Solutionnaire du chapitre 11

1. La position de centre de masse en x est

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum xm \\
&= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\
&= \frac{1}{10kg}\left(0,5\cdot 3kg + 3,5m\cdot 3kg + 2m\cdot 4kg\right) \\
&= \frac{20kgm}{10kg} \\
&= 2m
\end{aligned}$$

La position de centre de masse en y est

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{m}\sum ym \\
&= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\
&= \frac{1}{10kg}\left(2,5m\cdot 3kg + 2,5m\cdot 3kg + 0,5m\cdot 4kg\right) \\
&= \frac{17kgm}{10kg} \\
&= 1,7m
\end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à la position (2 m, 1,7 m).

2. Nous avons les trois masses suivantes.

1) Une masse de 3 kg à (0,0).
2) Une masse de 2 kg à (10 m, 0 m).
3) Une masse de 1 kg à (5 m, 8,66 m).

(Cette dernière position est y_3 = 10 m sin (60°).

La position de centre de masse en x est

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum xm \\
&= \frac{1}{m}\left(x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3\right) \\
&= \frac{1}{6kg}\left(0\cdot 3kg + 10m\cdot 2kg + 5m\cdot 1kg\right) \\
&= \frac{25kgm}{6kg} \\
&= 4{,}17m
\end{aligned}$$

La position de centre de masse en y est

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{m}\sum ym \\
&= \frac{1}{m}\left(y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3\right) \\
&= \frac{1}{6kg}\left(0m\cdot 3kg + 0m\cdot 2kg + 8{,}66m\cdot 1kg\right) \\
&= \frac{8{,}66kgm}{6kg} \\
&= 1{,}44m
\end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à la position (4,17 m, 1,44 m).

3. La position de centre de masse en x est

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum xm$$

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\left(x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4\right)$$

$$4\text{m} = \frac{1}{7\text{kg} + m_4}\left(1\text{m}\cdot 1\text{kg} + 3\text{m}\cdot 4\text{kg} + 6\text{m}\cdot 2\text{kg} + 10\text{m}\cdot m_4\right)$$

$$4\text{m} = \frac{1}{7\text{kg} + m_4}\left(25\text{kgm} + 10\text{m}\cdot m_4\right)$$

Il ne reste qu'à isoler m_4.

$$
\begin{aligned}
4\text{m} &= \frac{1}{7kg + m_4}\left(25\text{kgm} + 10\text{m} \cdot m_4\right) \\
4\text{m} \cdot \left(7kg + m_4\right) &= 25\text{kgm} + 10\text{m} \cdot m_4 \\
28\text{kgm} + 4\text{m} \cdot m_4 &= 25\text{kgm} + 10\text{m} \cdot m_4 \\
3\text{kgm} &= 6\text{m} \cdot m_4 \\
m_4 &= 0{,}5\text{kg}
\end{aligned}
$$

4. La tige va de x = 0 à x = 3. On a donc

$$
\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\int_0^{3\text{m}} \lambda x\,dx \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{3\text{m}} \left(1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot x^2 + 1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}}\right) x\,dx \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{3\text{m}} \left(1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot x^3 + 1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot x\right) dx \\
&= \frac{1}{m}\left[\tfrac{1}{4}\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot x^4 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot x^2\right]_0^{3\text{m}} \\
&= \frac{1}{m}\left[\tfrac{1}{4}\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(3\text{m}\right)^4 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot \left(3\text{m}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{m} \cdot 24{,}75\text{kgm}
\end{aligned}
$$

Il faut trouver la masse de la tige. La masse est simplement la somme de toutes les masses dm. On la trouve donc avec

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^{3\text{m}} \lambda\,dx \\
&= \int_0^{3\text{m}} \left(1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot x^2 + 1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}}\right) dx \\
&= \left[\tfrac{1}{3}\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot x^3 + 1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot x\right]_0^{3\text{m}} \\
&= \left[\tfrac{1}{3}\tfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(3\text{m}\right)^3 + 1\tfrac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 3\text{m}\right] \\
&= 12kg
\end{aligned}
$$

Le centre de masse est donc a

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{24{,}75\text{kgm}}{m}\\&= \frac{24{,}75\text{kgm}}{12\text{kg}}\\&= 2{,}0625m\end{aligned}$$

5. On remplace chacune des tiges par une masse située au centre de la tige. On a donc les masses suivantes (on prend un axe des *x* dont l'origine est au bout de gauche de la poutre).

