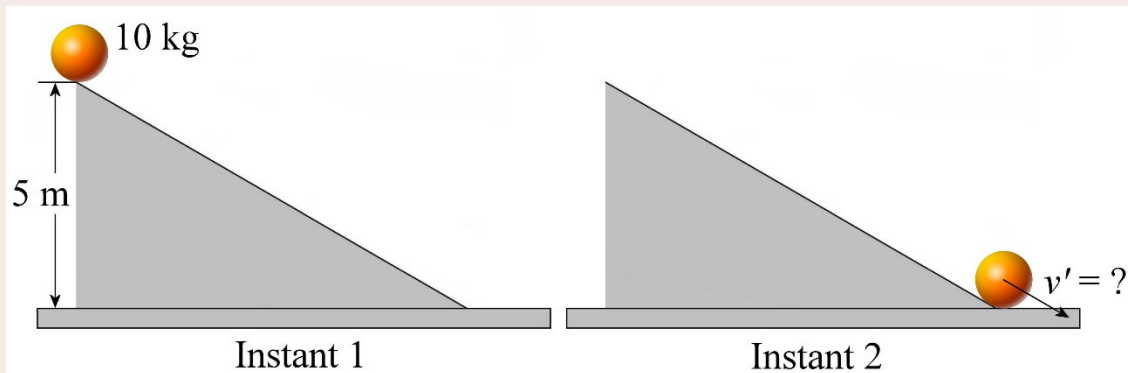
$$\begin{aligned}
 E &= E' \\
 0 &= \frac{1}{2}I\omega'^2 + mg(-1\text{m}) \\
 0 &= \frac{1}{2} \cdot 8\text{kgm}^2 \cdot \omega'^2 + 6\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (-1\text{m}) \\
 \omega' &= 3,83 \frac{\text{rad}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

On peut maintenant trouver la vitesse du bout de la tige à partir de la vitesse angulaire.

$$\begin{aligned}
 v &= \omega r \\
 &= 3,83 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2\text{m} \\
 &= 7,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

### Exemple 12.4.2

Une boule initialement au repos roule sans glisser le long d'une pente de 5 m de haut. La boule a une masse de 10 kg et un rayon de 20 cm. Quelle est la vitesse de la boule au bas de la pente ?



#### Formule de l'énergie mécanique

Comme il n'y a qu'un seul objet, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = E_k + mgy$$

Nous avons affaire ici à un objet qui se déplace et qui tourne sur lui-même. L'énergie cinétique est donc

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

et on a alors

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgy$$

#### Énergie à l'instant 1

À l'instant 1, la vitesse et la vitesse angulaire sont nulles. Le centre de masse de la boule est à 5 m + 0,2 m = 5,2 m au-dessus du sol.

En plaçant notre  $y = 0$  au sol, on a

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgy \\
 &= 0 + 0 + 10\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (5,2\text{m}) \\
 &= 509,6\text{J}
 \end{aligned}$$

### Énergie à l'instant 2

À l'instant 2, la balle a une vitesse, mais son centre de masse est à  $y = 0,2\text{ m}$ . On a donc

$$\begin{aligned}
 E' &= \frac{1}{2}mv_{cm}'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega'^2 + mgy' \\
 &= \frac{1}{2}mv_{cm}'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega'^2 + 10\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot (0,2\text{m}) \\
 &= \frac{1}{2}mv_{cm}'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega'^2 + 19,6\text{J}
 \end{aligned}$$

Pour calculer cette énergie, il faut trouver le moment d'inertie de la sphère. Ce moment est

$$\begin{aligned}
 I_{cm} &= \frac{2}{5}mR^2 \\
 &= \frac{2}{5} \cdot 10\text{kg} \cdot (0,2\text{m})^2 \\
 &= 0,16\text{kgm}^2
 \end{aligned}$$

Il y a aussi un lien entre la vitesse angulaire et la vitesse du centre de masse puisque la sphère roule sans glisser. Ce lien est

$$v_{cm} = \omega R = \omega \cdot 0,2\text{m}$$

L'énergie mécanique à l'instant 2 est donc

$$\begin{aligned}
 E' &= \frac{1}{2}mv_{cm}'^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega'^2 + 19,6\text{J} \\
 &= \frac{1}{2}10\text{kg} \cdot v_{cm}'^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,16\text{kgm}^2 \cdot \left(\frac{v_{cm}'}{0,2\text{m}}\right)^2 + 19,6\text{J} \\
 &= 5\text{kg} \cdot v_{cm}'^2 + 2\text{kg} \cdot v_{cm}'^2 + 19,6\text{J} \\
 &= 7\text{kg} \cdot v_{cm}'^2 + 19,6\text{J}
 \end{aligned}$$

### Application du principe de conservation de l'énergie mécanique

Selon la conservation de l'énergie mécanique, on doit avoir que

$$E = E'$$

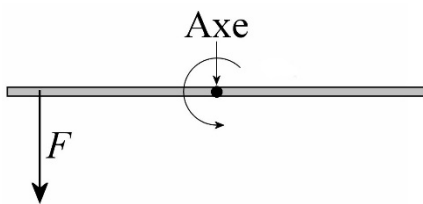
$$509,6J = 7kg \cdot v_{cm}'^2 + 19,6J$$

$$v_{cm}' = 8,367 \frac{m}{s}$$

## 12.5 LE MOMENT DE FORCE

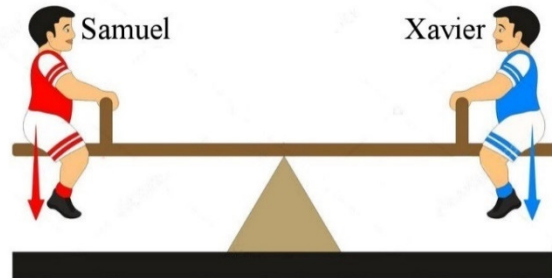
### Grandeur du moment de force

Nous allons maintenant examiner l'équilibre de rotation d'un objet.



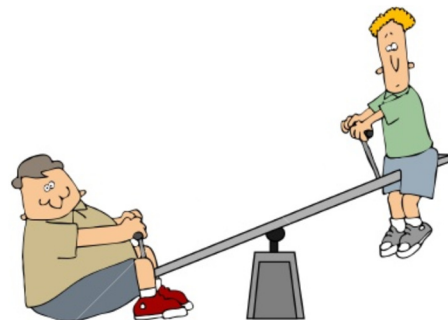
Pour y arriver, on doit connaître les effets d'une force sur la rotation d'un objet. Supposons qu'on a un objet pouvant tourner autour d'un axe de rotation. Si on applique une force sur cet objet initialement au repos, l'objet commence à tourner. La force entraîne donc une accélération angulaire.

Pour qu'il y ait équilibre de rotation, il faut donc que l'effet de toutes les forces s'annule. Par exemple, les forces exercées par ces 2 jumeaux sur la planche s'annulent. La force faite par Samuel veut faire tourner la planche dans le sens contraire des aiguilles d'une montre alors que la force exercée par Xavier cherche à faire tourner la planche dans le sens des aiguilles d'une montre. Les effets des deux forces s'annulent.



[wdrfree.com/stock-vector/download/trigonometry-static-equilibrium-infographic-diagram-209863788](http://wdrfree.com/stock-vector/download/trigonometry-static-equilibrium-infographic-diagram-209863788)

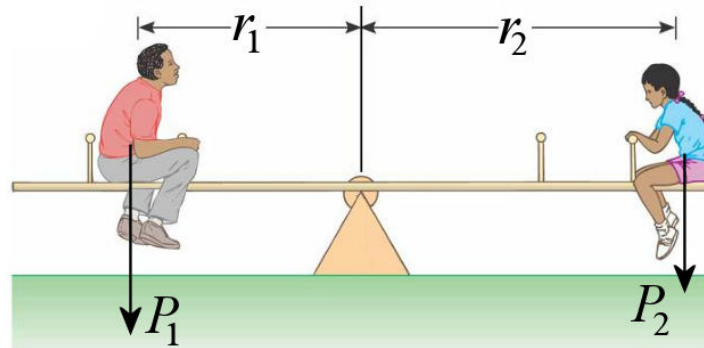
Xavier et Samuel exercent des forces identiques de chaque côté et on pourrait donc penser qu'il y a équilibre si les forces sont identiques de chaque côté. Toutefois, ce n'est pas le cas. Il n'y a pas que la grandeur de la force qui compte pour la rotation, le point d'application de la force est également très important. Illustrons ceci par un exemple. Supposons que deux personnes, un gros et un maigre, s'assoient sur une balançoire. Si les deux personnes sont assises à la même distance de l'axe de rotation, on sait qu'il ne peut y avoir d'équilibre. La personne la plus maigre se retrouve perchée dans les airs.



[francais.istockphoto.com/photo-9020464-balancoire-basculer-enfant-obese-cartoon-petits-garcons.php](http://francais.istockphoto.com/photo-9020464-balancoire-basculer-enfant-obese-cartoon-petits-garcons.php)

Cependant, il est possible d'obtenir un équilibre même si les forces de chaque côté sont inégales. En variant le point d'application d'une des forces, on peut rétablir l'équilibre.

Dans le cas de la balançoire, il faut changer l'endroit où une des personnes est assise. On a alors la situation d'équilibre suivante.



[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/boy-mass-98kg-seesaw-41kg-girl-girl-distance-b-44m-center-seesaw-find-distance-seesaw-perf-q37449846](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/boy-mass-98kg-seesaw-41kg-girl-girl-distance-b-44m-center-seesaw-find-distance-seesaw-perf-q37449846)

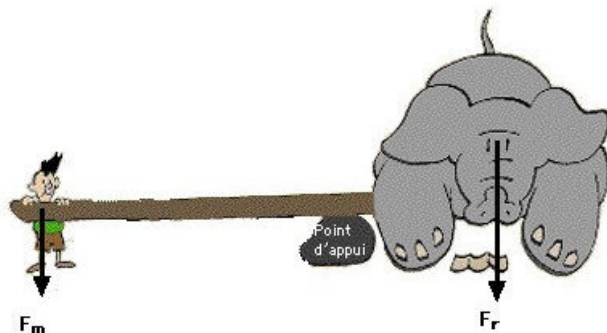
On voit que la force plus importante à gauche est compensée par une distance de l'axe plus courte. Ceci montre bien qu'il n'y a pas que la force qui importe, la distance à laquelle est appliquée cette force est tout aussi importante.

La condition d'équilibre dans cette situation est connue depuis bien longtemps. Déjà, Archimède la connaissait en 250 av. J.-C. On doit avoir, en se fiant aux variables sur la dernière figure.

$$P_1 r_1 = P_2 r_2$$

Ainsi, si le papa a un poids deux fois plus grand que celui de sa fille, il devra s'asseoir deux fois plus près de l'axe de rotation si on veut avoir l'équilibre.

Avec peu de force, on pourrait donc soulever des objets très lourds à l'aide d'un tel levier. Un enfant pourrait soulever un éléphant si la distance entre l'axe et le point d'application de la force est suffisamment grande du côté de l'enfant. C'est ce qui avait fait dire à Archimède que si on lui donnait un point d'appui et un levier assez long, il pourrait soulever le monde.



[perso.b2b2c.ca/login/JP/mecanique/machsimp.html](http://perso.b2b2c.ca/login/JP/mecanique/machsimp.html)

C'est donc la force multipliée par la distance qui détermine l'effet d'une force sur la rotation. On appellera cette quantité le moment de force. Il est noté avec le symbole  $\tau$ .

$$\tau = Fr$$

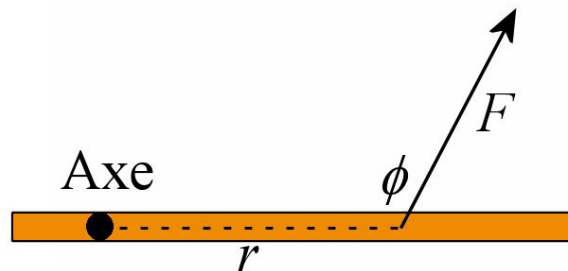
Le moment de force est en N m. (Même si les N m sont équivalents à des joules, on n'utilise jamais le joule pour le moment de force.) On parle encore de moment puisqu'il s'agit d'une quantité multipliée par une distance.

Cette première formule du moment de force n'est pas notre formule la plus générale puisqu'elle se limite au cas où la force est perpendiculaire à une ligne allant du point d'application de la force à l'axe de rotation. Déjà, Archimède avait généralisé ce concept en étudiant l'équilibre des leviers inclinés ou même pliés comme celui illustré sur la figure. Héron d'Alexandrie (1er siècle apr. J.-C.) et Jordanus de Nemore (13<sup>e</sup> siècle) obtinrent également une solution correcte pour l'équilibre d'objets de la sorte.

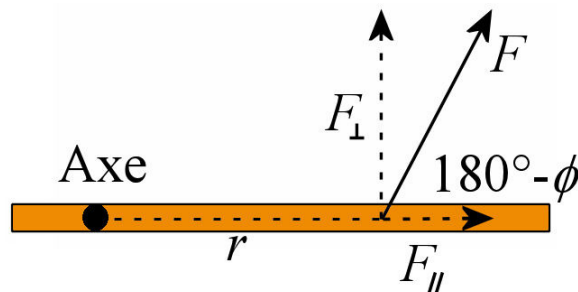


[catalogue.museogalileo.it/object/FirstorderLeverWithBentBeam.html](http://catalogue.museogalileo.it/object/FirstorderLeverWithBentBeam.html)

Quand la force n'est pas perpendiculaire à la ligne allant de l'axe au point d'application de la force, nous avons alors la situation illustrée sur la figure suivante.



Pour déterminer comment cette force influence la rotation, on la sépare en composantes. Une composante est perpendiculaire à la ligne  $r$  et l'autre est parallèle à la ligne  $r$ .



Évidemment, la composante parallèle ne fait pas tourner l'objet, seule la composante perpendiculaire fait tourner l'objet. La grandeur du moment de force quand la force est perpendiculaire est

$$\tau = F_{\perp} r$$

On peut ensuite déterminer la valeur de la force perpendiculaire à partir de  $F$  et de l'angle. On a

$$F_{\perp} = F \sin(180^{\circ} - \phi)$$

$$F_{\perp} = F \sin \phi$$

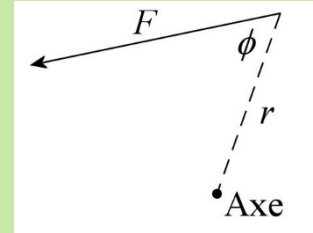
puisque  $\sin(180^{\circ} - \phi) = \sin \phi$ . Ainsi, notre formule plus générale du moment de force est

**Moment de force (torque en anglais)**

$$\tau = Fr \sin \phi$$

ou

$$\tau = F_{\perp} r$$

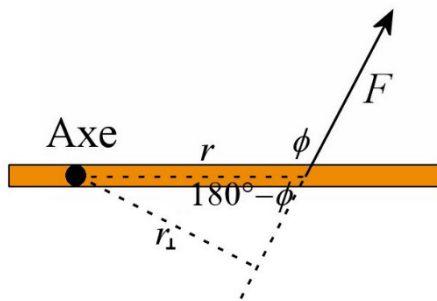


Il existe une autre formule équivalente pour le calcul du moment de force. Pour la trouver, on doit faire une droite qui prolonge le vecteur force. On prend ensuite la distance la plus courte entre cette droite et l'axe de rotation ( $r_{\perp}$  sur la figure). Selon la figure, on a

$$\frac{r_{\perp}}{r} = \sin(180^{\circ} - \phi)$$

$$r_{\perp} = r \sin(180^{\circ} - \phi)$$

$$r_{\perp} = r \sin \phi$$



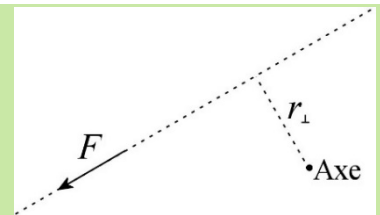
Cette distance porte le nom de *bras de levier*. Le moment de force

$$\tau = Fr \sin \phi$$

devient donc

**Autre formule pour le moment de force**

$$\tau = Fr_{\perp}$$



On aurait pu se passer de cette formule, mais elle est parfois utile, selon les données qu'on a initialement, pour calculer plus rapidement le moment de force dans certaines situations.

Ces trois formules permettant de calculer le moment de force montrent clairement que la distance a autant d'importance que la grandeur de la force. Si on tente de fermer une porte en exerçant une force sur les pentures, la porte ne bouge même pas, car on applique alors la force directement sur l'axe de rotation et le moment de force est nul puisque  $r = 0$ . Si on applique la force sur la porte, mais près des pentures, on pourra alors fermer la porte, mais la force qu'on devra appliquer devra être très grande. Cette grande force compense la petite distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation. Si on applique la force à l'autre bout de la porte (du côté de la poignée), on peut alors fermer la porte avec une force assez faible parce que la distance est plus grande.

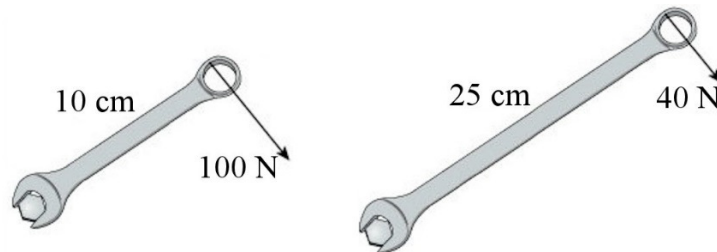
**Les outils**

Le moment de force est un concept très important pour comprendre le fonctionnement de plusieurs outils. Pour illustrer le tout, regardons ce qui se passe si vous tentez de dévisser



un boulon de 2 cm de diamètre très difficile à dévisser. Disons qu'il faut 10 Nm pour réussir à le dévisser. Vous tentez premièrement de dévisser le boulon avec vos mains. Vous appliquez une force directement sur les bords du boulon, mais cela ne fait pas un moment de force très important, car la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation est très petite. Même avec une force de 100 N, vous ne pouvez pas dévisser le boulon puisque l'application d'une force de 100 N à 1 cm de l'axe de rotation donne un moment de force de 1 Nm. (100 N multiplié par 0,01 m). Vous devriez appliquer une force de 1000 N pour pouvoir dévisser le boulon avec vos mains.

