11 LE CENTRE DE MASSE

Une personne de 60 kg est à 60 cm de l'extrémité gauche d'un canoë de 5 m de long et ayant une masse de 90 kg. Elle se déplace ensuite pour aller s'asseoir à 60 cm de l'extrémité droite du canoë. De combien s'est déplacé le canoë s'il n'y a pas de friction entre le canoë et l'eau ?

www.alternativesjournal.ca/people-and-profiles/web-exclusive-ela-alumni-make-splash

Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

Jusqu'ici, nous n'avons pas considéré la taille des objets. Ça ne paraissait pas toujours, mais on considérait que les objets étaient ponctuels. Bien sûr, on plaçait les forces aux bons points d'application sur l'objet, mais cela n'avait aucune influence sur nos équations des forces. Nous allons maintenant commencer à considérer la taille des objets puisque cela aura une influence au chapitre suivant.

On pourra ensuite montrer que, même si on tient compte de la grosseur des objets, tout ce qu'on a fait dans les chapitres précédents est valide. On décrivait simplement le mouvement du centre de masse de l'objet.

11.1 LA POSITION DU CENTRE DE MASSE

Centre de masse d'un système fait de particules

La position du centre de masse est

Centre de masse d'un système composé de particules

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\sum \vec{r}_i m_i$$

En composantes :

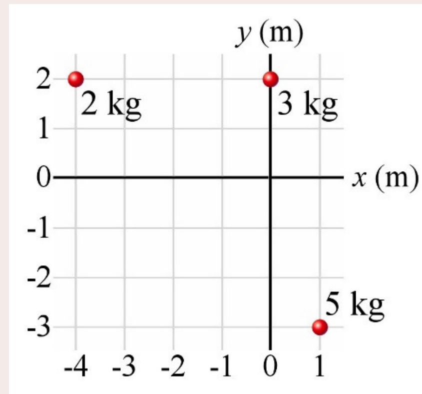
$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{m}\sum y_i m_i \qquad z_{cm} = \frac{1}{m}\sum z_i m_i$$

Dans ces formules, m est la masse totale du système et $\sum x_i m_i$ est la somme de la position en x multipliée par la masse de chaque particule. Les petits i sont là pour identifier les masses puisqu'on va donner un numéro à chaque masse du système.

Ces formules semblent sortir de nulle part, mais ce n'est pas le cas. Plus tard, on va montrer qu'elles donnent la position du point dans l'objet dont le mouvement est décrit par les lois de Newton.

Le centre de masse est un concept utilisé depuis très longtemps. Déjà, Archimède l'utilisait au 3^e siècle av. J.-C.

Exemple 11.1.1



Où est le centre de masse de ces trois particules ?

La position de centre de masse en x est

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum xm \\
&= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\
&= \frac{1}{10kg}\left(\left(-4m\right)\cdot 2kg + 0m\cdot 3kg + 1m\cdot 5kg\right) \\
&= \frac{-3kg\ m}{10kg} \\
&= -0,3m
\end{aligned}$$

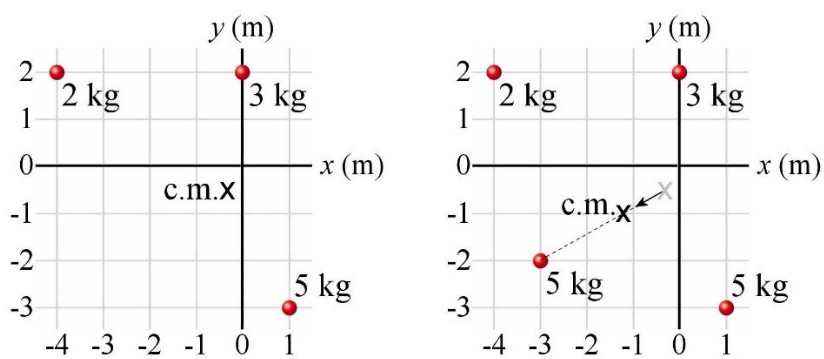
La position de centre de masse en y est

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{m}\sum ym \\
&= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\
&= \frac{1}{10kg}\left(2m\cdot 2kg + 2m\cdot 3kg + \left(-3m\right)\cdot 5kg\right) \\
&= \frac{-5kg\ m}{10kg} \\
&= -0,5m
\end{aligned}$$