1) Une masse de 30 kg à x = 1 m.
2) Une masse de 20 kg à x = 3 m.
3) Une masse de 10 kg à x = 5 m.

Le centre de masse est donc à

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum xm\\&= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right)\\&= \frac{1}{60kg}\left(1m\cdot 30kg + 3m\cdot 20kg + 5m\cdot 10kg\right)\\&= \frac{140kgm}{60kg}\\&= 2{,}333m\end{aligned}$$

6. On remplace chacune des tiges par une masse située au centre de la tige. La masse de ces tiges est proportionnelle à la longueur de la tige. La longueur des tiges est

Tige 1 (tige horizontale) : $m_1 = \lambda\cdot 30$ cm .

Tige 2 (tige inclinée de gauche) : $m_2 = \lambda\cdot\sqrt{500}$ cm .

Tige 3 (tige inclinée de droite) : $m_3 = \lambda\cdot\sqrt{800}$ cm .

On a donc les masses suivantes.

1) La masse m_1 à (15 cm, 0 cm).
2) La masse m_2 à (5 cm, 10 cm).
3) La masse m_3 à (20 cm, 10 cm).

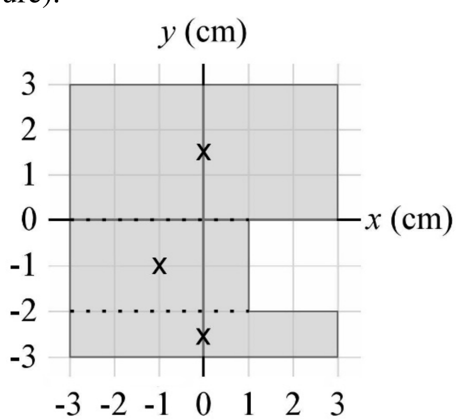
Le centre de masse en x est donc à

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum xm \\
&= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\
&= \frac{15cm\cdot(\lambda\cdot 30cm) + 5cm\cdot\left(\lambda\cdot\sqrt{500}cm\right) + 20cm\cdot\left(\lambda\cdot\sqrt{800}cm\right)}{\lambda\cdot 30cm + \lambda\cdot\sqrt{500}cm + \lambda\cdot\sqrt{800}cm} \\
&= \frac{15cm\cdot 30cm + 5cm\cdot\sqrt{500}cm + 20cm\cdot\sqrt{800}cm}{30cm + \sqrt{500}cm + \sqrt{800}cm} \\
&= 13,98cm
\end{aligned}$$

et le centre de masse en y est à

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{m}\sum ym \\
&= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\
&= \frac{0cm\cdot(\lambda\cdot 30cm) + 10cm\cdot\left(\lambda\cdot\sqrt{500}cm\right) + 10cm\cdot\left(\lambda\cdot\sqrt{800}cm\right)}{\lambda\cdot 30cm + \lambda\cdot\sqrt{500}cm + \lambda\cdot\sqrt{800}cm} \\
&= \frac{10cm\cdot\sqrt{500}cm + 10cm\cdot\sqrt{800}cm}{30cm + \sqrt{500}cm + \sqrt{800}cm} \\
&= 6,28cm
\end{aligned}$$

7. On sépare la plaque en trois plaques rectangulaires (notez qu'il y a plusieurs façons de la faire) et on remplace chacune de ces plaques par une masse située au centre de la plaque (les x sur la figure).