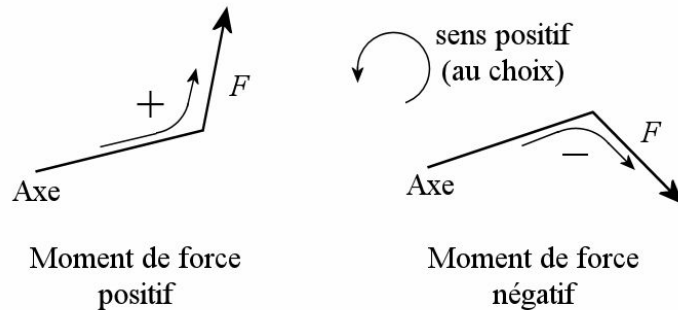
Si on prend maintenant une clé, on pourra atteindre le 10 Nm beaucoup plus facilement. Si la clé a 10 cm de long, il faudra une force de 100 N et si la clé a 25 cm de long, il faudra seulement 40 N. C'est beaucoup moins que les 1000 N nécessaires sans outil !



[www.physicsmastered.com/torque-magnitude-ranking-task/](http://www.physicsmastered.com/torque-magnitude-ranking-task/)

## Signe du moment de force

On doit aussi déterminer le signe du moment de force. On commence par déterminer nous-mêmes quel sera le sens positif pour la rotation. Ensuite, on part de l'axe, on va vers le point d'application de la force et on tourne en direction de la force. Si on tourne dans le même sens que notre positif, le moment de force est positif, si on tourne dans le sens contraire de notre positif, le moment de force est négatif.



## Moment de force net

S'il y a plusieurs forces qui agissent sur un objet, le moment de force net ou résultant est simplement la somme de tous les moments de force agissants sur l'objet.

### Moment de force net ou moment de force résultant

$$\tau_{net} = \sum \tau$$

**Exemple 12.5.1**

Quel est le moment de force net sur cette roue ?

Calculons le moment de force fait par chacune des forces.

La force de 13 N fait un moment de force de

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr \sin \phi \\ &= -13\text{ N} \cdot 0,2\text{ m} \cdot \sin 90^\circ \\ &= -2,6\text{ Nm}\end{aligned}$$

Ce moment de force est négatif, car il fait tourner dans le sens négatif puisque la courbe qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la direction contraire au sens positif.

La force de 15 N fait un moment de force de

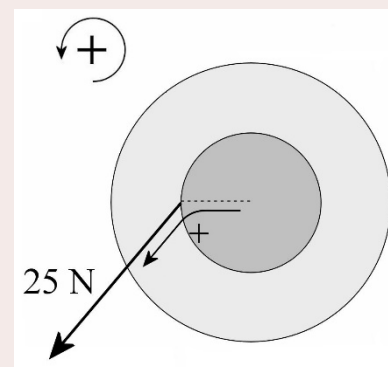
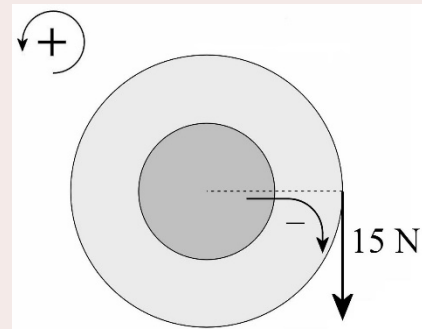
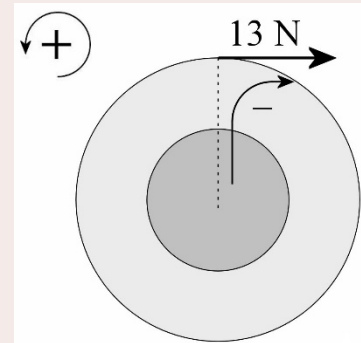
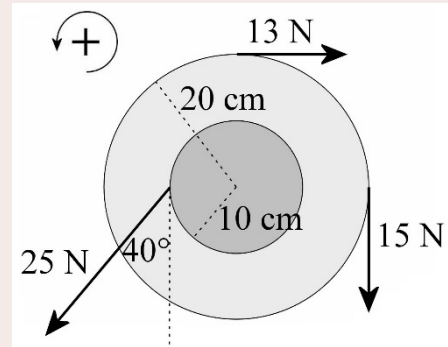
$$\begin{aligned}\tau_2 &= Fr \sin \phi \\ &= -15\text{ N} \cdot 0,2\text{ m} \cdot \sin 90^\circ \\ &= -3\text{ Nm}\end{aligned}$$

Ce moment de force est négatif, car il fait tourner dans le sens négatif puisque la courbe qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la direction contraire au sens positif.

La force de 25 N fait un moment de force de

$$\begin{aligned}\tau_3 &= Fr \sin \phi \\ &= 25\text{ N} \cdot 0,1\text{ m} \cdot \sin 130^\circ \\ &= 1,915\text{ Nm}\end{aligned}$$

Ce moment de force est positif, car il fait tourner dans le sens positif puisque la courbe qui part de l'axe, va vers le point d'application de la force et tourne dans la direction de la force va dans la même direction que le sens positif.



Le moment de force net est donc

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= -2,6Nm - 3Nm + 1,915Nm \\ &= -3,685Nm\end{aligned}$$

## Le moment de force fait par la force de gravitation

La force de gravitation s'exerce sur chaque atome de l'objet. On a donc toute une série de moments de force qui s'exerce.

On ne va tout de même pas sommer toutes ces forces chaque fois. Tentons d'obtenir un résultat plus simple.

Le moment de force fait par un atome est

$$\begin{aligned}\tau &= m_i g r_{\perp i} \\ &= m_i g x_i\end{aligned}$$

Si on somme tous les moments de force, on a

$$\begin{aligned}\tau &= \sum m_i g x_i \\ &= \left( \sum m_i x_i \right) g\end{aligned}$$

Or, puisque

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{\sum m_i x_i}{m} \\ \sum m_i x_i &= m x_{cm}\end{aligned}$$

on arrive à

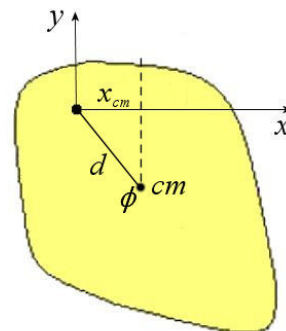
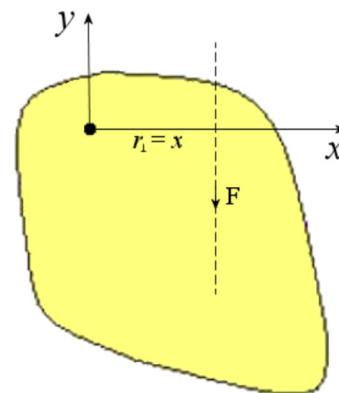
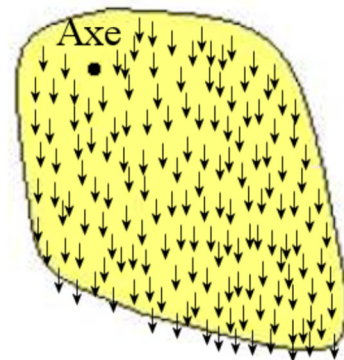
$$\tau = m x_{cm} g$$

Toutefois, selon la figure de droite, on a

$$\begin{aligned}x_{cm} &= d \sin(180^\circ - \phi) \\ &= d \sin \phi\end{aligned}$$

où  $d$  est la distance entre l'axe et le centre de masse. Le moment de force est donc

$$\tau = mgd \sin \phi$$

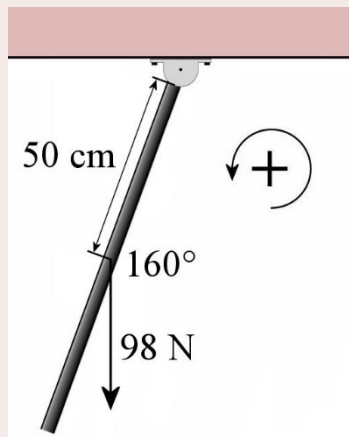


Cette équation signifie qu'on peut calculer le moment de force fait par la gravitation comme si la force au complet s'appliquait au centre de masse. En fait, ceci est notre preuve qu'on doit mettre le point d'application de la force gravitationnelle au centre de masse.

### Exemple 12.5.2

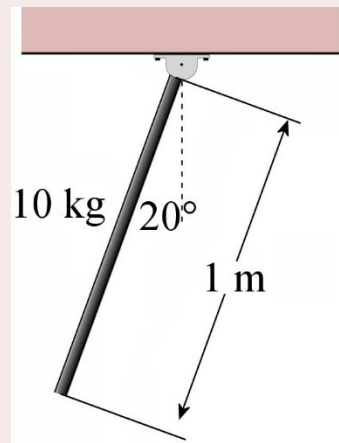
Une tige de 10 kg est fixée à un pivot tel qu'illustré sur la figure. Quel est le moment de force fait par la force de gravitation agissant sur la tige ?

Pour calculer le moment de force fait par la gravitation, on fait comme si toute la force de gravitation agissait au centre de masse. On a donc la situation montrée sur la figure de gauche.



Le moment de force est donc

$$\begin{aligned}\tau &= mgd \sin \phi \\ &= 10\text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,5\text{ m} \cdot \sin 160^\circ \\ &= 16,76\text{ Nm}\end{aligned}$$



### Exemple 12.5.3

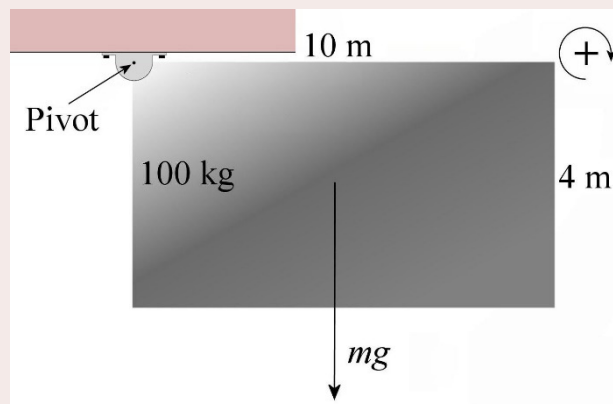
Une plaque métallique de 100 kg est fixée à un pivot par un coin tel qu'illustré sur la figure. Quel est le moment de force fait par la force de gravitation agissant sur la plaque ?

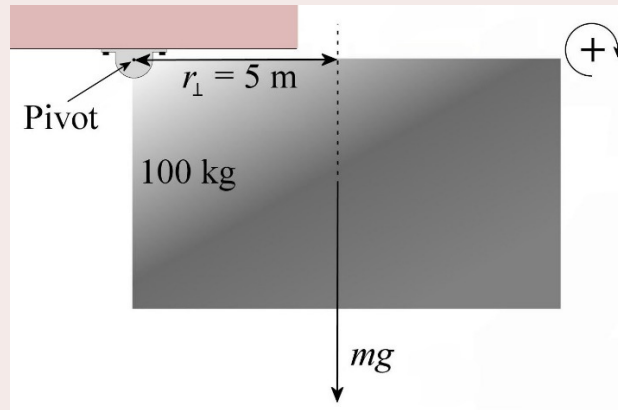
Encore une fois, on fait comme si toute la force de gravitation s'appliquait au centre de masse, comme on l'a montré sur la figure.

Pour calculer le moment de force, on devrait calculer la distance entre le centre de masse et l'axe ainsi que l'angle entre la force et la ligne reliant l'axe et le centre de masse. Quand cela arrive, il y a de bonnes chances que la formule

$$\tau = Fr_{\perp}$$

permette de calculer plus simplement le moment de force. Dans cette situation, le bras de levier ( $r_{\perp}$ ) est de 5 m selon ce qu'on peut voir sur la figure suivante.





Le moment de force fait par la force de gravitation est donc

$$\begin{aligned}
 \tau &= Fr_{\perp} \\
 &= (mg)r_{\perp} \\
 &= \left(100\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}\right) \cdot 5\text{m} \\
 &= 4900\text{Nm}
 \end{aligned}$$

## 12.6 LA DYNAMIQUE DE ROTATION

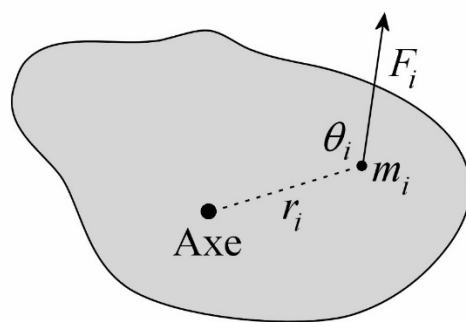
### Lien entre $\tau$ et $\alpha$

Supposons qu'une petite masse composant un objet rigide subisse une force (cette force est la force nette sur la masse). On a alors

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}$$

La composante tangentielle de cette équation est

$$F_{\perp} = ma_t$$



On peut ensuite faire les manipulations suivantes pour arriver à

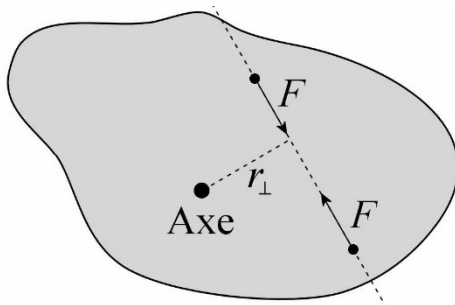
$$\begin{aligned}
 F_{\perp} &= ma_t \\
 F_{\perp} r &= ma_t r \\
 \tau &= mr^2 \frac{a_t}{r} \\
 \tau &= mr^2 \alpha
 \end{aligned}$$

Si on somme ensuite sur toutes les masses composant l'objet, on a

$$\begin{aligned}\sum \tau &= \sum m_i r_i^2 \alpha \\ \sum \tau &= (\sum m_i r_i^2) \alpha \\ \sum \tau &= I \alpha\end{aligned}$$

La somme des moments de force compte tous les moments de force sur chaque masse composant l'objet, incluant ceux faits par des forces internes et externes.

$$\sum \tau_{int} + \sum \tau_{ext} = I \alpha$$



Toutefois, les moments de force faits par les forces internes s'annulent tous. En effet, si deux petites masses composant l'objet s'attirent mutuellement, les deux forces sont de mêmes grandeurs et exactement dirigées l'une vers l'autre. La ligne qui prolonge les forces est donc exactement la même, ce qui veut dire que le bras de levier ( $r_{\perp}$ ) est le même. Les deux forces font donc le même moment de force, mais de signes opposés. Les deux

moments de force internes s'annulent donc et on a

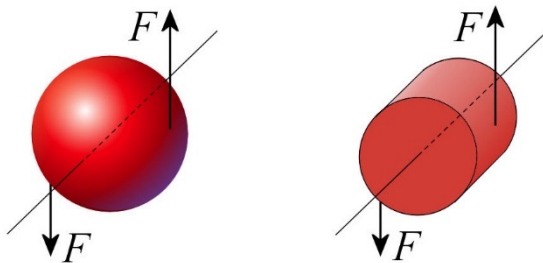
### Deuxième loi de Newton pour la rotation (pour un objet qui ne change pas de forme)

$$\sum \tau_{ext} = I \alpha$$

Cette formule fut donnée pour la première fois en 1749 par Euler.

(La formule s'applique seulement si l'objet ne change pas de forme puisqu'à un certain moment dans la preuve on a utilisé  $a_t = \alpha r$ . Cette formule fut obtenue en dérivant  $v = \omega r$  en supposant que  $r$  est constant. Ce  $r$  ne serait pas constant si l'objet changeait de forme.)

On voit bien ici avec cette équation qu'un objet ayant un moment d'inertie plus élevé sera plus difficile à accélérer. Prenons un exemple pour illustrer cela : nous allons faire tourner



avec un même moment de force deux objets ayant des moments d'inertie différents. Nous avons ici une sphère et un cylindre de même masse (disons 10 kg) et de même rayon (disons 20 cm). Ils subissent chacun deux forces qui les font tourner. Toutes les forces sont de mêmes grandeurs (supposons 50 N). Le moment de force sur chaque objet est donc le même, car les forces sont identiques et elles s'appliquent à la même distance de l'axe de rotation. Avec les valeurs supposées, le moment de force sur chaque objet est de 20 Nm. Même si les moments de force sont identiques, l'effet est différent, car les moments d'inertie sont différents. Le moment d'inertie de la sphère ( $0,16 \text{ kg m}^2$ ) est plus petit que le moment d'inertie du cylindre ( $0,2 \text{ kg m}^2$ ). L'accélération de la sphère ( $125 \text{ rad/s}^2$ ) est

donc plus grande que celle du cylindre ( $100 \text{ rad/s}^2$ ) même si le moment de force et la masse sont identiques.

La différence vient de la distribution de la masse dans l'objet. Plus la masse est près de l'axe de rotation, plus l'objet sera facile à faire tourner. Ce n'est pas tellement surprenant, car plus on est près de l'axe de rotation, plus la vitesse est petite pour une même vitesse angulaire. Comme il est plus facile de donner une petite vitesse, il est plus facile de mettre en rotation l'objet dont la masse est près de l'axe. La masse d'une sphère étant plus concentrée près de l'axe que la masse d'un cylindre, le moment d'inertie de la sphère est plus petit et elle est plus facile à mettre en rotation.

Voici une autre démonstration de l'effet de la distribution de masse pour la valeur du moment d'inertie. Les deux bâtons dans ce vidéo ont la même masse et la même longueur, mais un est beaucoup plus facile à accélérer que l'autre parce que la masse est plus près de l'axe.