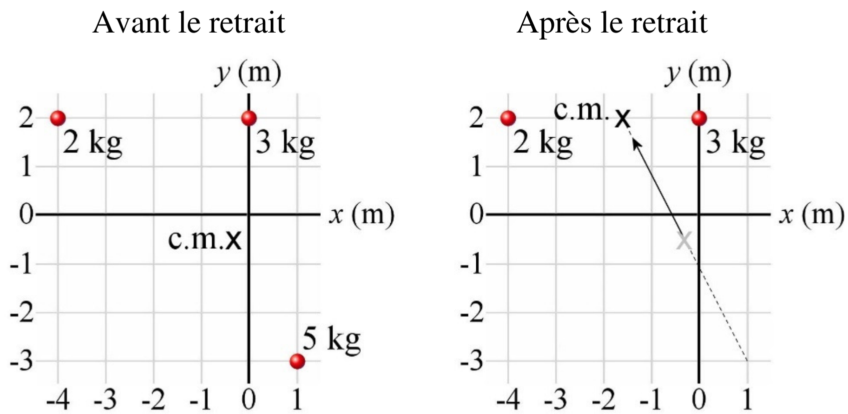
Le centre de masse est donc à la position (-0,3 m, -0,5 m).

Notez que si on ajoute de la masse dans un système, le centre de masse se déplace vers la masse ajoutée.

Avant l'ajout Après l'ajout



Si on enlève de la masse dans un système, le centre de masse se déplace dans la direction opposée à la masse enlevée.



Centre de masse d'un objet

Pour trouver le centre de masse d'un objet, on utilise les mêmes formules. Pour y arriver, on prend l'objet et on le sépare en particules minuscules. On applique ensuite les formules de la position du centre de masse d'un système de particules avec toutes ces particules.

Toutefois, si on prend des morceaux infinitésimaux, les sommes sont des intégrales

$$\lim_{m\to 0}\sum x_i m_i = \int x\,dm$$

$$\lim_{m\to 0}\sum y_i m_i = \int y\,dm$$

$$\lim_{m\to 0}\sum z_i m_i = \int z\,dm$$

Les équations de la position de centre de masse deviennent alors

Centre de masse d'un objet

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int x\,dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{m}\int y\,dm \qquad z_{cm} = \frac{1}{m}\int z\,dm$$

Dans l'application de ces formules, trois quantités sont souvent utilisées selon la forme de l'objet. Ce sont :

a) La masse linéique (λ)

Utilisée pour des objets en 1 dimension (tiges ou fil), elle nous indique la masse par unité de longueur. Elle est donc en *kg/m*. On peut la calculer avec

$$\lambda = \frac{masse}{longueur}$$

b) La masse surfacique (σ)

Utilisée pour des objets en 2 dimensions (plaques), elle nous indique la masse par unité de surface. Elle est donc en *kg/m²*. On peut la calculer avec

$$\sigma = \frac{masse}{aire}$$

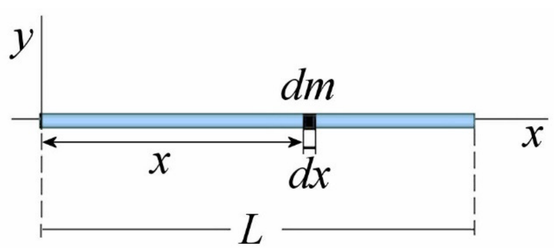
c) La masse volumique (ρ)

Utilisée pour des objets en trois dimensions, elle nous indique la masse par unité de volume. Elle est donc en *kg/m³*. On peut la calculer avec

$$\rho = \frac{masse}{volume}$$

Généralement, le calcul de la position du centre de masse est très complexe. Dans le pire des cas, il faut faire deux intégrales doubles pour un objet en deux dimensions et il faut faire trois intégrales triples pour un objet en trois dimensions. Comme vous n'avez jamais fait d'intégrales doubles ou triples (ceux qui feront le cours de *calcul avancé* verront ces concepts), on ne fera pas ce genre de calcul. Vous pouvez cependant comprendre comment faire le calcul en une dimension, c'est-à-dire pour une tige.

Pour y arriver, on sépare la tige en petits morceaux de longueur infinitésimale. Chaque morceau a donc une longueur *dx* et une masse *dm*.



La masse linéique de ce morceau est

$$\lambda = \frac{masse}{longueur} = \frac{dm}{dx}$$

La masse du morceau est donc

$$dm = \lambda\, dx$$

Ainsi, la formule de la position de centre de masse

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int x\, dm$$

devient

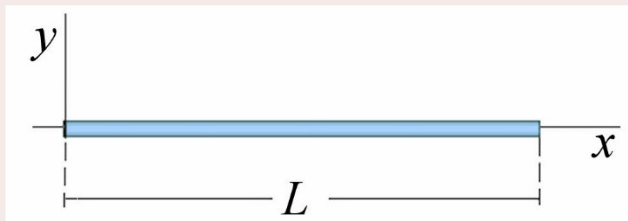
Centre de masse d'une tige

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int \lambda x \, dx$$

Il ne reste qu'à mettre la masse linéique dans la formule. Elle pourrait être constante ou pourrait varier en fonction de la position.