La masse de ces plaques est proportionnelle à la surface de la plaque. La surface des trois plaques est

Plaque 1 (celle du haut) : $m_1 = \sigma \cdot 18$ cm².
Plaque 2 (celle du milieu) : $m_2 = \sigma \cdot 8$ cm².
Plaque 3 (celle du bas) : $m_3 = \sigma \cdot 6$ cm².

On a donc les masses suivantes :

1) La masse m_1 à (0 cm, 1,5 cm).
2) La masse m_2 à (-1 cm, -1 cm).
3) La masse m_3 à (0 cm, -2,5 cm).

Le centre de masse en x est donc à

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum xm \\
&= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\
&= \frac{0cm \cdot \left(\sigma \cdot 18cm^2\right) + -1cm \cdot \left(\sigma \cdot 8cm^2\right) + 0cm \cdot \left(\sigma \cdot 6cm^2\right)}{\sigma \cdot 18cm^2 + \sigma \cdot 8cm^2 + \sigma \cdot 6cm^2} \\
&= \frac{-1cm \cdot 8cm^2}{18cm^2 + 8cm^2 + 6cm^2} \\
&= -0,25cm
\end{aligned}$$

et le centre de masse en y est à

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{m}\sum ym \\
&= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\
&= \frac{1,5cm \cdot \left(\sigma \cdot 18cm^2\right) + -1cm \cdot \left(\sigma \cdot 8cm^2\right) + -2,5cm \cdot \left(\sigma \cdot 6cm^2\right)}{\sigma \cdot 18cm^2 + \sigma \cdot 8cm^2 + \sigma \cdot 6cm^2} \\
&= \frac{1,5cm \cdot 18cm^2 + -1cm \cdot 8cm^2 + -2,5cm \cdot 6cm^2}{18cm^2 + 8cm^2 + 6cm^2} \\
&= 0,125cm
\end{aligned}$$

8. On sépare la plaque en deux plaques. Il y a une plaque carrée et une plaque triangulaire. On remplace ensuite chacune de ces plaques par une masse située au centre de la plaque.

La plaque triangulaire a une hauteur de 0,2 m tan(60°) = $\frac{\sqrt{3}}{5}$ m = 0,34641 m.

La masse de ces plaques est proportionnelle à la surface de la plaque. Les surfaces des plaques sont

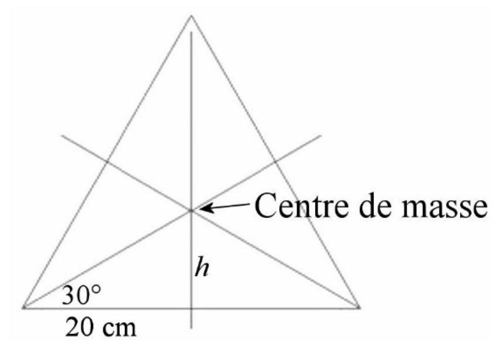
Plaque 1 (carré) : $m_1 = \sigma \cdot aire = 60\frac{kg}{m^2} \cdot (0,4m \cdot 0,4m) = 9,6kg$

Plaque 1 (triangle) : $m_2 = \sigma \cdot aire = 60\frac{kg}{m^2} \cdot \frac{1}{2}\left(0,4m \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}m\right) = 4,157kg$

On va prendre un système d'axe dont l'origine est dans le coin inférieur gauche de la plaque carrée.

Inutile de faire de longs calculs pour trouver la position du centre de masse en x puisqu'il y a un axe de symétrie vertical à x = 20 cm. Le centre de masse en x doit donc être à x = 20 cm. Il faudra cependant faire un peu plus de calcul pour la position du centre de masse en y.

On remplace le triangle par une masse se situant au croisement des axes de symétrie du triangle.



La hauteur de ce centre de masse par rapport à la base de triangle est

$$h = 20cm \cdot \tan(30°) = 11,547cm$$

(ce qui est le tiers de la hauteur du triangle).

Une fois que les plaques sont remplacées par des masses ponctuelles, on a les masses suivantes.