<https://www.youtube.com/watch?v=m9weJfoW5J0>

Dans le vidéo suivant, on laisse tomber deux règles à partir d'une position verticale. Les deux règles ont des masses et des moments d'inertie très différents. Comme on a vu que la masse n'a aucune influence sur la chute libre, on pourrait penser que les deux tiges vont frapper le sol en même temps. Cependant, une des tiges a un moment d'inertie beaucoup plus grand, elle est beaucoup plus difficile à tourner et elle tombe avec une accélération angulaire plus petite que l'autre.

<https://www.youtube.com/watch?v=POHD6GRoZEI>

On pourrait argumenter que la masse accrochée sur la règle augmente aussi le moment de force sur la règle et qu'elle devrait tomber plus vite. C'est possible que, dans certaines situations, l'augmentation de l'accélération angulaire causée par l'augmentation du moment de force domine la diminution de l'accélération angulaire causée par l'augmentation du moment d'inertie. Toutefois, dans le cas des deux tiges qui tombent, c'est l'augmentation du moment d'inertie qui domine.

## Moment d'inertie et évolution

Un animal sera fortement avantage si le moment d'inertie de ses membres est petit, car le membre sera plus facile à tourner. Si cela se produit pour des pattes ou des jambes, cela veut dire que l'animal pourra courir plus vite, ce qui est un avantage s'il essaye d'attraper un autre animal ou s'il tente de se sauver d'un prédateur. Pour diminuer le moment d'inertie, il faut concentrer la matière le plus près de l'axe de rotation. On y arrive en plaçant les muscles près des articulations. On peut facilement voir sur cette image de cheval que les muscles de la jambe arrière se concentrent près de l'articulation alors



[plus.google.com/112686995540721578944/posts](https://plus.google.com/112686995540721578944/posts)



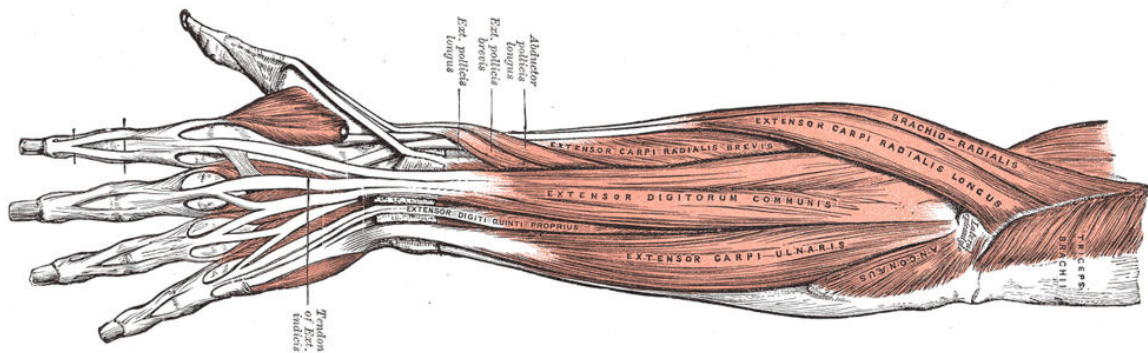
que le bout de la jambe est très peu massif. Cette concentration de la masse diminue énormément le moment d'inertie ce qui permet des mouvements beaucoup plus rapides par rapport à ce qu'on aurait si les mêmes muscles étaient répartis plus uniformément dans la patte.



Popeye est donc un véritable retardé de l'évolution en ayant la masse de son bras concentré au bout du bras plutôt que près de l'épaule.

[www.lacrampeauxdoigts.com/?p=1585](http://www.lacrampeauxdoigts.com/?p=1585)

Cette concentration des muscles près de l'articulation est tellement avantageuse que parfois les muscles sont assez loin de ce qu'ils contrôlent. Les muscles qui contrôlent les doigts sont, en grande partie, situés dans la moitié de l'avant-bras le plus près du coude. Ils contrôlent les articulations de la main avec de grands tendons allant jusqu'aux doigts.

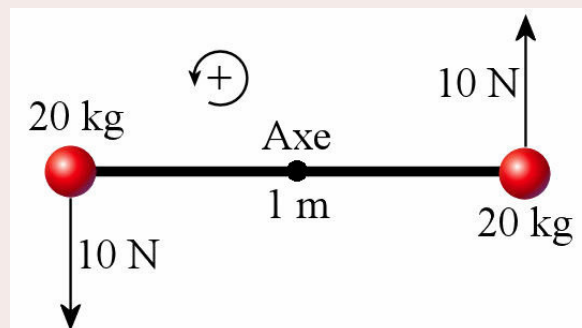


[fr.wikipedia.org/wiki/Muscle\\_extenseur\\_des\\_doigts](http://fr.wikipedia.org/wiki/Muscle_extenseur_des_doigts)

## Exemples d'applications de la deuxième loi de Newton pour la rotation

### Exemple 12.6.1

L'objet de la figure est initialement au repos. Quel est le nombre de tours qu'il fera en 10 secondes ? Considérez que les masses de 20 kg sont ponctuelles et négligez la masse de la tige.





On trouvera le nombre de tours à partir de l'accélération en utilisant les lois de la cinématique. On trouvera cette accélération à partir du moment d'inertie et du moment de force net qui agit sur l'objet.

Le moment d'inertie de l'objet est

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 \\ &= 20\text{kg} \cdot (0,5\text{m})^2 + 20\text{kg} \cdot (0,5\text{m})^2 \\ &= 10\text{kgm}^2 \end{aligned}$$

Le moment de force net est

$$\begin{aligned} \tau_{net} &= \sum Fr \sin \phi \\ &= 10\text{N} \cdot 0,5\text{m} \cdot \sin 90^\circ + 10\text{N} \cdot 0,5\text{m} \cdot \sin 90^\circ \\ &= 10\text{Nm} \end{aligned}$$

L'accélération angulaire est donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\tau_{net}}{I} \\ &= \frac{10\text{Nm}}{10\text{kgm}^2} \\ &= 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

La position angulaire de l'objet au bout de 10 secondes est donc

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (10\text{s})^2 \\ &= 50\text{rad} \end{aligned}$$

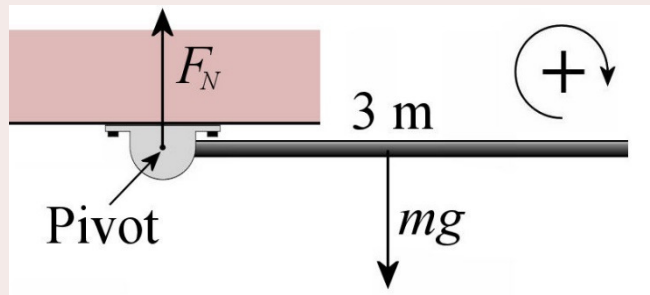
Ce qui nous donne le nombre de tours suivants

$$\begin{aligned} N &= \frac{\theta}{2\pi} \\ &= \frac{50\text{rad}}{2\pi} \\ &= 7,96 \end{aligned}$$

**Exemple 12.6.2**

Quelle est l'accélération du bout de cette tige de 3 m qu'on laisse tomber ? Il n'y a pas de friction.

On trouve l'accélération du bout de la tige à partir de l'accélération angulaire avec



$$a = \alpha r$$

Nous allons trouver l'accélération angulaire avec la deuxième loi de Newton pour la rotation.

$$\tau_{net} = I\alpha$$

Pour la trouver, il nous faut donc le moment de force net et le moment d'inertie.

Commençons par le moment de force net. Il y a deux forces sur la tige : le poids et la normale. La somme des moments de force est donc

$$\begin{aligned}\sum \tau &= F_N \cdot 0m + mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin 90^\circ \\ &= mg \frac{L}{2}\end{aligned}$$

La distance est nulle pour le moment de force fait par la normale, car elle s'applique directement sur l'axe de rotation.

Trouvons ensuite le moment d'inertie. Il s'agit du moment d'inertie d'une tige avec l'axe de rotation au bout. On a déjà fait ce calcul dans un exemple précédent.

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}mL^2\end{aligned}$$

Notre deuxième loi de Newton devient donc

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= I\alpha \\ mg \frac{L}{2} &= \frac{1}{3}mL^2\alpha \\ 9,8 \frac{N}{kg} \cdot \frac{3m}{2} &= \frac{1}{3} \cdot (3m)^2 \cdot \alpha\end{aligned}$$

$$\alpha = 4,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

L'accélération du bout de la tige est donc

$$\begin{aligned} a &= \alpha r \\ &= 4,9 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 3\text{m} \\ &= 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Si on place un objet au bout de cette tige, il ne pourra pas suivre le mouvement de la tige quand elle va commencer à descendre. Le bout accélère vers le bas avec  $14,7 \text{ m/s}^2$  alors que les objets en chute libre ont une accélération de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . C'est ce qu'on peut voir dans ce film. On a placé des pièces de monnaie un peu partout sur la tige. On voit qu'à partir d'une certaine distance, l'accélération de la tige est plus grande que  $g$  et les pièces ne peuvent suivre le mouvement de la tige. Elles quittent donc la tige et tombent en chute libre toutes au même rythme.

<https://www.youtube.com/watch?v=wQuwx7jYYyQ>

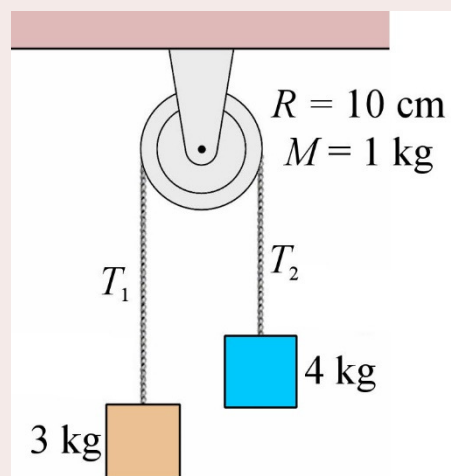
On peut montrer assez facilement que l'accélération dépasse  $g$  à partir des  $2/3$  de la longueur.

Dans certains problèmes, il y a des objets qui font des mouvements de translation et d'autres objets qui font un mouvement de rotation. Quand cela arrive, il faut faire la somme des forces pour les objets qui font des translations et la somme des moments de force pour les objets qui font de la rotation.

### Exemple 12.6.3

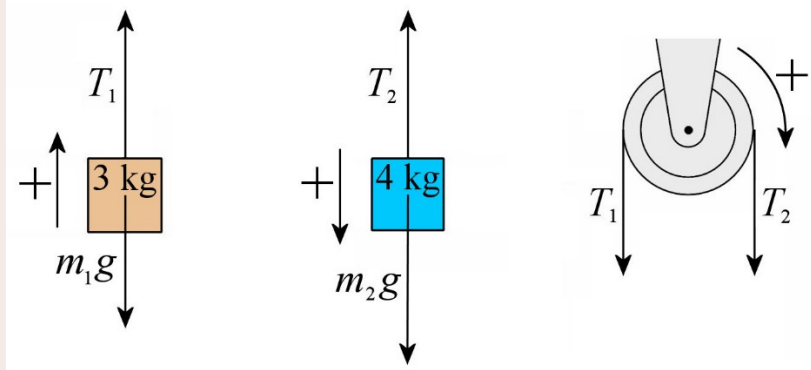
Quelles sont l'accélération des blocs et la tension des cordes dans la situation représentée sur la figure ? Il n'y a pas de friction (sauf entre la corde et la poulie, de sorte que la corde ne glisse pas sur la poulie.)

On doit donc faire la somme des forces sur les blocs puisqu'ils ont un mouvement de translation. On doit faire la somme des moments de force sur la poulie puisqu'elle a un mouvement de rotation. Avec les équations obtenues, on pourra trouver l'accélération et les tensions.



Remarque importante ici : la tension change quand la corde passe par la poulie. Dans les chapitres précédents, elle ne changeait pas, car on négligeait la masse de la poulie. Quand on tient compte de la masse de la poulie, une partie de la force sert à accélérer la poulie et la tension change. C'est pourquoi  $T_1$  et  $T_2$  sont utilisés pour la tension.

Les forces sur les blocs et la poulie sont donc



Observez bien comment ont été choisis les positifs. On choisit arbitrairement de mettre l'axe des  $x$  positifs vers le haut pour le bloc de 3 kg. Si le bloc de 3 kg va vers les positifs, le bloc de 4 kg va descendre. On doit donc mettre les positifs vers le bas pour le bloc de 4 kg. Aussi, si le bloc de 3 kg va vers les  $x$  positifs, la poulie va tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. On doit donc mettre le sens positif dans le sens des aiguilles d'une montre pour la rotation de la poulie.

L'équation des forces pour le bloc de 3 kg est (avec un axe des  $x$  vers le haut)

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \\ -m_1g + T_1 &= m_1a\end{aligned}$$

L'équation des forces pour le bloc de 4 kg est (avec un axe des  $x$  vers le bas)

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \\ m_2g - T_2 &= m_2a\end{aligned}$$

La somme des moments de force sur la poulie est

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ -T_1R \sin 90^\circ + T_2R \sin 90^\circ &= I\alpha \\ -T_1R + T_2R &= I\alpha\end{aligned}$$

Nous avons 3 équations, mais quatre inconnues (les deux tensions, l'accélération et l'accélération angulaire). On pourra résoudre en trouvant un lien entre les deux accélérations. La corde étant fixée aux blocs, elle a la même accélération que les blocs. Comme elle ne glisse pas sur la poulie, cela veut dire que

$$\begin{aligned}a_{\text{corde}} &= \alpha R \\ a &= \alpha R\end{aligned}$$

Notre équation des moments de force devient donc

$$-T_1R + T_2R = I \frac{a}{R}$$

Reste finalement à mettre le moment d'inertie de la poulie, qui est un cylindre. On a donc

$$\begin{aligned} -T_1 R + T_2 R &= \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} \\ -T_1 + T_2 &= \frac{1}{2} M a \end{aligned}$$

Nos trois équations à résoudre sont donc

$$\begin{aligned} -m_1 g + T_1 &= m_1 a \\ m_2 g - T_2 &= m_2 a \\ -T_1 + T_2 &= \frac{1}{2} M a \end{aligned}$$

On peut résoudre en isolant les tensions dans les deux premières équations et en substituant dans la troisième équation. On peut également additionner les trois équations pour obtenir

$$\begin{aligned} (-m_1 g + T_1) + (m_2 g - T_2) + (-T_1 + T_2) &= m_1 a + m_2 a + \frac{1}{2} M a \\ -m_1 g + m_2 g &= \left( m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M \right) a \end{aligned}$$

Avec les valeurs des masses, on obtient

$$\begin{aligned} -3\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} + 4\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} &= \left( 3\text{kg} + 4\text{kg} + \frac{1}{2} 1\text{kg} \right) \cdot a \\ 9,8\text{N} &= 7,5\text{kg} \cdot a \\ a &= 1,307 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

On trouve la première tension avec l'équation des forces sur le bloc de 3 kg.

$$\begin{aligned} -m_1 g + T_1 &= m_1 a \\ -3\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} + T_1 &= 3\text{kg} \cdot 1,307 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ T_1 &= 33,32\text{N} \end{aligned}$$

On trouve la deuxième tension avec l'équation des forces sur le bloc de 4 kg.

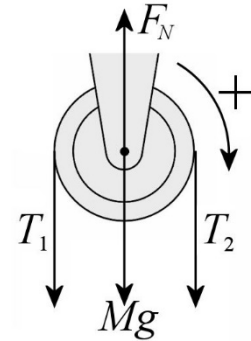
$$\begin{aligned} m_2 g - T_2 &= m_2 a \\ 4\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} - T_2 &= 4\text{kg} \cdot 1,307 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ T_2 &= 33,97\text{N} \end{aligned}$$

Voici quelques remarques sur cet exemple.

Si on avait négligé la masse de la poulie, on aurait obtenu une accélération de  $1,4 \text{ m/s}^2$ . Avec une poulie de  $1 \text{ kg}$ , on est descendu à  $1,307 \text{ m/s}^2$ . C'est normal que ça baisse puisqu'on doit maintenant accélérer la masse de la poulie. S'il y a plus de masse à accélérer avec les mêmes forces, l'accélération est plus petite.

On remarque qu'il y a bien une diminution de la tension dans la corde quand elle passe dans la poulie. Comme une partie de la force sert à accélérer la poulie, il reste moins de tension dans la corde de l'autre côté de la poulie. La tension qui fait le moment de force qui a le même signe que l'accélération sera toujours plus grande que l'autre tension.

Les deux tensions ne sont pas les deux seules forces sur la poulie. Il y a aussi le poids de la poulie et la normale (contact entre la poulie et l'axe de rotation). Le poids et la normale n'ont pas la même grandeur, car la normale doit annuler le poids et les deux tensions. On ne les a pas considérées, car ces forces ne font pas de moment de force. En effet, ces deux forces s'appliquent au milieu de la poulie, donc sur l'axe de rotation. Elles donnent donc un moment de force nulle puisque la distance  $r$  (distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation) est nulle.



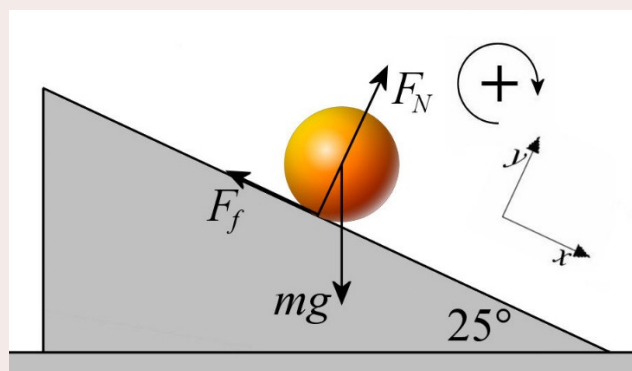
Dans d'autres problèmes, il y a des objets qui font, en même temps, des mouvements de translation et un mouvement de rotation. Quand cela arrive, il faut faire la somme des forces et la somme des moments de force pour ces objets.

### Exemple 12.6.4

Une balle roule sans glisser le long d'un plan incliné d'un angle de  $25^\circ$ .

a) Quelle est l'accélération de la balle ?

Les forces sur la balle sont : le poids, la normale et la friction.