1) Une masse de 9,6 kg à (20 cm, 20 cm).
2) Une masse de 4,157 kg à (20 cm, 51,547 cm).

Le centre de masse en y est donc à

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{m}\sum ym \\ &= \frac{1}{m}(y_1m_1 + y_2m_2) \\ &= \frac{20cm \cdot 9,6kg + 51,547cm \cdot 4,157kg}{9,6kg + 4,157kg} \\ &= 29,53cm \end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à (20 cm, 29,53 cm) avec nos axes.

9. On va utiliser un système d'axe dont l'origine est au centre de la plaque rectangulaire.

On va imaginer qu'on a une plaque rectangulaire sans trou formée de deux plaques.

1) Une plaque rectangulaire avec un trou.
2) Une plaque circulaire qui viendrait boucher le trou.

La formule suivante donne alors la position en x du centre de masse de cette plaque sans trou.

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i$$
$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}}{m_{\text{plaque sans trou}}}$$

De toute évidence, la position de centre de masse de la plaque sans trou est au centre de la plaque, donc à $x_{cm} = 0$, et il nous reste

$$0 = \frac{m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}}{m_{\text{plaque sans trou}}}$$
$$0 = m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}$$

On peut alors isoler la position du centre de masse de la plaque avec un trou.

$$0 = m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}$$
$$x_{1cm} = \frac{-m_2 \cdot x_{2cm}}{m_1}$$

Le centre de masse de la plaque qui boucherait le trou est au centre de cette plaque, donc à

$$x_{2cm} = 2cm$$
$$y_{2cm} = 1cm$$

On trouve les masses en multipliant la densité surfacique par l'aire de la plaque. On a donc

$$m_2 = \sigma \cdot \pi (2cm)^2$$
$$m_1 = \sigma \cdot \left[14cm \cdot 10cm - \pi (2cm)^2 \right]$$

On a donc

$$\begin{aligned} x_{1cm} &= \frac{-m_2 \cdot x_{2cm}}{m_1} \\ &= \frac{-\sigma \cdot \pi (2cm)^2 \cdot 2cm}{\sigma \cdot \left[14cm \cdot 10cm - \pi (2cm)^2 \right]} \\ &= \frac{-\pi (2cm)^2 \cdot 2cm}{14cm \cdot 10cm - \pi (2cm)^2} \\ &= -0,19722cm \end{aligned}$$

En procédant de la même façon en y, on arrive a

$$\begin{aligned} y_{1cm} &= \frac{-m_2 \cdot y_{2cm}}{m_1} \\ &= \frac{-\sigma \cdot \pi (2cm)^2 \cdot 1cm}{\sigma \cdot \left[14cm \cdot 10cm - \pi (2cm)^2 \right]} \\ &= \frac{-\pi (2cm)^2 \cdot 1cm}{14cm \cdot 10cm - \pi (2cm)^2} \\ &= -0,0986cm \end{aligned}$$

10. a)

Au départ, les deux astronautes sont arrêtés et la quantité de mouvement totale du système formé des deux astronautes et de la corde est nulle.

$$p_{x\,tot} = 0$$

Si Buzz a une vitesse de 3 m/s, alors la quantité de mouvement du système devient, si on néglige la masse de la corde,

$$\begin{aligned} p'_{x\,tot} &= m_{Buzz} v'_{Buzz} + m_{corde} v'_{corde} + m_{Alan} v'_{Alan} \\ &= 120kg \cdot 3\tfrac{m}{s} + 0kg \cdot v'_{corde} + 80kg \cdot v'_{Alan} \\ &= 360\tfrac{kgm}{s} + 80kg \cdot v'_{Alan} \end{aligned}$$

Puisque les forces entre les astronautes et la corde sont des forces internes, la quantité de mouvement est conservée.