Comme la balle fait un mouvement de translation et un mouvement de rotation, on doit faire la somme des forces et la somme des moments de force. De plus, dans ce cas, comme l'axe n'est pas fixe, on doit obligatoirement prendre le centre de masse de l'objet comme axe de rotation. On a donc

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \rightarrow mg \cos(-65^\circ) - F_f = ma \\ \sum F_y &= ma_y \rightarrow mg \sin(-65^\circ) + F_N = 0 \\ \sum \tau &= I\alpha \rightarrow \cancel{mg \cdot 0} + \cancel{F_N R \sin 0^\circ} + F_f R \sin 90^\circ = I\alpha\end{aligned}$$

Dans cette dernière équation, la distance est nulle dans le cas de la force de gravitation, car la force s'applique au centre de masse et l'axe de rotation est au centre de masse. L'angle est nul pour la normale, car la force revient passer exactement à travers le centre de masse ce qui fait que l'angle est nul entre la distance et la force. (On peut aussi voir que dans ce cas, le bras de levier est nul quand la force est dirigée vers l'axe de rotation.) On voit alors que le seul moment de force qui reste est celui dû à la force de friction. C'est cette seule force qui est responsable de la rotation de la sphère. Si on enlevait la friction, la sphère glisserait simplement sans tourner (une situation qu'on a traitée dans notre premier chapitre sur les forces).

En utilisant la condition de roulement sans glisser  $a_{cm} = \alpha R$  et la formule du moment d'inertie d'une sphère, la somme des moments de force devient

$$\begin{aligned}F_f R \sin 90^\circ &= I\alpha \\ F_f R &= \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) \\ F_f &= \frac{2}{5}ma\end{aligned}$$

C'est la force de friction qu'on doit avoir pour que la sphère roule sans glisser.

On peut ensuite trouver l'accélération en utilisant la somme des forces en  $x$ .

$$\begin{aligned}mg \cos(-65^\circ) - F_f &= ma \\ \cancel{mg} \cos(65^\circ) - \frac{2}{5}\cancel{m}a &= \cancel{m}a \\ g \cos(65^\circ) &= a + \frac{2}{5}a \\ g \cos(65^\circ) &= \frac{7}{5}a \\ a &= \frac{5}{7}g \cos(65^\circ) \\ a &= 2,958 \frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

On voit que l'accélération est plus petite que quand l'objet glissait sans aucune friction (qui est  $a = g \cos 65^\circ$ ). C'est normal qu'elle soit plus petite, car il y a maintenant de la friction, friction qui est nécessaire pour que la boule puisse tourner.

- b) Quel est le coefficient de friction minimum pour que la balle puisse rouler sans glisser ?

La force de friction sur la balle est

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{2}{5} ma \\ &= \frac{2}{5} m \frac{5}{7} g \cos(65^\circ) \\ &= \frac{2}{7} mg \cos(65^\circ) \end{aligned}$$

Comme c'est de la friction statique, cette force doit être inférieure au maximum de la friction statique. On doit donc avoir

$$\frac{2}{7} mg \cos(65^\circ) \leq \mu_s F_N$$

Selon la somme des forces en y, la normale est

$$\begin{aligned} mg \sin(-65^\circ) + F_N &= 0 \\ F_N &= -mg \sin(-65^\circ) \\ F_N &= mg \sin(65^\circ) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{7} mg \cos(65^\circ) &\leq \mu_s mg \sin(65^\circ) \\ \mu_s &\geq \frac{2 \cos(65^\circ)}{7 \sin(65^\circ)} \\ \mu_s &\geq \frac{2}{7 \tan 65^\circ} \end{aligned}$$

Le coefficient de friction minimum est donc

$$\begin{aligned} \mu_{s \min} &= \frac{2}{7 \tan 65^\circ} \\ &= 0,1332 \end{aligned}$$

Si le coefficient de friction est inférieur à cette valeur, il n'y aura pas assez de friction pour que la boule tourne sans glisser. Elle va tourner, car la friction fera un moment de force, mais pas assez rapidement pour respecter la condition de roulement sans glissement.



L'accélération d'un objet qui roule le long d'un plan incliné est donc influencée par le moment d'inertie de l'objet. Dans tous les cas, la seule chose qui change la valeur de l'accélération, c'est la valeur de la constante devant  $mR^2$  dans la formule du moment d'inertie. La masse et le rayon finissent toujours par s'annuler. Pour obtenir un résultat plus général, on pourrait donc calculer l'accélération avec un moment d'inertie de  $I = kmR^2$ . (Où  $k$  est un nombre. Il vaut  $2/5$  pour une sphère,  $1/2$  pour un cylindre plein et  $1$  pour un cylindre vide). On trouve alors que sur une pente inclinée de l'angle  $\theta$ , l'accélération est

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + k}$$

Ce qui donne les résultats suivants.

$$a_{\text{sphère}} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

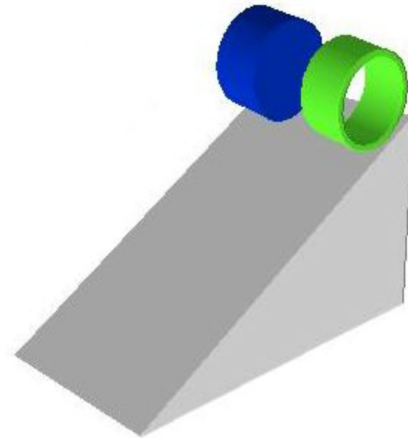
$$a_{\text{cylindre plein}} = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

$$a_{\text{cylindre vide}} = \frac{1}{2} g \sin \theta$$

Ainsi, dans une course entre un cylindre plein et un cylindre vide, le cylindre plein va gagner, car son accélération sera plus grande, et ce, peu importe les masses et les rayons. Soyez émerveillé par une démonstration de cela.

<https://www.youtube.com/watch?v=gO2CRb8FHLA>

Le cylindre vide a sa masse concentrée très loin de l'axe de rotation, ce qui le rend plus difficile à tourner. Cela lui donne un moment d'inertie plus élevé et c'est ce qui lui fait perdre la course. Si on faisait la course entre une sphère et un cylindre plein, la sphère gagnerait, car elle est plus facile à faire tourner puisqu'il y a plus de masse près de l'axe de rotation par rapport au cylindre.

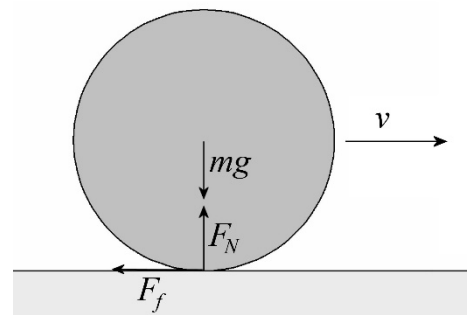


[webpace.utexas.edu/cokerwr/www/index.html/inertiaraace.htm](http://webpace.utexas.edu/cokerwr/www/index.html/inertiaraace.htm)

## Pourquoi un objet qui roule ralentit-il ?

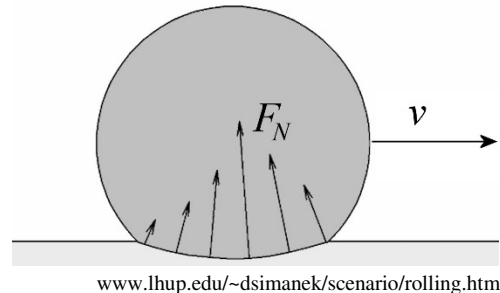
On pourrait penser qu'un objet qui roule ralentit parce qu'il y a de la friction. En effet, les forces sur l'objet sont celles montrées sur la figure.

La friction étant dans la direction opposée à la vitesse, elle ralentit effectivement la sphère.



Toutefois, il y a un problème avec la rotation. Selon ce qu'on peut voir sur la figure, le poids et la normale n'exercent pas de moments de force sur la sphère. Seule la friction peut exercer un moment de force, mais il n'est pas dans la bonne direction. En effet, le moment de force fait par la friction est dans la direction de la rotation, ce qui veut dire que la force de friction doit faire augmenter la vitesse angulaire. Ainsi, avec ces forces, la sphère devrait ralentir tout en tournant plus vite ! De toute évidence, il y a quelque chose de louche.

En réalité, la situation est un peu plus subtile que cela. Il y a une déformation de l'objet et de la surface au point de contact de sorte que la situation ressemble plus à cela (la déformation est exagérée sur cette figure).



On voit qu'il y a de la normale sur toute la surface de contact, mais que les forces normales sont un peu plus grandes du côté vers où se déplace la balle. Ce sont ces normales de ce côté de la balle qui font un moment de force opposé à la rotation de la balle qui vont faire diminuer la vitesse angulaire de la balle (en plus d'annuler le moment de force fait par la friction et par les normales de l'autre côté de la balle.)

## Mouvement dans l'espace

Quand une force s'exerce sur un objet dans l'espace, cette force va évidemment faire accélérer l'objet. Toutefois, il y a de bonnes chances que la force génère aussi un moment de force sur l'objet. Dès que la direction de la force n'est pas alignée avec le centre de masse de l'objet, il y a un moment de force et ce moment de force donnera une accélération angulaire à l'objet. Il est donc très difficile d'exercer une force sur un objet dans l'espace sans que cela génère de rotation.

C'est pour cela que la scène suivante, tirée du film *Gravity*, n'est pas vraiment possible.

<https://www.youtube.com/watch?v=y4isfJNtK98>

Ça semble assez bien fait si on pense uniquement à l'accélération générée par la force. Toutefois, les effets du moment de force ne sont pas bien représentés. De toute évidence, la direction de la force n'est pas alignée avec le centre de masse du système formé de l'astronaute et de l'extincteur et chaque poussée de gaz devrait générer une rotation. La rotation ferait alors constamment changer la direction de la force et ce serait pratiquement impossible de se diriger dans la direction voulue.

Pour pouvoir diriger un vaisseau dans l'espace, les endroits où s'exercent les forces doivent avoir été bien choisis pour s'assurer que les forces ne vont pas entraîner des rotations indésirables du vaisseau.

## 12.7 LE TRAVAIL ET LA PUISSANCE

### Formules du travail

Le travail fait par un moment de force constant sur un objet qui tourne est (attention,  $\Delta s$  est un arc de cercle)

$$\begin{aligned} W &= F \Delta s \cos \gamma \\ &= F \Delta s \sin(90^\circ + \gamma) \end{aligned}$$

Or, comme l'angle entre la force et la distance est  $90^\circ + \gamma$  le moment de force est

$$\tau = Fr \sin(90^\circ + \gamma)$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned} W &= F \Delta s \sin(90^\circ + \gamma) \\ &= Fr \sin(90^\circ + \gamma) \frac{\Delta s}{r} \\ &= \tau \frac{\Delta s}{r} \end{aligned}$$

Comme la longueur de l'arc de cercle divisée par le rayon est le déplacement angulaire

$$\Delta \theta = \frac{\Delta s}{r}$$

on arrive à

#### Travail fait par un moment de force constant

$$W = \tau \Delta \theta$$

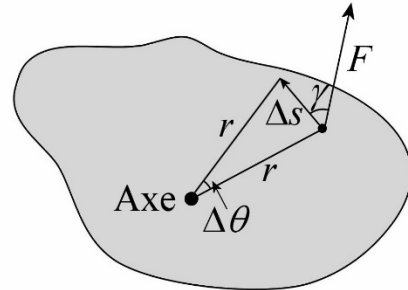
Si le moment de force n'est pas constant, on sépare le déplacement angulaire en petits angles et on calcule le travail fait durant cette rotation infinitésimale. Avec un déplacement infinitésimal, l'angle est si petit que la force n'a pas le temps de changer et on peut la considérer comme étant constante. On a ainsi

$$dW = \tau d\theta$$

En sommant tous ces travaux infinitésimaux, on arrive à

#### Travail fait par un moment de force variable

$$W = \int \tau d\theta$$



Si la force est conservative, on aura que  $W = -\Delta U$ , ce qui nous amène à

### Énergie potentielle en rotation si la force est conservative

$$U = -\int \tau d\theta$$

## Formules de la puissance

Encore une fois, on définit la puissance comme étant le travail divisé par le temps nécessaire pour faire ce travail. Pour la puissance moyenne, cela donne

### Puissance moyenne

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

Pour la puissance instantanée, on fait ce calcul en prenant un temps très petit, un temps infinitésimal.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt}$$

On a alors

### Puissance instantanée

$$P = \tau \omega$$

## Théorème de l'énergie cinétique pour un objet en rotation

Tout comme avec le mouvement de translation, on peut calculer la variation de l'énergie cinétique de rotation avec le travail. En voici la preuve.

Le travail sur un petit morceau d'un objet est

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega'^2 r'^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \end{aligned}$$

On a mis les  $r$  différents. Peut-être que l'objet a changé de forme.

Si on somme les travaux sur tous les morceaux pour calculer le travail net, on a

$$\begin{aligned}
 W_{net} &= \sum \frac{1}{2} m \omega'^2 r'^2 - \sum \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \\
 &= \frac{1}{2} (\sum m r'^2) \omega'^2 - \frac{1}{2} (\sum m r^2) \omega^2
 \end{aligned}$$

Puisque les termes entre parenthèses sont les moments d'inertie avant et après le changement, on arrive à

$$W_{net} = \frac{1}{2} I' \omega'^2 - \frac{1}{2} I \omega^2$$

Comme les termes de droite sont les énergies cinétiques de rotation, on a

### Théorème de l'énergie cinétique en rotation

$$W_{net} = \Delta E_k$$

Le théorème de l'énergie cinétique est donc aussi valide en rotation. Remarquez aussi que c'est la première fois qu'on a une formule qui peut s'appliquer pour un objet qui change de forme puisqu'on a  $r'$  à l'instant 2. Les distances entre les masses et l'axe peuvent changer ce qui signifie que l'objet peut changer de forme. Cependant, l'objet demeure rigide puisque les  $\omega$  sont les mêmes partout dans l'objet à l'instant 1 et à l'instant 2.

### Exemple 12.7.1

Un moteur faisant un moment de force de 5 Nm fait tourner une plaque circulaire initialement au repos. La plaque a une masse de 5 kg et un rayon de 20 cm.

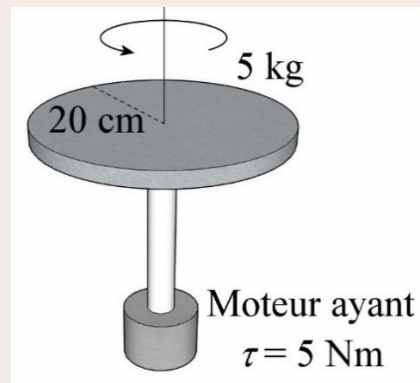
- a) Quelle est la puissance moyenne du moteur durant les 10 premières secondes ?

Pour trouver la puissance moyenne, on doit premièrement calculer le travail fait par le moteur. On sait le moment de force, mais on ne sait pas de quel angle a tourné la plaque. On va trouver cet angle à partir de l'accélération angulaire, qui elle se trouve avec

$$\tau_{net} = I \alpha$$

Pour trouver l'accélération, il nous manque le moment d'inertie de la plaque. Ce moment est

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} m R^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2
 \end{aligned}$$



$$= 0,1 \text{ kg } m^2$$

L'accélération angulaire de la plaque est donc

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\tau}{I} \\ &= \frac{5 \text{ Nm}}{0,1 \text{ kg } m^2} \\ &= 50 \frac{\text{rad}}{s^2}\end{aligned}$$

Le déplacement angulaire en 10 secondes est donc

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \Delta\theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \Delta\theta &= 0 + \frac{1}{2} \cdot 50 \frac{\text{rad}}{s^2} \cdot (10 \text{ s})^2 \\ \Delta\theta &= 2500 \text{ rad}\end{aligned}$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned}W &= \tau \Delta\theta \\ &= 5 \text{ Nm} \cdot 2500 \text{ rad} \\ &= 12500 \text{ J}\end{aligned}$$

et la puissance moyenne est

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{W}{\Delta t} \\ &= \frac{12500 \text{ J}}{10 \text{ s}} \\ &= 1250 \text{ W} = 1,68 \text{ hp}\end{aligned}$$

- b) Quelle est la puissance instantanée du moteur 10 secondes après le début du mouvement ?

La puissance instantanée se trouve avec  $P = \tau \omega$ . Il nous faut donc la vitesse angulaire au bout de 10 secondes. Elle est

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ &= 0 + 50 \frac{\text{rad}}{s^2} \cdot 10 \text{ s} \\ &= 500 \frac{\text{rad}}{s}\end{aligned}$$

La puissance instantanée est donc

$$\begin{aligned}
 P &= \tau \omega \\
 &= 5Nm \cdot 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\
 &= 2500W = 3,35hp
 \end{aligned}$$

(Remarquer que la variation d'énergie cinétique en 10 secondes

$$\begin{aligned}
 \Delta E_k &= \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 0,1kg \cdot m^2 \cdot \left(500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - 0 \\
 &= 12500J
 \end{aligned}$$

est égale au travail comme le prévoit le théorème de l'énergie cinétique.)

## 12.8 LE MOMENT CINÉTIQUE

Commençons par une définition du moment cinétique. Nous montrerons par la suite pourquoi cette quantité est utile.

### Définition du moment cinétique

#### Formule générale

Le moment cinétique d'une masse par rapport à un axe est donné par le produit vectoriel suivant.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

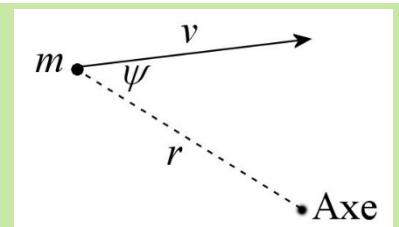
Dans cette formule,  $p$  est la quantité de mouvement de la masse. Selon cette définition, c'est comme le moment de quantité de mouvement. Le moment cinétique est en réalité un vecteur, mais ici on pourra se contenter de travailler uniquement avec la grandeur de ce vecteur (en lui donnant un signe positif ou négatif selon le sens de la rotation). Selon ce qu'on sait d'un produit vectoriel, la grandeur du moment cinétique

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}|$$

est

#### Moment cinétique (angular momentum en anglais)

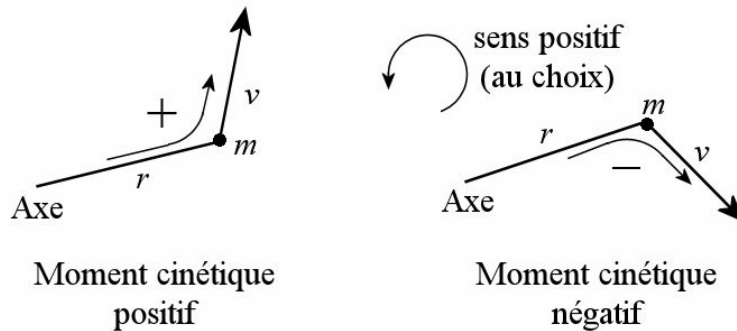
$$L = mvr \sin \psi$$



Ça peut paraître bizarre d'avoir une vitesse un peu dans n'importe quelle direction comme ça puisque la vitesse doit être perpendiculaire au rayon si la masse fait partie d'un objet en rotation autour de l'axe. En fait, cette définition du moment cinétique est très générale et elle permet de l'appliquer à autre chose qu'un objet rigide en rotation. Par exemple, on peut l'utiliser pour le mouvement d'un objet en orbite autour d'un autre.

### Signe du moment cinétique

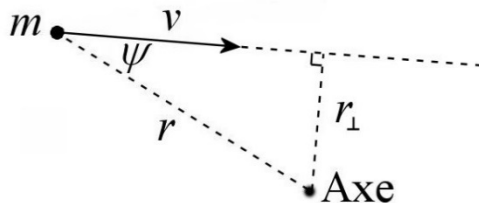
Le signe du moment cinétique se trouve un peu comme le signe du moment de force. On commence par déterminer nous-mêmes quel sera le sens positif pour la rotation. Ensuite, on part de l'axe, on va vers la masse et on tourne en direction de la vitesse. Si on tourne dans le même sens que notre positif, le moment cinétique est positif. Si on tourne dans le sens contraire de notre positif, le moment cinétique est négatif.



### Moment cinétique d'une masse se déplaçant en ligne droite

On pourrait penser que le moment cinétique d'un objet qui se déplace en ligne droite à vitesse constante n'est pas constant puisque  $r$  et  $\psi$  changent constamment. Toutefois, les changements de ces 2 variables se compensent exactement de sorte que  $L$  reste constant.

On peut comprendre assez facilement pourquoi en examinant la figure de gauche. On remarque alors que



$$\frac{r_{\perp}}{r} = \sin \psi$$

où  $r_{\perp}$  est la plus petite distance entre la trajectoire (en ligne droite) de la particule et l'axe de rotation. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} L &= mvr \sin \psi \\ &= mvr_{\perp} \end{aligned}$$

Comme la valeur de  $r_{\perp}$  est constante, le moment cinétique est constant.

On peut donc calculer le moment cinétique avec la formule suivante.



**Moment cinétique d'une masse se déplaçant en ligne droite**

$$L = mvr_{\perp}$$

De façon précise,  $r_{\perp}$  est la plus petite distance entre l'axe de rotation et la trajectoire du centre de masse de l'objet se déplaçant en ligne droite.

**Moment cinétique d'un objet rigide en rotation**

Pour avoir le moment cinétique d'un objet rigide en rotation autour d'un axe, on somme les moments cinétiques de toutes les particules de l'objet.

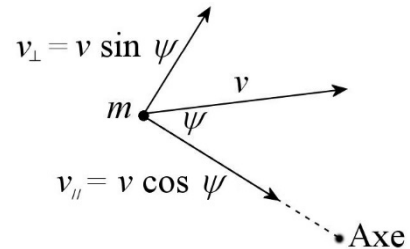
$$L = \sum mvr \sin \psi$$

Comme  $v \sin \psi$  est la composante de la vitesse perpendiculaire à  $r$ , on a

$$L = \sum mv_{\perp} r$$

Comme  $v_{\perp} = \omega r$ . On a donc

$$\begin{aligned} L &= \sum m\omega r r \\ &= \sum mr^2 \omega \end{aligned}$$



Comme l'objet est rigide,  $\omega$  est constante et on arrive à

$$L = \left( \sum mr^2 \right) \omega$$

Puisque cette somme est le moment d'inertie, le moment cinétique est

**Moment cinétique d'un objet rigide en rotation**

$$L = I \omega$$

Notez que l'objet pourrait changer de forme. *Rigide* signifie seulement que  $\omega$  est le même partout dans l'objet. Cela ne l'empêche pas de changer de forme (s'étirer par exemple).

**La 2<sup>e</sup> loi de Newton (encore !)**

Si on fait la dérivée du moment cinétique, on a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

Comme

$$\vec{F}_{\text{nette}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

on obtient

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{nette}} + \vec{v} \times \vec{p}$$

Or,  $\vec{v} \times \vec{p} = 0$ , car les vecteurs  $v$  et  $p$  sont parallèles. On a donc

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{nette}}$$

Ici, on s'intéressera uniquement à la grandeur de ce vecteur. Comme la grandeur du produit vectoriel de droite est

$$\begin{aligned} \left| \vec{r} \times \vec{F}_{\text{nette}} \right| &= r F_{\text{nette}} \sin \phi \\ &= \tau_{\text{net}} \end{aligned}$$

on arrive à

### Deuxième loi de Newton pour la rotation

$$\tau_{\text{net}} = \frac{dL}{dt}$$

Cette équation est plus générale que notre autre version de la 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation, qui était  $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ . Voyons comment on arrive à  $\tau_{\text{net}} = I\alpha$  à partir de notre nouvelle version pour un objet en rotation.

$$\begin{aligned} \tau_{\text{net}} &= \frac{dL}{dt} \\ \tau_{\text{net}} &= \frac{d(I\omega)}{dt} \\ \tau_{\text{net}} &= I \frac{d\omega}{dt} \\ \tau_{\text{net}} &= I\alpha \end{aligned}$$

On remarque que pour y arriver, nous avons dû supposer que  $I$  était une constante pour pouvoir le sortir de la dérivée. Ainsi, notre première version est valide uniquement si le moment d'inertie est une constante (c'est d'ailleurs ce que nous avons supposé quand nous en avons fait la preuve de  $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ ).

Notre nouvelle version est plus générale parce qu'elle peut s'appliquer si le moment d'inertie n'est pas constant. C'est uniquement quand le moment d'inertie  $I$  est constant (donc quand l'objet ne change pas de forme) que le moment de force net est égal à  $I\alpha$ .

## Principe de conservation du moment cinétique

### Condition pour qu'il y ait conservation

Si on fait la somme des moments de forces sur un système, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\text{système}} \tau_{\text{net}} &= \sum_{\text{système}} \frac{dL}{dt} \\ \sum_{\text{système}} \tau_{\text{net}} &= \frac{d\left(\sum_{\text{système}} L\right)}{dt} \\ \sum_{\text{système}} \tau_{\text{net}} &= \frac{dL_{\text{tot}}}{dt}\end{aligned}$$

La somme de tous les moments de force nets sur le système est la même chose que la somme de tous les moments de force agissant sur le système puisque la somme d'une somme est une somme. On a donc

$$\sum_{\text{système}} \tau = \frac{dL_{\text{tot}}}{dt}$$

Les moments de force dans ce système sont faits par des forces internes ou externes. Comme la somme des moments de force faits par les forces internes est nulle, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\text{système}} \tau_{\text{ext}} + \sum_{\text{système}} \cancel{\tau_{\text{int}}} &= \frac{dL_{\text{tot}}}{dt} \\ \sum_{\text{système}} \tau_{\text{ext}} &= \frac{dL_{\text{tot}}}{dt}\end{aligned}$$

On remarque que si la somme des moments de force est nulle, on a

$$\begin{aligned}0 &= \frac{dL_{\text{tot}}}{dt} \\ L_{\text{tot}} &= \text{constante}\end{aligned}$$

Ce qui nous amène à

### Principe de conservation du moment cinétique

$$L_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{si} \quad \sum_{\text{système}} \tau_{\text{ext}} = 0$$

Nous avons donc un nouveau principe de conservation que nous pourrions utiliser pour résoudre des problèmes. C'est surtout cet aspect du moment cinétique qui va nous intéresser ici.

### Démonstrations expérimentales

Pour illustrer ce principe, prenons l'exemple d'une personne (moi) assise sur un banc pivotant (sans friction) tenant dans ses mains une roue dont l'axe est vertical.

Si la personne fait tourner la roue dans un sens, on va remarquer que la personne commence à tourner dans le sens opposé.

<https://www.youtube.com/watch?v=VefDOBLTGYA>

Initialement, le moment cinétique est nul puisque rien ne tourne. Si la personne ne touche pas au sol et qu'il n'y a pas de friction, il n'y a pas de moment de force externe et le moment cinétique doit toujours être nul. Ainsi, si la personne fait tourner la roue dans un sens (qu'on voit choisir comme étant la direction positive), alors la personne doit tourner dans le sens opposé (sens négatif) pour que la somme du moment cinétique de la roue (positif) et de la personne (négatif) donne zéro. Puisque le moment d'inertie de la personne est plus grand que celui de la roue, elle tourne moins vite sur elle-même que la roue.



C'est aussi ce qui se passe sur cette plaque tournante.

<https://www.youtube.com/watch?v=w6QaxdppJaE>

Initialement, tout est au repos et le moment cinétique est nul. Quand la personne commence à marcher dans un sens, on voit que la plaque tourne dans l'autre sens. Le moment cinétique de la plaque est de même grandeur que le moment cinétique de la personne, mais de signe contraire, de sorte que le moment cinétique total reste toujours nul.

C'est ce principe qu'on utilise ici dans cet épisode des Simpson quand Skinner se met à courir dans un sens sur le conteneur, le conteneur tourne dans le sens contraire.

<https://www.youtube.com/watch?v=Cnros82SUf0>

C'est ce principe qui explique aussi le rôle crucial joué par le rotor de queue sur un hélicoptère. Au départ, quand l'hélice ne tourne pas, le moment cinétique est nul. Quand on démarre le moteur pour faire tourner l'hélice, le moment cinétique devrait rester nul parce que le



seniorphysics.com/physics/eei.html

moment de force fait sur l'hélice est un moment de force interne. Le bas de l'hélicoptère devrait donc commencer à tourner dans le sens contraire de l'hélice, quoiqu'avec beaucoup moins de vitesse angulaire, car le moment d'inertie du bas est beaucoup plus grand que celui de l'hélice. Quand l'hélicoptère touche au sol, avant le décollage, il y a une force externe (la friction du sol) qui empêche la rotation du bas. C'est possible dans ce cas que l'hélice tourne sans que le bas de l'hélicoptère tourne, car en présence de moments de force externe, le moment cinétique n'est pas conservé. Mais quand l'hélicoptère quitte le sol, il n'y a plus de moment de force externe et le bas de l'hélicoptère devrait commencer à

tourner. Le rotor de queue servira alors à empêcher cette rotation en plus de permettre de diriger l'hélicoptère dans la bonne direction. En cas de bris, l'hélicoptère doit se poser au plus vite avant que la rotation de l'habitacle ne devienne trop importante. C'est ce qui arrive dans ces courts extraits vidéo. Remarquer comment les problèmes commencent quand le rotor de queue s'arrête.

<https://www.youtube.com/watch?v=vMaF4X9AtAI>

<https://www.youtube.com/watch?v=q3idQKi5EqM> (tout un pilote !)

<https://www.youtube.com/watch?v=YDdbznlcGIU>

Si on revient au banc pivotant, la personne peut aussi commencer avec la roue qui tourne déjà dans un sens et inverser ensuite la roue.

<https://www.youtube.com/watch?v=0rVcJXWROvQ>

Dans ce cas, la roue a initialement un certain moment cinétique, disons positif. Quand on inverse la roue, elle tourne maintenant dans l'autre sens et son moment cinétique devient négatif. Mais, comme il n'y a pas de moment de force externe (la personne ne touche pas au sol), le moment cinétique doit être conservé. On remarque alors que la personne commence à tourner dans le même sens que le sens de rotation initial de la roue. Ainsi, la personne a un moment cinétique positif. La somme du moment cinétique de la personne (positif) et de celui de la roue (qui est maintenant négatif) doit égaler le moment cinétique initial de la roue (qui était positif).

### Utilités principales du principe de conservation du moment cinétique

La conservation du moment cinétique a deux utilités principales.

1. Des collisions impliquant un mouvement de rotation.
2. Quand le moment d'inertie d'un objet change.

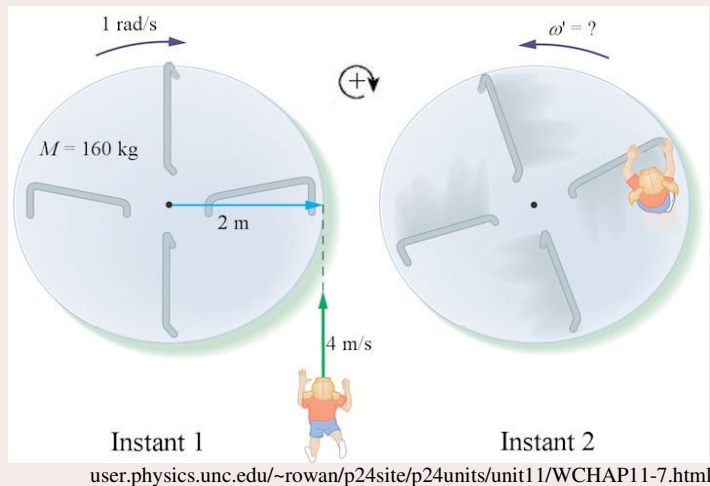
## **Conservation du moment cinétique lors de collisions**

En rotation, le moment cinétique joue un rôle semblable à la quantité de mouvement pour le mouvement de translation. Lors de collision, la force d'impact entre les deux objets crée seulement des moments de force internes. Comme la somme des moments de forces internes est nulle, le moment cinétique est conservé, si la somme des moments de force externes est nulle (ou si on les néglige).

On doit appliquer le principe de conservation du moment cinétique aux collisions dans lesquelles il y a du mouvement de translation et du mouvement de rotation. Un enfant qui court en ligne droite et qui saute sur une plaque tournante est un exemple de ce genre de collision. Au départ, on a du mouvement de translation et à la fin, on a de la rotation.

### Exemple 12.8.1

Un enfant (obèse) de 60 kg court à 4 m/s vers une plaque circulaire qui tourne initialement dans la direction indiquée sur la figure. Quelle est la vitesse de rotation quand l'enfant est sur la plaque ?



Comme il s'agit d'une collision impliquant un mouvement de rotation, on va utiliser le principe de conservation du moment cinétique.

#### Moment cinétique à l'instant 1

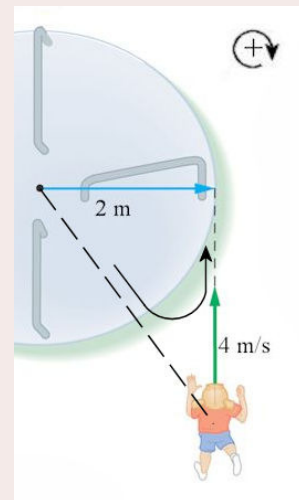
Le moment cinétique à l'instant 1 est

$$\begin{aligned} L &= L_{\text{plaque}} + L_{\text{enfant}} \\ &= I\omega + mvr_{\perp} \end{aligned}$$

Ici, on prend la formule  $I\omega$  pour l'objet qui tourne (la plaque) et  $mvr_{\perp}$  pour l'objet se déplaçant en ligne droite (l'enfant). Comme le moment d'inertie de la plaque est  $\frac{1}{2}MR^2$ , on arrive à

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}MR^2\omega + mvr_{\perp} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 160\text{kg} \cdot (2\text{m})^2 \cdot 1\frac{\text{rad}}{\text{s}} + -60\text{kg} \cdot 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{m} \end{aligned}$$

Le moment cinétique de la plaque est positif parce qu'elle tourne dans le sens positif. Le moment cinétique de l'enfant est négatif parce que quand on trace une flèche partant de l'axe vers l'enfant et qui tourne ensuite dans la direction de la vitesse, la direction de rotation de cette flèche est dans la direction opposée à notre sens positif.



Le moment cinétique à l'instant 1 est donc

$$\begin{aligned} L &= L_{\text{plaque}} + L_{\text{enfant}} \\ &= 320\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} - 480\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \\ &= -160\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \end{aligned}$$

Moment cinétique à l'instant 2

À l'instant 2, le moment cinétique est

$$\begin{aligned}
 L' &= I' \omega' \\
 &= I'_{\text{plaque}} \omega' + I'_{\text{enfant}} \omega' \\
 &= \frac{1}{2} M r^2 \omega' + m r^2 \omega' \\
 &= \left( \frac{1}{2} 160 \text{ kg} \cdot (2 \text{ m})^2 + 60 \text{ kg} \cdot (2 \text{ m})^2 \right) \cdot \omega' \\
 &= 560 \text{ kg m}^2 \cdot \omega'
 \end{aligned}$$

Application du principe de conservation du moment cinétique

En appliquant le principe de conservation du moment cinétique, on obtient

$$\begin{aligned}
 L &= L' \\
 -160 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} &= 560 \text{ kg m}^2 \cdot \omega' \\
 \omega' &= -0,2857 \frac{\text{rad}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Comme c'est négatif, la plaque tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (puisque notre positif est dans le sens des aiguilles d'une montre).