$$p_{x\,tot} = p'_{x\,tot}$$
$$0\tfrac{kgm}{s} = 360\tfrac{kgm}{s} + 80kg \cdot v'_{Alan}$$
$$v'_{Alan} = -4,5\tfrac{m}{s}$$

b) Quand il n'y a que des forces internes, le centre de masse reste à la même place. Avec un axe des x dont l'origine est à la position initiale de Buzz, la position du centre de masse est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum xm \\ &= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2\right) \\ &= \frac{1}{200kg}\cdot\left(0m\cdot 120kg + 10m\cdot 80kg\right) \\ &= 4m \end{aligned}$$

Une seconde après son départ, Buzz sera maintenant à x = 3 m, mais le centre de masse sera toujours à la même place. On a donc

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum xm$$
$$x_{cm} = \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2\right)$$
$$4m = \frac{1}{200kg}\cdot\left(3m\cdot 120kg + x_2\cdot 80kg\right)$$
$$x_2 = 5,5m$$

Buzz étant à x = 3 m et Allan étant à x = 5,5 m, la distance entre les deux est 2,5 m.

c) Le centre de masse demeurant toujours à la même place ici, les deux astronautes vont donc se rencontrer au centre de masse. Buzz va donc parcourir 4 m à la vitesse de 3 m/s. Il va donc arriver au centre de masse au bout de 1,333 s.

(On peut aussi le faire avec Alan. Ce dernier va parcourir 6 m à la vitesse de 4,5 m/s, ce qui lui prendra aussi 1,333 s.)

11. a)

On va considérer que le système est formé du train (avec le canon) et du boulet. Le train sera noté avec un indice 1 et le boulet avec un indice 2. La position du centre de masse de ce système est

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\left(x_{1\,cm}m_1 + x_2 m_2\right)$$

On ne sait pas exactement où se trouve le centre de masse du train (x_{1cm} dans l'équation), mais ce n'est pas bien grave.

Quand le boulet va partir et aller à l'autre bout du wagon, le centre de masse va rester à la même place. Le train se sera déplacé de *d* vers la gauche et le boulet sera à 20 m - *d* de son point de départ. (Il ne faut pas oublier que le bout du train s'est déplacé vers la gauche et que le boulet a frappé le mur avant de faire 20 m). On aura alors

$$x'_{cm} = \frac{1}{m}\left(\left(x_{1\,cm} - d\right)m_1 + \left(x_2 + 20m - d\right)m_2\right)$$

Puisque le centre de masse est resté à la même place, on a

$$\begin{gathered}
x_{cm} = x'_{cm} \\
\frac{1}{m}\left(x_{1\,cm}m_1 + x_2 m_2\right) = \frac{1}{m}\left(\left(x_{1\,cm} - d\right)m_1 + \left(x_2 + 20m - d\right)m_2\right) \\
x_{1\,cm}m_1 + x_2 m_2 = \left(x_{1\,cm} - d\right)m_1 + \left(x_2 + 20m - d\right)m_2 \\
x_{1\,cm}m_1 + x_2 m_2 = x_{1\,cm}m_1 - d\cdot m_1 + x_2 m_2 + 20\text{m}\cdot m_2 - d\cdot m_2 \\
0 = -d\cdot m_1 + 20\text{m}\cdot m_2 - d\cdot m_2 \\
d\cdot m_1 + d\cdot m_2 = 20\text{m}\cdot m_2 \\
d = \frac{20\text{m}\cdot m_2}{m_1 + m_2} \\
d = \frac{20\text{m}\cdot 10kg}{12\,000kg + 10kg} \\
d = 0{,}01665m \\
d = 1{,}665cm
\end{gathered}$$

b) Initialement, la quantité de mouvement totale est nulle.

$$p_{x\,tot} = 0$$

Après le départ du boulet, on a

$$p'_{x\,tot} = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2$$
$$p'_{x\,tot} = 12\,000kg \cdot v' + 10kg \cdot 500\tfrac{m}{s}$$
$$p'_{x\,tot} = 12\,000kg \cdot v' + 5000\tfrac{kgm}{s}$$

Puisque les forces sont des forces internes, la quantité de mouvement est conservée.

$$p_{x\,tot} = p'_{x\,tot}$$
$$0\tfrac{kgm}{s} = 12\,000kg \cdot v'_1 + 5000\tfrac{kgm}{s}$$
$$v'_1 = -0,4167\tfrac{m}{s}$$

c) Comme les forces internes ne changent pas la vitesse du centre de masse et que le centre de masse était immobile au départ, alors la vitesse du centre de masse reste nulle.

12. On va considérer que le système est formé de la chaloupe et de Sébastien. La chaloupe sera notée avec un indice 1 et Sébastien avec un indice 2. La position du centre de masse de ce système est

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\left(x_{1\,cm}m_1 + x_2 m_2\right)$$

On ne sait pas exactement où se trouve le centre de masse de la chaloupe (x_{1cm} dans l'équation), mais ce n'est pas bien grave.

Quand Sébastien va aller à l'autre bout de la chaloupe, le centre de masse va rester à la même place. La chaloupe se sera déplacé 40 cm vers la droite et Sébastien sera à 3 m - 0,40 m = 2,60 m de son point de départ. On aura alors

$$x'_{cm} = \frac{1}{m}\left(\left(x_{1\,cm} + 0,4\text{m}\right)\cdot m_1 + \left(x_2 - 2,6\text{m}\right)\cdot m_2\right)$$

Puisque le centre de masse est resté à la même place, on a

$$x_{cm} = x'_{cm}$$
$$\frac{1}{m}\left(x_{1\,cm}m_1 + x_2m_2\right) = \frac{1}{m}\left(\left(x_{1\,cm} + 0,4\text{m}\right)\cdot m_1 + \left(x_2 - 2,6\text{m}\right)\cdot m_2\right)$$
$$x_{1\,cm}m_1 + x_2m_2 = \left(x_{1\,cm} + 0,4\text{m}\right)\cdot m_1 + \left(x_2 - 2,6\text{m}\right)\cdot m_2$$
$$x_{1\,cm}m_1 + x_2m_2 = x_{1\,cm}m_1 + 0,4\text{m}\cdot m_1 + x_2m_2 - 2,6\text{m}\cdot m_2$$
$$0 = 0,4\text{m}\cdot m_1 - 2,6\text{m}\cdot m_2$$
$$0 = 0,4\text{m}\cdot m_1 - 2,6\text{m}\cdot 60\text{kg}$$
$$m_1 = 390kg$$

13. a) La composante en x de la vitesse du centre de masse est

$$\begin{aligned} v_{cm\,x} &= \frac{1}{m}\sum m_i v_{xi} \\ &= \frac{1}{2500kg}\cdot\left(1200kg\cdot 25\tfrac{m}{s} + 1300kg\cdot 0\tfrac{m}{s}\right) \\ &= 12\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La composante en y de la vitesse du centre de masse est

$$\begin{aligned} v_{cm\,y} &= \frac{1}{m}\sum m_i v_{yi} \\ &= \frac{1}{2500kg}\cdot\left(1200kg\cdot 0\tfrac{m}{s} + 1300kg\cdot 15\tfrac{m}{s}\right) \\ &= 7,8\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse du centre de masse est donc

$$\vec{v}_{cm} = \left(12\vec{i} + 7,8\vec{j}\right)\tfrac{m}{s}$$

b) Comme il n'y a que des forces internes lors d'une collision et que les forces internes ne peuvent pas changer la vitesse du centre de masse, la vitesse du centre de masse reste la même après la collision. On a donc

$$\vec{v}_{cm} = \left(12\vec{i} + 7,8\vec{j}\right)\tfrac{m}{s}$$

c) Comme il n'y a que des forces internes lors d'une collision et que les forces internes ne peuvent pas changer la vitesse du centre de masse, la vitesse du centre de masse reste la même après la collision. On a donc

$$\vec{v}_{cm} = \left(12\vec{i} + 7,8\vec{j}\right)\tfrac{m}{s}$$

14. On va utiliser un système d'axe où le $x = 0$ et le $y = 0$ sont situés au point de départ de la fusée, au sol.

Malgré l'explosion, le centre de masse de la fusée continuera son mouvement exactement comme s'il n'y avait pas eu d'explosion. Le centre de masse va donc monter et redescendre pour retomber exactement au point de départ de la fusée. Trouvons la position du centre de masse en trouvant où serait la fusée 6 secondes après l'arrêt de moteur et qu'il n'y avait pas eu d'explosion.