## Variation du moment d'inertie

Formule de base

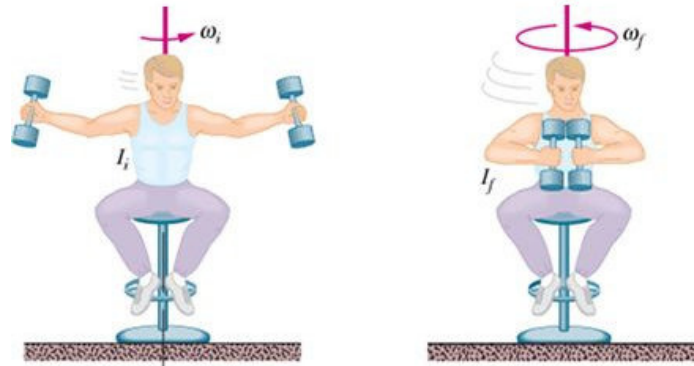
Cette deuxième application permet de trouver la vitesse angulaire d'un objet tournant s'il change de forme. Si le changement de forme se fait avec des forces internes, le moment cinétique est conservé. On aura alors

$$\begin{aligned}
 L &= L' \\
 I \omega &= I' \omega'
 \end{aligned}$$

En changeant de forme, le moment d'inertie changera et la vitesse angulaire devra changer pour que le produit  $I\omega$  reste constant.

Démonstrations expérimentales

On peut s'installer sur une plaque tournante en tenant dans nos mains des masses. Au départ, nos bras sont droits et horizontaux. Si on rapproche les masses de l'axe de rotation pendant qu'on tourne, le moment d'inertie diminue et la vitesse angulaire augmente.



[www.rakeshkapoor.us/ClassNotes/classnotes.php?notes=TorqueAndAngularMomentum&index=1](http://www.rakeshkapoor.us/ClassNotes/classnotes.php?notes=TorqueAndAngularMomentum&index=1)

<https://www.youtube.com/watch?v=w1KUjsSJRvg>

C'est ce qui se passe quand une patineuse artistique tourne sur elle-même de plus en plus vite. Elle ne force pas avec ses pieds pour tourner plus vite, elle concentre simplement sa masse près de l'axe de rotation pour diminuer son moment d'inertie. Alors, la vitesse de rotation augmente.

<https://www.youtube.com/watch?v=AQLtcEAG9v0>

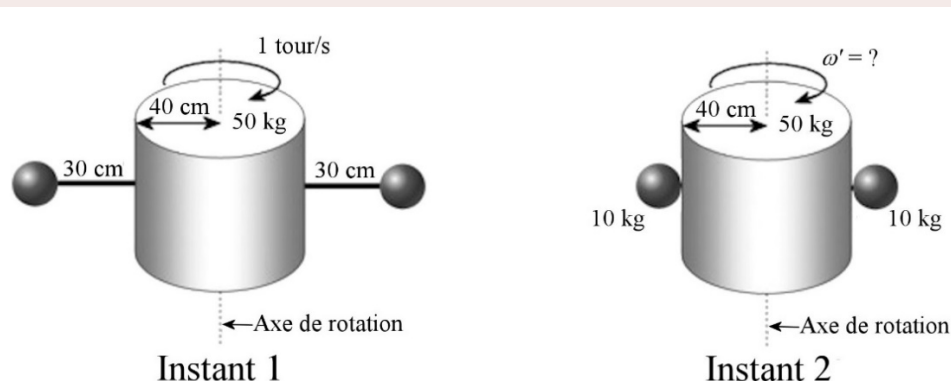
Remarquer comment elle tente d'augmenter son moment d'inertie au départ quand elle s'est donné la poussée sur la glace. En partant avec un moment d'inertie élevé, elle pourra le diminuer davantage et obtenir une plus grande vitesse angulaire.

On peut également faire une démonstration sur une plaque tournante comme celle qu'on retrouve dans certains parcs. Placez plusieurs personnes sur le bord et donnez une petite vitesse angulaire à la plaque. Dites ensuite aux personnes de se déplacer vers le centre. La vitesse angulaire de la plaque augmentera alors puisque le moment d'inertie baisse. (Il se peut que les gens aient de la difficulté à aller vers le centre, car il faudra faire une force centripète importante si la vitesse de rotation augmente beaucoup.) Comme je n'ai pas d'amis, j'ai fait cette expérience tout seul...

<https://www.youtube.com/watch?v=6S5fyCFg30g>

## Exemple 12.8.2

Quelle est la vitesse angulaire de cet objet si la forme change tel qu'indiqué sur la figure ? (Considérez que les masses de 10 kg sont ponctuelles.)





Comme il y a une variation de moment d'inertie, on va utiliser le principe de conservation du moment cinétique.

### Moment cinétique à l'instant 1

Le moment cinétique à l'instant 1 est

$$\begin{aligned}
 L &= I\omega \\
 &= (I_{\text{cylindre}} + I_{\text{sphères}}) \omega \\
 &= \left( \frac{1}{2} m_c r_c^2 + 2m_s r_s^2 \right) \omega \\
 &= \left( \frac{1}{2} \cdot 50\text{kg} \cdot (0,4\text{m})^2 + 2 \cdot 10\text{kg} \cdot (0,7\text{m})^2 \right) \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\
 &= (4\text{kgm}^2 + 9,8\text{kgm}^2) \cdot 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\
 &= 86,708 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

### Moment cinétique à l'instant 2

Le moment cinétique à l'instant 2 est

$$\begin{aligned}
 L' &= I'\omega' \\
 &= (I_{\text{cylindre}} + I_{\text{sphères}}) \omega' \\
 &= \left( \frac{1}{2} m_c r_c^2 + 2m_s r_s^2 \right) \omega' \\
 &= \left( \frac{1}{2} \cdot 50\text{kg} \cdot (0,4\text{m})^2 + 2 \cdot 10\text{kg} \cdot (0,4\text{m})^2 \right) \cdot \omega' \\
 &= (4\text{kgm}^2 + 3,2\text{kgm}^2) \cdot \omega' \\
 &= 7,2\text{kgm}^2 \cdot \omega'
 \end{aligned}$$

### Application du principe de conservation du moment cinétique

Avec la conservation du moment cinétique, on a

$$\begin{aligned}
 L &= L' \\
 86,708 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} &= 7,2\text{kgm}^2 \cdot \omega' \\
 \omega &= 12,04 \frac{\text{rad}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

La vitesse angulaire est donc passée de 1 tour par seconde à 1,92 tour par seconde. En approchant les masses de l'axe de rotation, la vitesse angulaire a augmenté comme prévu.

## Vitesse angulaire d'un objet qui fait un mouvement circulaire

Quand un objet fait un mouvement circulaire et que la somme des moments de force externes est nulle, le moment cinétique est conservé. C'est le cas avec cette pièce de monnaie

<https://www.youtube.com/watch?v=0khvqYjKoK4>

Il y a en fait un peu de friction ici qui fait lentement diminuer le moment cinétique. Malgré cela, les conséquences de la conservation du moment cinétique sont claires. À mesure que la pièce de monnaie descend dans le trou, elle s'approche de l'axe de rotation et cela diminue son moment d'inertie. Mais comme le moment cinétique  $I\omega$  doit rester constant (ou presque), la vitesse angulaire de la pièce de monnaie doit augmenter. Cette augmentation de vitesse angulaire (équivalente à une diminution de la période) est assez évidente dans le clip.

## RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

### Déplacement angulaire

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

### Vitesse angulaire moyenne

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

### Vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

### Lien entre la période et la vitesse angulaire (quand $\omega$ est constante)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

### Accélération angulaire moyenne

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

### Accélération angulaire instantanée

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

**Équations de la cinématique de rotation avec accélération angulaire constante**

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$2\alpha(\theta - \theta_o) = \omega^2 - \omega_o^2$$

$$\theta = \theta_o + \frac{1}{2}(\omega_o + \omega)t$$

**Distance parcourue à une distance  $r$  de l'axe pour un déplacement angulaire de  $\Delta\theta$** 

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

**Grandeur de la vitesse à une distance  $r$  de l'axe**

$$v = r\omega$$

**Grandeur de l'accélération à une distance  $r$  de l'axe**

**Accélération tangentielle**  $a_t = r\alpha$

**Accélération centripète**  $a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

**Accélération**  $a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$

**Lien entre la vitesse et la vitesse angulaire s'il y a roulement sans glissement**

$$v_{cm} = \omega R$$

**Lien entre l'accélération et l'accélération angulaire s'il y a roulement sans glissement**

$$a_{cm} = \alpha R$$

**Lien entre les vitesses et les accélérations pour une corde passant dans une poulie quand la corde ne glisse pas sur la poulie**

$$v_{corde} = \omega r$$

$$a_{corde} = \alpha r$$

où  $r$  est la distance entre la corde et l'axe de rotation

**La transmission du mouvement de rotation.**

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

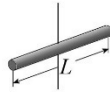
**Le moment d'inertie d'un objet**

$$I_{cm} = \sum m_i r_i^2$$

**Moments d'inertie importants**

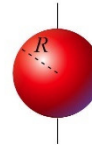
Tige

$$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$$



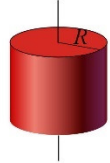
Sphère

$$I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$$

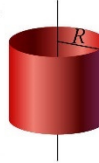


Cylindre plein

$$I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$$

Cylindre vide/  
Anneau

$$I_{cm} = mR^2$$

 **$I$  à partir de  $I_{cm}$  (théorème des axes parallèles)**

$$I = I_{cm} + md^2$$

**Énergie cinétique d'un objet qui tourne autour d'un axe immobile qui passe par le centre de masse**

$$E_k = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

**Énergie cinétique d'un objet qui tourne autour d'un axe qui ne passe pas par le centre de masse**

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

**Énergie cinétique d'un objet qui fait une translation et une rotation**

$$E_K = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{cm}^2}_{E_k \text{ de translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2}_{E_k \text{ de rotation}}$$

**Moment de force**

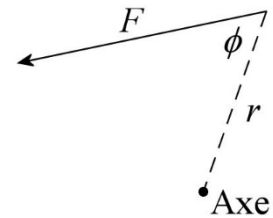
$$\tau = Fr \sin \phi$$

ou

$$\tau = F_{\perp} r$$

ou

$$\tau = Fr_{\perp}$$

**Moment de force net ou moment de force résultant**

$$\tau_{net} = \sum \tau$$

**Deuxième loi de Newton pour la rotation (pour un objet qui ne change pas de forme)**

$$\sum \tau_{ext} = I \alpha$$

**Travail fait par un moment de force constant**

$$W = \tau \Delta \theta$$

**Travail fait par un moment de force variable**

$$W = \int \tau d\theta$$

**Énergie potentielle en rotation si la force est conservative**

$$U = -\int \tau d\theta$$

**Puissance moyenne**

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

**Puissance instantanée**

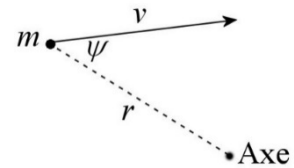
$$P = \tau \omega$$

**Théorème de l'énergie cinétique en rotation**

$$W_{net} = \Delta E_k$$

**Moment cinétique**

$$L = mvr \sin \psi$$

**Moment cinétique d'une masse se déplaçant en ligne droite**

$$L = mvr_{\perp}$$

**Moment cinétique d'un objet rigide en rotation**

$$L = I \omega$$

**Deuxième loi de Newton pour la rotation**

$$\tau_{net} = \frac{dL}{dt}$$

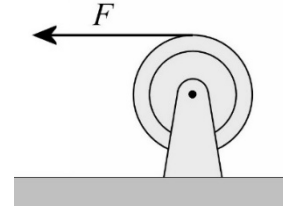
**Principe de conservation du moment cinétique**

$$L_{tot} = \text{constante} \quad \text{si} \quad \sum_{\text{système}} \tau_{ext} = 0$$

## EXERCICES

### 12.1 Cinématique de rotation

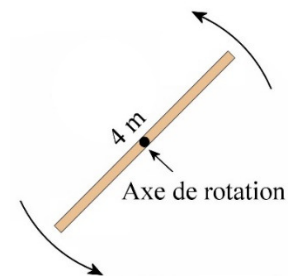
1. Quelle est la vitesse angulaire moyenne de la Terre due à sa rotation sur elle-même ?
2. Dans la situation montrée sur la figure, on donne une accélération angulaire de  $5 \text{ rad/s}^2$  à cette roue initialement au repos.



- a) Quelle est la vitesse angulaire de la roue au bout de 10 secondes ?
  - b) Combien de tours la roue fait-elle en 10 secondes ?
  - c) Combien faut-il de temps pour que la roue fasse 50 tours ?
3. La vitesse angulaire d'une roue diminue de sorte qu'elle passe de 120 tours/min à 80 tours/min en 20 secondes. Combien de tours la roue a-t-elle faits pendant ce temps ?
  4. La position angulaire d'un disque tournant est donnée par la formule suivante.

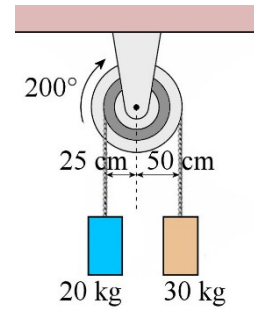
$$\theta = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

- a) Combien de tours a faits le disque en 5 secondes ?
  - b) Quelle est la vitesse angulaire moyenne du disque durant ces 5 secondes ?
  - c) Quelle est la vitesse angulaire du disque à  $t = 4 \text{ s}$  ?
  - d) Quelle est l'accélération angulaire du disque à  $t = 2 \text{ s}$  ?
  - e) À quel moment la vitesse angulaire du disque est-elle nulle ?
5. Cette tige tourne autour d'un axe tel qu'illustré sur la figure. La vitesse initiale de rotation est de 60 tours/min alors qu'elle n'est plus que de 12 tours/min au bout de 0,2 seconde. L'accélération angulaire est constante.

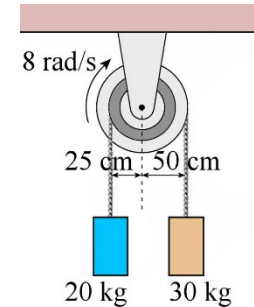


- a) Quelle est la vitesse des bouts de la tige à  $t = 0 \text{ s}$  ?
- b) Quelle est l'accélération angulaire de la tige ?
- c) Quelle est l'accélération centripète des bouts de la tige à  $t = 0 \text{ s}$  ?
- d) Quelle est l'accélération tangentielle des bouts de la tige à  $t = 0 \text{ s}$  ?
- e) Quelle est la grandeur de l'accélération des bouts de la tige à  $t = 0 \text{ s}$  ?

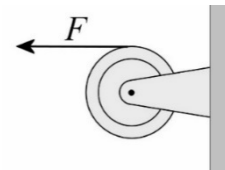
6. La poulie montrée dans cette figure a tourné de  $200^\circ$ . Quel fut alors le déplacement de chaque bloc ?



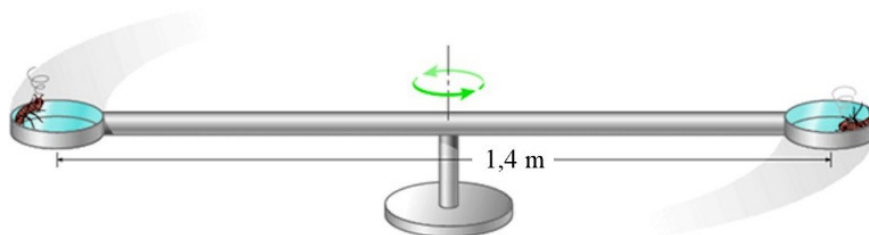
7. La poulie montrée dans cette figure tourne avec une vitesse angulaire de  $8 \text{ rad/s}$  dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelle est la vitesse de chacun des blocs ?



8. Une voiture ayant une vitesse de  $40 \text{ m/s}$  freine et s'arrête sur une distance de  $160 \text{ m}$  avec une accélération constante. Les roues de la voiture ont un diamètre de  $80 \text{ cm}$ .
- Quelle est la vitesse angulaire initiale des roues ?
  - Quelle est l'accélération angulaire des roues pendant la période de freinage ?
9. Une poulie est initialement au repos. On tire alors sur une corde enroulée autour de la poulie, ce qui donne une accélération angulaire constante à la poulie. Pendant un moment de ce mouvement, la poulie fait 60 tours pendant que sa vitesse angulaire passe de  $90 \text{ tours/min}$  à  $300 \text{ tours/min}$ .
- Quelle est l'accélération angulaire de la poulie ?
  - Combien de tours a-t-elle faits pendant que sa vitesse est passée de  $0 \text{ tour/min}$  à  $90 \text{ tours/min}$  ?



10. Dans une expérience de biologie visant à étourdir des fourmis, Marilou place 2 de ces insectes dans l'appareil montré sur la figure. Initialement, la tige ne tourne pas. Quand Marilou démarre l'appareil, la tige a une accélération angulaire de  $8 \text{ rad/s}^2$  pendant 4 secondes puis sa vitesse reste constante.



- a) Combien de tours vont faire les fourmis pendant les 5 premières secondes du mouvement de la tige ?
- b) Combien faudra-t-il de temps pour que la tige ait fait 100 tours ?

11. Dans la situation montrée sur la figure, la roue dentée la plus grande a un rayon de 25 cm et la roue dentée la plus petite a un rayon de 15 cm. La grande roue dentée a une vitesse angulaire de 1200 tours/min.

- a) Quelle est la vitesse angulaire de la petite roue dentée ?
- b) Quelle est la grandeur de la vitesse de la chaîne reliant les deux roues dentées ?

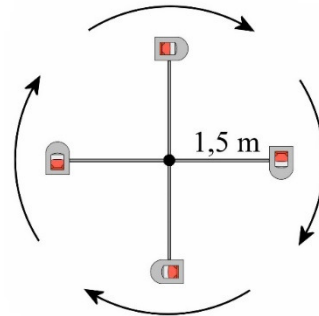


[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/gears-important-components-mechanical-devices-mechanical-clocks-bicycles-fact-present-moto-q3085038](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/gears-important-components-mechanical-devices-mechanical-clocks-bicycles-fact-present-moto-q3085038)

## 12.2 L'énergie cinétique de rotation et le moment d'inertie

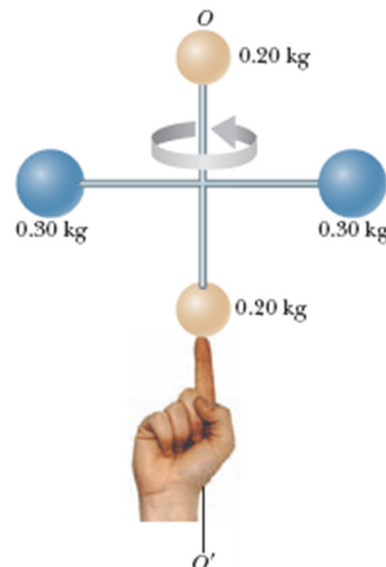
12. Les petites voitures au bout de ces tiges métalliques de ce manège ont toutes une masse de 120 kg.

- a) Quel est le moment d'inertie de ce manège quand on le fait tourner autour de l'axe situé au centre si on néglige la masse des tiges et si on considère les voitures comme des masses ponctuelles ?
- b) Quelle est l'énergie cinétique de ce manège s'il tourne avec une vitesse angulaire de 12 tours/min ?



13. Dans ses cours de clown à l'école de cirque, Natasha doit faire tourner un objet tel qu'illustré sur la figure. Les tiges ont une masse négligeable et une longueur de 30 cm (d'une balle à l'autre).

- a) Quel est le moment d'inertie de cet objet quand il tourne autour de l'axe indiqué sur la figure si on considère les balles comme des masses ponctuelles ?
- b) Quelle est l'énergie cinétique de cet objet quand il tourne tel qu'indiqué sur la figure avec une vitesse angulaire de 2 rad/s ?



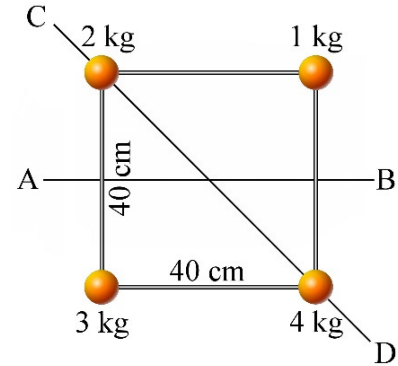
[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/bizarre-baton-created-taking-identical-balls-mass-0264-kg-fixing-rods-length-116-m-length-q4622982](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/bizarre-baton-created-taking-identical-balls-mass-0264-kg-fixing-rods-length-116-m-length-q4622982)



14. Quel est le moment d'inertie de cet objet si l'axe de rotation est...

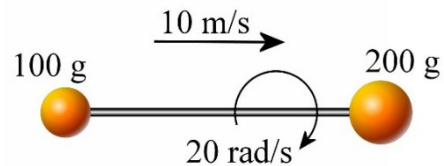
- a) la ligne AB ?
- b) la ligne CD ?

(Les tiges ont des masses négligeables et les balles sont considérées comme étant ponctuelles.)



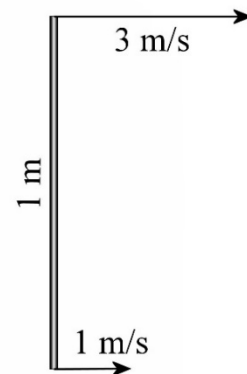
15. Quelle est l'énergie cinétique de cet objet formé de deux masses distantes de 60 cm, qui se déplace à 10 m/s et qui tourne en même temps autour de son centre de masse avec une vitesse angulaire de 20 rad/s ?

(La tige a une masse négligeable et les balles sont considérées comme étant ponctuelles.)



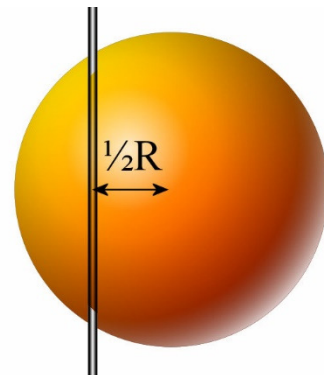
16. La figure montre la vitesse des deux bouts d'une tige à un moment précis. La tige a une longueur de 1 m et une masse de 3 kg.

- a) Quelle est l'énergie cinétique de rotation de la tige ?
- b) Quelle est l'énergie cinétique de translation de la tige ?
- c) Quelle est l'énergie cinétique totale de la tige ?



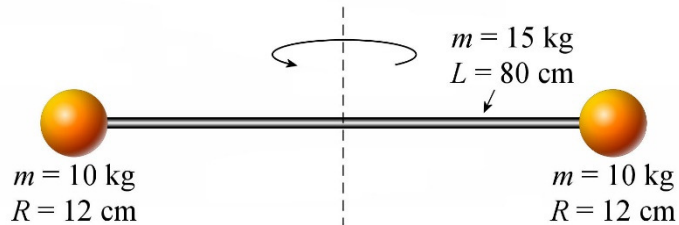
## 12.3 Le moment d'inertie

17. Quel est le moment d'inertie de cette sphère pleine ayant une masse de 2 kg et un rayon de 6 cm si l'axe de rotation est la tige qui passe à travers la sphère ?



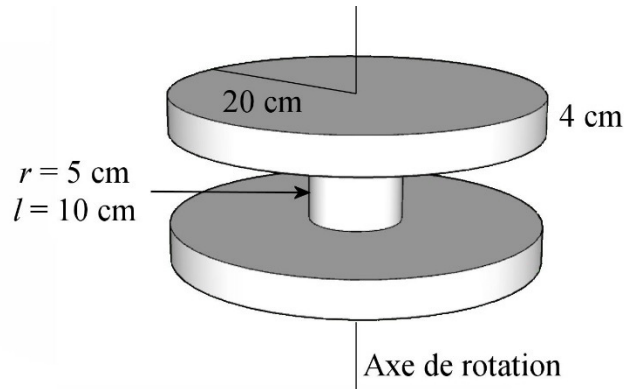
18. Quel est le moment d'inertie de cet objet si l'axe de rotation est celui montré sur la figure ?

(La tige n'a pas une masse négligeable et les balles ne sont pas considérées comme étant ponctuelles.)

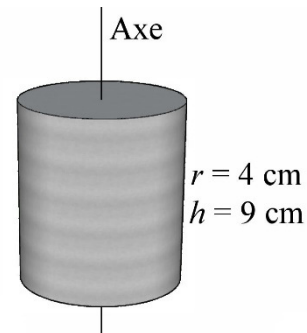


19. Quel est le moment d'inertie de cet objet fait d'un matériau ayant une masse volumique de  $5000 \text{ kg/m}^3$  si l'axe de rotation est celui montré sur la figure ?

(Le grand disque du bas est identique au grand disque du haut.)

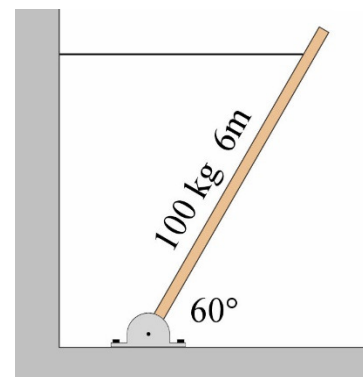


20. Voici une boîte de conserve emplie d'air. Les parois (côté, couvercle et fond) sont minces et faites d'un matériau ayant une masse surfacique de  $1 \text{ g/cm}^2$ . Quel est le moment d'inertie de cette boîte de conserve si l'axe de rotation est celui montré sur la figure ?

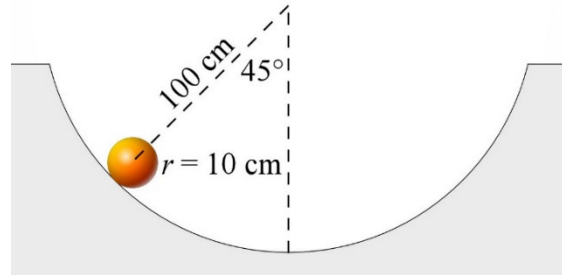


## 12.4 La conservation de l'énergie mécanique

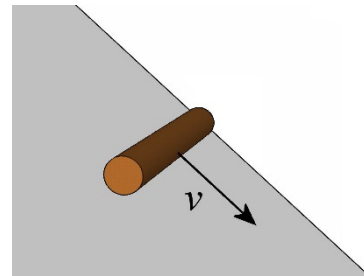
21. Cette poutre retenue par un câble a une masse de  $100 \text{ kg}$  et une longueur de  $6 \text{ m}$ . Avec quelle vitesse le bout de la poutre frappe-t-il le sol si le câble casse ?



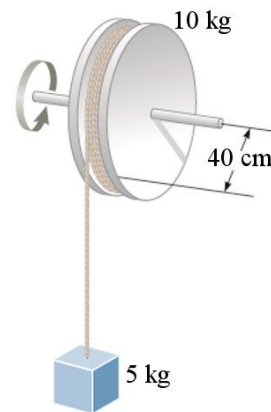
22. Une balle ayant une masse de 800 g et un rayon de 10 cm est tenue au repos à la position montrée sur la figure. On laisse alors partir la balle (sans la pousser) et elle roule dans le bol sans glisser. Quelle est la vitesse de la balle quand elle est au point le plus bas dans le bol ?



23. Un billot de bois ayant une masse de 4000 kg, un diamètre de 50 cm et une longueur de 10 m est tombé d'un camion pour rouler le long d'une pente inclinée de  $40^\circ$ . Tout au long de la descente, le billot roule sans glisser. Au sommet de la pente, le billot avait une vitesse de 5 m/s. Quelle est la vitesse de billot au bas de la pente si la pente a une longueur de 400 m ?

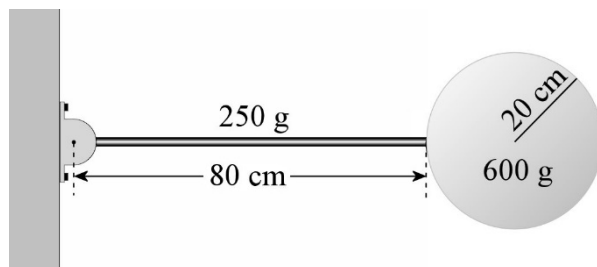


24. La masse de 5 kg est initialement au repos dans la situation montrée sur la figure. La masse descend ensuite de 8 m. Quelle est la vitesse de la masse de 5 kg quand elle est rendue 8 m plus bas si on considère que la poulie est un disque ?

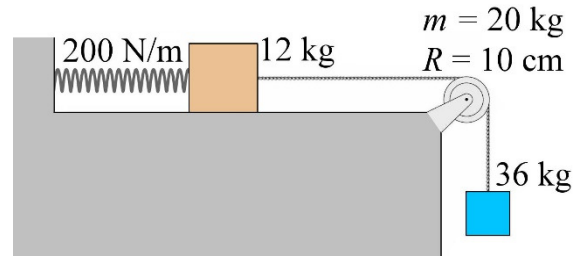


[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2012-october-19](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2012-october-19)

25. L'objet montré sur la figure est formé d'une tige et d'un disque. On laisse alors tomber cet objet qui était initialement au repos à l'horizontale (comme sur la figure). Quelle sera la vitesse angulaire de cet objet quand la tige sera verticale ?



26. Dans la situation montrée sur la figure, le ressort n'est ni étiré ni comprimé initialement. Quelle sera la vitesse des blocs après un déplacement de 1 m s'ils étaient initialement au repos ?

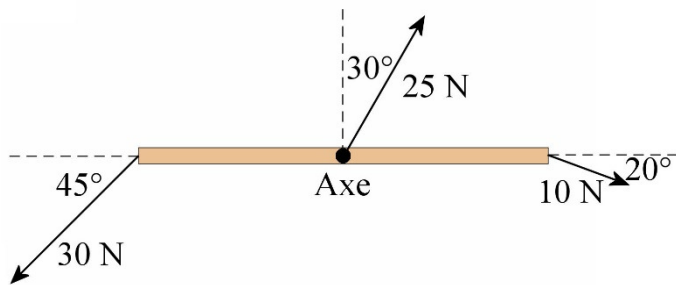


(Considérez que la poulie est un disque et qu'il n'y a pas de friction entre le bloc de 12 kg et la surface.)

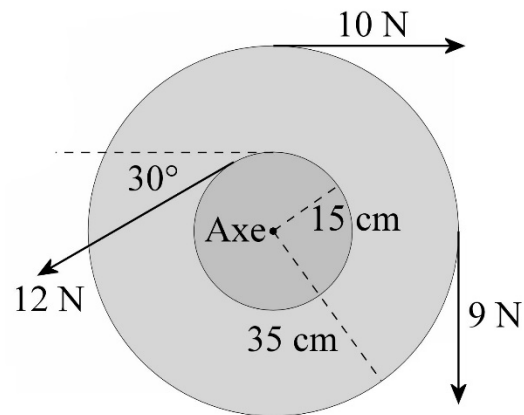
## 12.5 Le moment de force

27. Quel est le moment de force net sur cette tige ?

(L'axe de rotation est au centre de la tige et la tige a 4 m de long.)

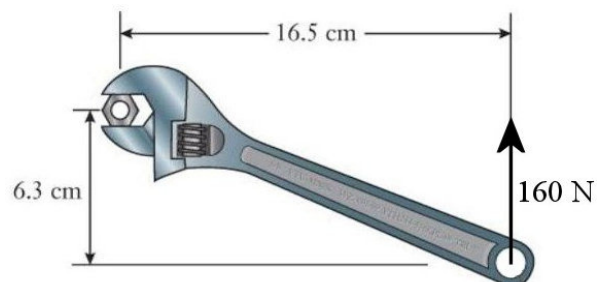


28. Quel est le moment de force net sur cette roue ?



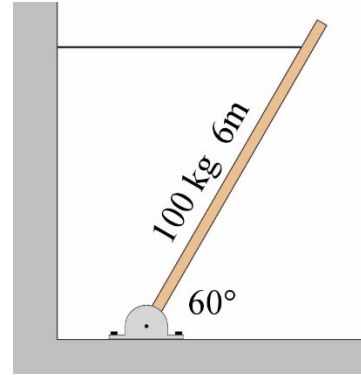
29. Quel est le moment de force fait par la force de 160 N sur la clé ?

[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/mechanical-engineering-archive-2012-september-23](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/mechanical-engineering-archive-2012-september-23)



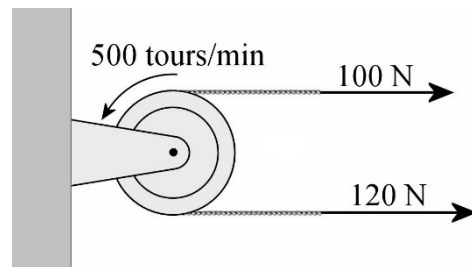
## 12.6 La dynamique de rotation

30. Cette poutre retenue par un câble a une masse de 100 kg et une longueur de 6 m. Quelle est l'accélération angulaire de la tige immédiatement après que la corde ait cassé ?

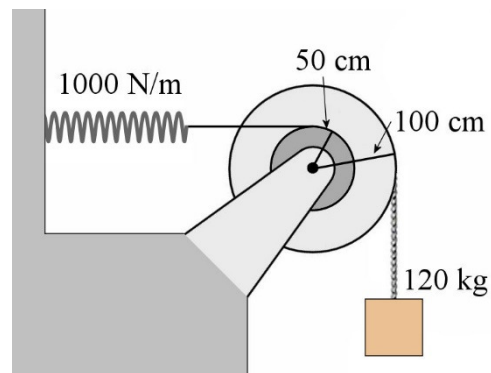


31. La poulie montrée sur la figure a un moment d'inertie de  $0,5 \text{ kgm}^2$  et un rayon de 300 mm.

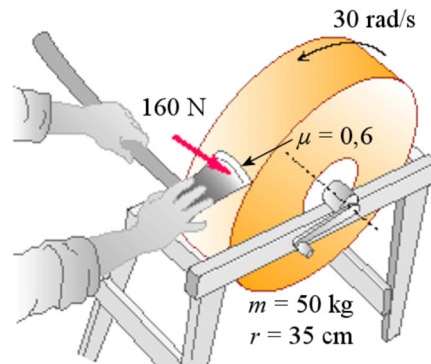
- Quelle est l'accélération angulaire de la poulie ?
- Quelle sera sa vitesse angulaire dans 10 secondes (en tours/min) ?



32. Il y a équilibre dans la situation montrée sur la figure. Quel est alors l'étirement du ressort ?



33. Avec une manivelle, Gertrude a donné une vitesse angulaire de  $30 \text{ rad/s}$  à une meule. Elle appuie alors sa hache avec une normale de 160 N sur la meule pour l'aiguiser. Comme il y a de la friction entre la meule et la hache, la meule ralentit. Pendant combien de temps peut-elle aiguiser sa hache avant que la vitesse angulaire n'atteigne  $10 \text{ rad/s}$  ?

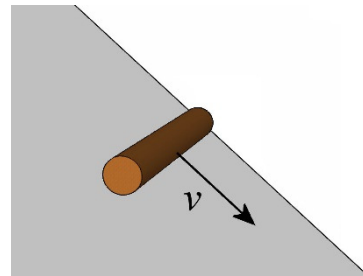


[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2012-november-11](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2012-november-11)

34. On applique un moment de force sur une roue initialement au repos pour lui donner une vitesse angulaire de  $30 \text{ rad/s}$  en  $10 \text{ s}$ . On cesse ensuite d'appliquer le moment de force et la roue s'arrête en  $120 \text{ secondes}$  parce que la friction fait un moment de force (qu'on va supposer constant) qui s'oppose à la rotation de la roue. Ce moment de force dû à la friction s'opposant à la rotation est présent aussi pendant qu'on appliquait la force pour accélérer la roue. Le moment d'inertie de la roue est de  $0,5 \text{ kgm}^2$ .

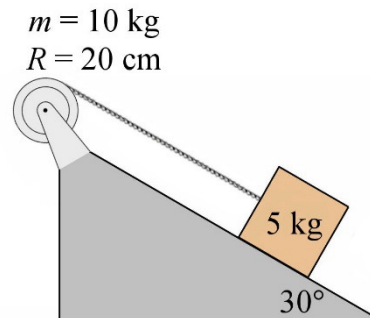
- Quel est le moment de force fait par la friction ?
- Quel était le moment de force appliquée pour donner une vitesse angulaire de  $30 \text{ rad/s}$  ?