Comme la fusée aurait fait un mouvement purement vertical, elle serait toujours restée à $x = 0$ m. On a donc $x_{cm} = 0$.

Pour la hauteur, on a un objet en chute libre qui a démarré son mouvement à $y_0 = 60$ m avec une vitesse de $v_{y0} = 25$ m/s. Au bout de 6 secondes, la position du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} y_{cm} &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 60m + 25\tfrac{m}{s}\cdot 6s - \frac{1}{2}\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot(6s)^2 \\ &= 33,6m \end{aligned}$$

Puisque la position en x du centre masse est 0, la position du morceau de 1,2 kg est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2} \\ 0m &= \frac{(-90m)\cdot 0,5kg + x_2\cdot 1,2kg}{0,5kg + 1,2kg} \\ x_2 &= 37,5m \end{aligned}$$

Puisque la position en y du centre de masse est 33,6 m, la position du morceau de 1,2 kg est

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1 + m_2} \\ 33,6m &= \frac{(0m)\cdot 0,5kg + y_2\cdot 1,2kg}{0,5kg + 1,2kg} \\ y_2 &= 47,6m \end{aligned}$$

Le deuxième morceau est donc à 37,5 m à l'est du point de départ et est à une altitude de 47,6 m.

15. a) On a

$$\begin{aligned} v_{cm\,x} &= \frac{1}{m}\sum m_i v_{xi} \\ &= \frac{1}{1,2kg}\cdot\left(0,2kg\cdot 20\tfrac{m}{s} + 1kg\cdot 5\tfrac{m}{s}\right) \\ &= 7,5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) L'énergie cinétique du centre de masse est

$$\begin{aligned} E_{k\,cm} &= \frac{1}{2}mv_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1,2kg\cdot\left(7,5\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 33,75J \end{aligned}$$

c) La vitesse de la balle de 200 g relative au centre de masse est

$$20\tfrac{m}{s} - 7,5\tfrac{m}{s} = 12,5\tfrac{m}{s}$$

La vitesse de la balle de 1000 g relative au centre de masse est

$$5\tfrac{m}{s} - 7,5\tfrac{m}{s} = -2,5\tfrac{m}{s}$$

L'énergie cinétique relative au centre de masse est donc

$$\begin{aligned} E_{k\,rel} &= \frac{1}{2}\cdot 0,2kg\cdot\left(12,5\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1kg\cdot\left(-2,5\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 18,75J \end{aligned}$$

d) Comme la vitesse du centre de masse ne change pas lors d'une collision et que les deux objets restent collés, les deux objets ont la même vitesse que le centre de masse. On a donc

$$v_x' = 7,5\tfrac{m}{s}$$

e) Comme la collision n'a pas changé la vitesse du centre de masse, l'énergie cinétique du centre de masse reste la même que ce qu'elle était avant la collision

$$E_{k\,cm} = 33,75J$$

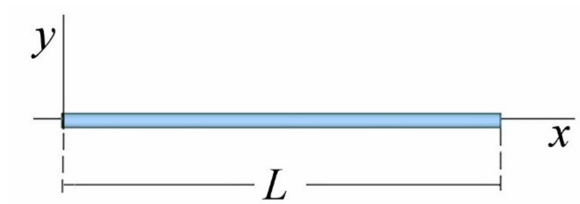
f) Comme les deux objets ont la même vitesse que le centre de masse, les vitesses relatives deviennent nulles et l'énergie cinétique relative au centre de masse devient nulle. (C'est d'ailleurs le cas avec toutes les collisions parfaitement inélastiques.)