35. Un billot de bois ayant une masse de  $4000 \text{ kg}$  un diamètre de  $50 \text{ cm}$  et une longueur de  $10 \text{ m}$  est tombé d'un camion pour rouler le long d'une pente inclinée de  $40^\circ$ . Tout au long de la descente, le billot roule sans glisser.

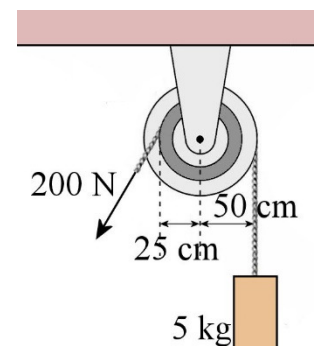


- Quelle est l'accélération du billot ?
- Quelle est la valeur minimale que peut prendre le coefficient de friction entre la pente et le billot pour que ce dernier roule sans glisser ?

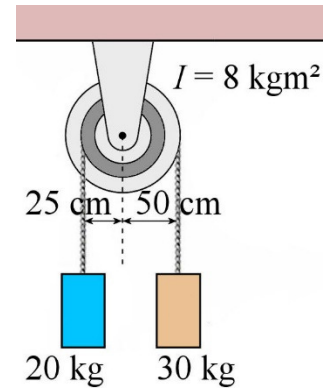
36. Une corde enroulée autour d'un cylindre est reliée à un bloc de  $5 \text{ kg}$ , tel qu'illustré sur la figure. Quelle est l'accélération du bloc s'il n'y a pas de friction entre le bloc et la pente ?



37. La poulie montrée dans cette figure a un moment d'inertie de  $8 \text{ kgm}^2$ . Quelle est l'accélération de la masse de  $5 \text{ kg}$  ?



38. La poulie montrée dans cette figure a un moment d'inertie de  $8 \text{ kgm}^2$ . Quelle est l'accélération de chacun des blocs ?



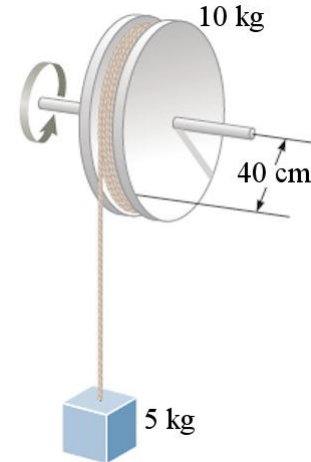
39. On vient juste de frapper une boule de sorte qu'elle se déplace à  $v_0 = 3,5 \text{ m/s}$  sans rouler (ce qui signifie qu'elle glisse sur la surface). Toutefois, il y a de la friction entre la balle et le sol qui fait un moment de force. Ce moment de force fera augmenter la vitesse angulaire de la balle jusqu'à ce que la balle roule sans glisser. Quelle sera la vitesse de la balle quand elle roulera sans glisser ?



## 12.7 Le travail et la puissance

40. Un moment de force constant de  $0,45 \text{ Nm}$  fait tourner une sphère initialement au repos. La sphère a une masse de  $10 \text{ kg}$  et un rayon de  $20 \text{ cm}$ .
- Quel est le déplacement angulaire de la sphère en 10 secondes ?
  - Quel est le travail fait par ce moment de force en 10 secondes ?
  - Quelle est la vitesse angulaire de la sphère au bout de 10 secondes (en utilisant le théorème de l'énergie cinétique) ?
41. Un moteur met en rotation une sphère initialement au repos pour lui donner, en 30 secondes, une vitesse angulaire de 2400 tours/minutes. La sphère a un rayon de  $10 \text{ cm}$  et une masse de  $20 \text{ kg}$ . Quelle est la puissance moyenne du moteur ?
42. La puissance du moteur d'une Kia Optima est de 274 hp quand le moteur tourne à 6000 tours/minutes. Quel est le moment de force exercé par le moteur à ce moment ?

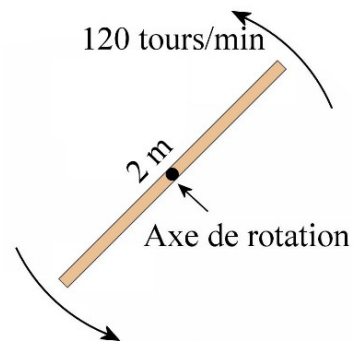
43. Un moteur fait tourner cette poulie avec une accélération angulaire constante pour faire monter le bloc. Initialement, le bloc est au repos au sol. 3 secondes après la mise en marche du moteur, le bloc est à 4,5 m du sol et a une vitesse de 3 m/s. On va considérer que la poulie est un disque.



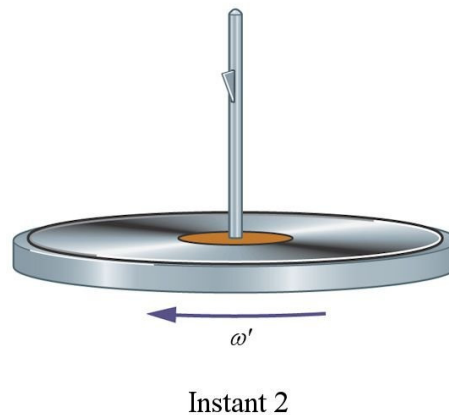
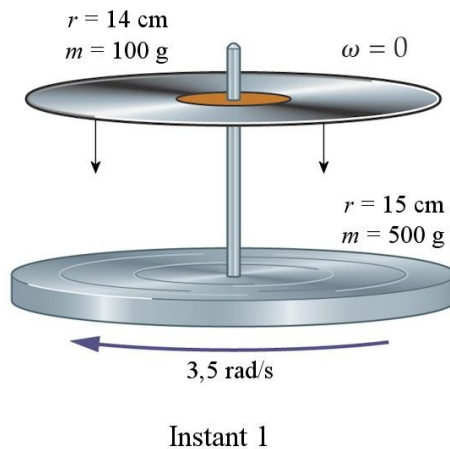
- Quel est le travail fait par le moteur (ce qui correspond au travail externe) ?
- Quelle est la puissance moyenne du moteur pendant les 3 premières secondes ?
- Quelle est la puissance instantanée du moteur 3 secondes après la mise en marche du moteur ?

## 12.8 Le moment cinétique

44. Quel est le moment cinétique de cette tige de 300 g ?



45. Un disque tombe sur une plateforme tournante telle qu'illustrée sur la figure. Quelle est la vitesse angulaire à l'instant 2 ?

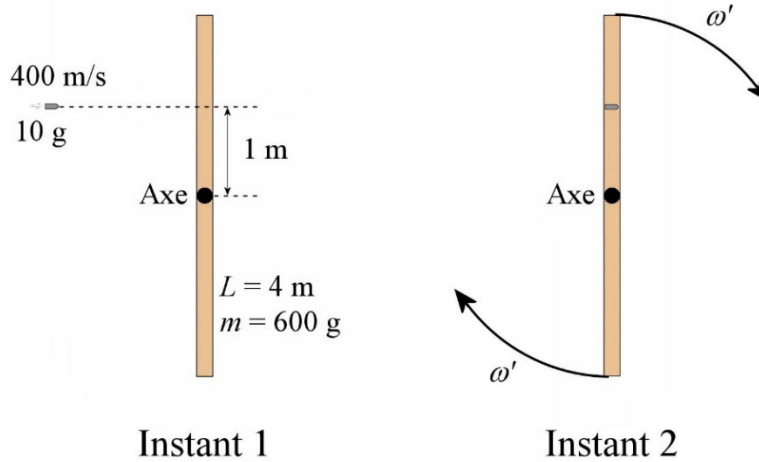


[user.physics.unc.edu/~rowan/p24site/p24units/unit11/WCHAP11-7.html](http://user.physics.unc.edu/~rowan/p24site/p24units/unit11/WCHAP11-7.html)

46. Une balle de fusil arrive dans une tige initialement au repos pouvant pivoter autour d'un axe passant par son centre de masse, tel qu'illustré sur la figure (instant 1). La

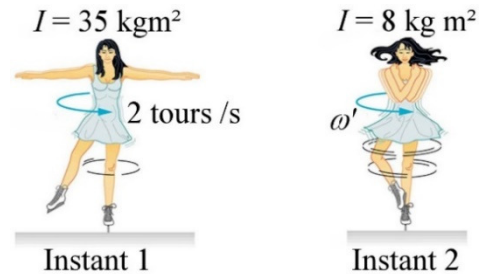


balle se loge alors dans la tige. Quelle est la vitesse angulaire de la tige après la collision (instant 2) ?

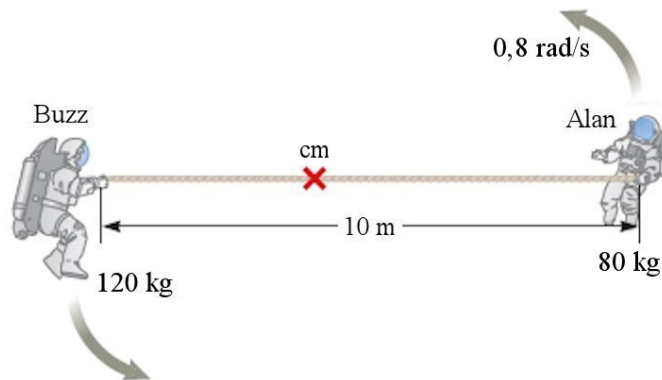


47. Quelle est la vitesse de rotation de cette patineuse à l'instant 2 (en tours par secondes) ?

[physics.stackexchange.com/questions/81791/conservation-of-angular-momentum-experiment](https://physics.stackexchange.com/questions/81791/conservation-of-angular-momentum-experiment)



48. Buzz et Alan sont deux astronautes flottants dans l'espace tel qu'illustré sur la figure. Initialement, ils sont à 10 m l'un de l'autre et ils tournent autour du centre de masse des deux astronautes avec une vitesse angulaire de 0,8 rad/s. Buzz tire alors sur la corde de sorte que la distance entre Buzz et Alan n'est plus que de 4 m.



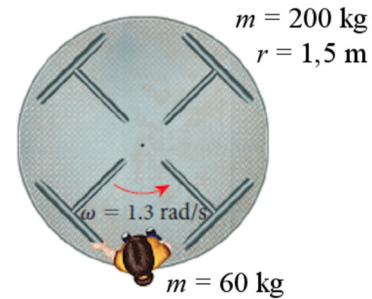
[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/astronauts-having-mass-m-connected-rope-length-d-having-negligible-mass-isolated-space-orb-q3272102](https://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/astronauts-having-mass-m-connected-rope-length-d-having-negligible-mass-isolated-space-orb-q3272102)

- Quel est le moment d'inertie par rapport au centre de masse avant que Buzz ne tire sur la corde ? (La corde a une masse négligeable et les astronautes sont considérées comme étant ponctuelles.)
- Quel est le moment d'inertie par rapport au centre de masse après que Buzz ait tiré sur la corde ? (La corde a une masse négligeable et les astronautes sont considérées comme étant ponctuelles.)

- c) Quelle est la vitesse angulaire des astronautes quand ils sont à 4 m l'un de l'autre ?
- d) Quelle est la vitesse de chaque astronaute quand ils sont à 4 m l'un de l'autre ?
- e) Quelle est la tension de la corde quand les deux astronautes sont à 4 m l'un de l'autre ?
- f) Quelle est l'augmentation de l'énergie cinétique du système quand la distance entre les astronautes passe de 10 m à 4 m l'un de l'autre ?
- g) Quel est le travail fait par Buzz pour faire passer la distance entre les astronautes de 10 m à 4 m ?

49. Marjorie est sur le bord d'une plaque tournante ayant une vitesse angulaire de  $1,3 \text{ rad/s}$ . Que sera la vitesse angulaire de la plaque si elle va au centre de la plaque ? (On considère Marjorie comme une masse ponctuelle.)

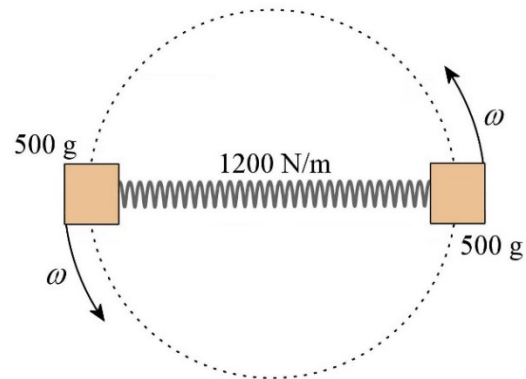
[www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/student-mass-m-50-kg-wants-measure-mass-playground-merry-round-consists-solid-metal-disk-r-q1047205](http://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/student-mass-m-50-kg-wants-measure-mass-playground-merry-round-consists-solid-metal-disk-r-q1047205)



## Défis

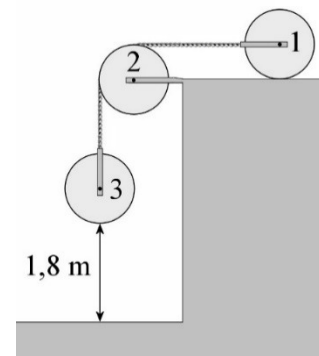
(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

50. Ce système formé de deux masses de 500 g et d'un ressort tourne autour de son centre de masse. L'énergie mécanique de ce système est de 126 J et la constante du ressort est de 1200 N/m. La longueur de ressort quand il n'est ni étiré ni comprimé est de 10 cm. (Il n'y a pas de gravitation et considérez les deux masses comme des masses ponctuelles.)



- a) Quel est l'étirement du ressort ?
- b) Quelle est la vitesse angulaire ?

51. Trois cylindres pleins identiques sont fixés ensemble tels qu'illustrés sur la figure. On va négliger la masse des supports qui relient les cylindres 1 et 3 à la corde. Quand le cylindre 3 descend, le cylindre 1 roule sans glisser sur la surface et la corde fait tourner le cylindre 2 (la corde ne glisse pas sur le cylindre). Quelle sera la vitesse du cylindre 3 immédiatement avant de frapper le sol si le système est initialement au repos ?



## RÉPONSES

### 12.1 Cinématique de rotation

1.  $7,272 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
2. a) 50 rad/s    b) 39,79 tours    c) 11,21 s
3. 33,33 tours
4. a) 5,968 tours    b) 7,5 rad/s    c) 6 rad/s    d) -1 rad/s<sup>2</sup>    e) 10 s
5. a) 12,566 m/s    b) -25,13 rad/s<sup>2</sup>    c) 78,96 m/s<sup>2</sup>    d) 50,27 m/s<sup>2</sup>    e) 93,6 m/s<sup>2</sup>
6. bloc de 20 kg : 0,8727 m vers le haut    bloc de 30 kg : 1,745 m vers le bas
7. bloc de 20 kg : 2 m/s vers le haut    bloc de 30 kg : 4 m/s vers le bas
8. a) 100 rad/s    b) -12,5 rad/s<sup>2</sup>
9. a) 1,191 rad/s<sup>2</sup>    b) 5,934 tours
10. a) 15,28 tours    b) 21,635 s
11. a) 2000 tours/min    b) 31,418 m/s

### 12.2 L'énergie cinétique de rotation et le moment d'inertie

12. a) 1080 kgm<sup>2</sup>    b) 852,73 J
13. a) 0,0135 kgm<sup>2</sup>    b) 0,027 J
14. a) 0,4 kgm<sup>2</sup>    b) 0,32 kgm<sup>2</sup>
15. 19,8 J
16. a) 0,5 J    b) 6 J    c) 6,5 J

### 12.3 Le moment d'inertie

17. 0,00468 kgm<sup>2</sup>
18. 6,3232 kgm<sup>2</sup>
19. 1,0102 kgm<sup>2</sup>
20.  $4,423 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$

### 12.4 La conservation de l'énergie mécanique

21. 12,36 m/s
22. 2,025 m/s
23. 58,18 m/s
24. 8,854 m/s
25. 4,541 rad/s
26. 2,952 m/s

### 12.5 Le moment de force

27. 35,586 Nm dans le sens contraire des aiguilles d'une montre
28. 4,85 Nm dans le sens des aiguilles d'une montre
29. 26,4 Nm dans le sens contraire des aiguilles d'une montre

## 12.6 La dynamique de rotation

- 30.  $1,225 \text{ rad/s}^2$
- 31. a)  $12 \text{ rad/s}^2$  dans le sens contraire des aiguilles d'une montre  
b) 1646 tours/min dans le sens contraire des aiguilles d'une montre
- 32. 2,352 m
- 33. 1,823 s
- 34. a) 0,125 Nm opposé à la rotation    b) 1,625 Nm dans le sens de la rotation
- 35. a)  $4,2 \text{ m/s}^2$     b) 0,2797
- 36.  $2,45 \text{ m/s}^2$
- 37.  $1,378 \text{ m/s}^2$
- 38. Bloc de 20 kg :  $1,463 \text{ m/s}^2$  vers le haut, bloc de 30 kg :  $2,925 \text{ m/s}^2$  vers le bas
- 39. 2,5 m/s

## 12.7 Le travail et la puissance

- 40. a) 140,625 rad    b) 63,28 J    c) 28,125 rad/s
- 41. 84,22 W
- 42. 325,32 Nm
- 43. a) 265,5 J    b) 88,5 W    c) 177 W

## 12.8 Le moment cinétique

- 44.  $1,2566 \text{ kgm}^2/\text{s}$
- 45. 2,98 rad/s
- 46. 4,938 rad/s
- 47. 8,75 tours/s
- 48. a)  $4800 \text{ kgm}^2$     b)  $768 \text{ kgm}^2$     c) 5 rad/s    d) Buzz : 8 m/s    Alan : 12 m/s  
e) 4800 N    f) 8064 J    g) 8064 J
- 49. 2,08 rad/s

## Défis

- 50. a) 30 cm    b) 60 rad/s
- 51. 3,429 m/s