16. La position en x du centre de masse est donnée par

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int \lambda x\,dx$$

Avec le système de coordonnées sur la figure, la tige va de $x = 0$ à $x = L$. Ainsi, l'intégrale est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{m}\int_0^L \lambda x\,dx \\ &= \frac{1}{m}\int_0^L \left(kx^n\right) x\,dx \\ &= \frac{k}{m}\int_0^L x^{n+1}\,dx \\ &= \frac{k}{m}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^L \\ &= \frac{kL^{n+2}}{m\left(n+2\right)} \end{aligned}$$



Il faut trouver la masse de la tige. La masse est simplement la somme de toutes les masses dm. On la trouve donc avec

$$\begin{aligned} m &= \int_0^L \lambda \, dx \\ &= \int_0^L kx^n dx \\ &= k\int_0^L x^n dx \\ &= k\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^L \\ &= \frac{kL^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

La position du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{m}\frac{kL^{n+2}}{(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{kL^{n+1}}\frac{kL^{n+2}}{(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}L \end{aligned}$$

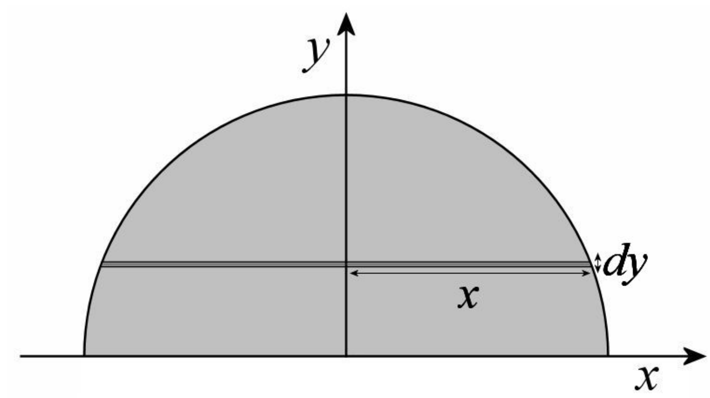
Si on veut que le centre de masse soit à $x = 0,9\ L$, on a

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2}L &= 0,9L \\ \frac{n+1}{n+2} &= 0,9 \\ n+1 &= 0,9\cdot(n+2) \\ n+1 &= 0,9\cdot n+1,8 \\ 0,1\cdot n &= 0,8 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

17. La position en y du centre de masse est donnée par

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int y\, dm$$

On va séparer la plaque en petites tranches horizontales, comme illustré sur la figure.



L'aire de cette tranche est $2xdy$. Ainsi, la masse de cette tranche est

$$dm = \sigma 2xdy$$

Pour un cercle de rayon a, on a

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Cela veut dire que x est

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}$$

La masse de la petite tranche devient donc

$$dm = \sigma 2\sqrt{a^2 - y^2}dy$$

Ainsi, la position du centre de masse se trouve avec

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{m}\int y\,dm \\ &= \frac{1}{m}\int y\,\sigma 2\sqrt{a^2 - y^2}dy \end{aligned}$$

Comme on somme ces tranches de $y = 0$ à $y = a$, on a

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{m}\int_0^a 2y\sqrt{a^2 - y^2}dy$$

Cette intégrale est

$$y_{cm} = \frac{\sigma}{m}\left[\frac{-\left(a^2 - y^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{\sigma}{m}\left[\frac{-\left(a^2 - a^2\right)^{3/2}}{3/2} - \frac{-\left(a^2 - 0^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]$$

$$= \frac{\sigma}{m}\frac{a^3}{3/2}$$

$$= \frac{2\sigma a^3}{3m}$$

La masse de la plaque est

$$m = \sigma \cdot aire$$

$$= \sigma \cdot \frac{1}{2}\pi a^2$$

La position en y du centre de masse est donc

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\frac{2\sigma a^3}{3}$$

$$= \frac{2}{\sigma\pi a^2}\frac{2\sigma a^3}{3}$$

$$= \frac{4a}{3\pi}$$