Exemple 11.1.2

Où est le centre de masse d'une tige de masse linéique constante ?



Avec le système de coordonnées sur la figure, la tige va de $x = 0$ à $x = L$. Avec une densité constante on a donc

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{m}\int_0^L \lambda x \, dx \\ &= \frac{\lambda}{m}\int_0^L x \, dx \\ &= \frac{\lambda}{m}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L \\ &= \frac{\lambda L^2}{2m} \end{aligned}$$

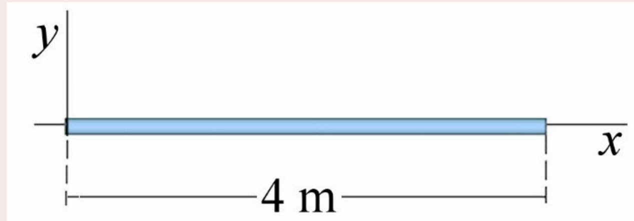
Or, la masse de la tige est $m = \lambda L$. On a donc

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{\lambda L^2}{2m} \\ &= \frac{\lambda L^2}{2\lambda L} \\ &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Ce qui nous indique que le centre de masse de la tige est au milieu de la tige.

Exemple 11.1.3

Où est le centre de masse d'une tige de 4 m de long dont la masse linéique est donnée par la formule $\lambda = 3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2} \cdot x + 6\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ si l'axe des x est comme celui montré sur la figure ?



La tige va de x = 0 à x = 4 m. On a donc

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\int_0^{4\,\mathrm{m}} \lambda x\,dx \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{4\,\mathrm{m}} \left(3\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\cdot x + 6\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right) x\,dx \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{4\,\mathrm{m}} \left(3\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\cdot x^2 + 6\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\cdot x\right) dx \\
&= \frac{1}{m}\left[1\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\cdot x^3 + 3\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\cdot x^2\right]_0^{4\,\mathrm{m}} \\
&= \frac{1}{m}\left[1\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\cdot (4\,\mathrm{m})^3 + 3\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\cdot (4\,\mathrm{m})^2\right] \\
&= \frac{112\,\mathrm{kgm}}{m}
\end{aligned}$$

Il faut trouver la masse de la tige. On ne peut pas trouver la masse de la tige en faisant simplement $m = \lambda L$ quand la densité linéique n'est pas constante. Quand la masse linéique n'est pas une constante, on trouve la masse en faisant la somme de toutes les masses dm. La masse est donc

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^{4\,\mathrm{m}} \lambda\,dx \\
&= \int_0^{4\,\mathrm{m}} \left(3\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\cdot x + 6\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right) dx \\
&= \left[3\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\cdot \frac{x^2}{2} + 6\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\cdot x\right]_0^{4\,\mathrm{m}} \\
&= \left[3\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\cdot \frac{(4\,\mathrm{m})^2}{2} + 6\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\cdot 4\,\mathrm{m}\right] \\
&= 48\,\mathrm{kg}
\end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{112\text{ kgm}}{m} \\ &= \frac{112\text{ kgm}}{48\text{ kg}} \\ &= 2{,}333\text{m} \end{aligned}$$

On voit que maintenant, le centre de masse n’est pas au centre de la tige (qui est à $x = 2$ m), mais est un peu plus vers le côté droit de la tige. Ça semble normal parce que la tige est de plus en plus dense vers la droite. Le côté droit de la tige est donc plus massif que le côté gauche et il est donc normal que le centre de masse soit un peu plus vers la droite par rapport à ce qu’on avait avec la tige uniforme.

Utilisation des symétries pour trouver le centre de masse d’un objet

On remarque qu’avec la tige uniforme, on a trouvé que le centre de masse de la tige est au centre de la tige. On se doutait bien que le centre de masse devait être au centre, car la tige est symétrique et que cela briserait la symétrie si le centre de masse n’était pas au centre. Comme les deux côtés de la tige sont identiques, on ne voit pas pourquoi le centre de masse serait plus d’un côté que de l’autre.

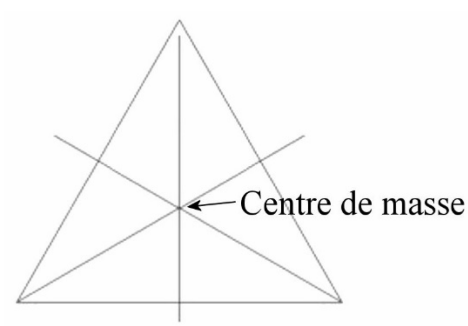
En fait, le centre de masse doit être sur l’axe de symétrie, si l’objet a un axe de symétrie. S’il y a plusieurs axes, le centre de masse est au croisement des axes de symétrie. Sachez qu’il est impossible que les axes de symétrie ne se croisent pas tous au même endroit.

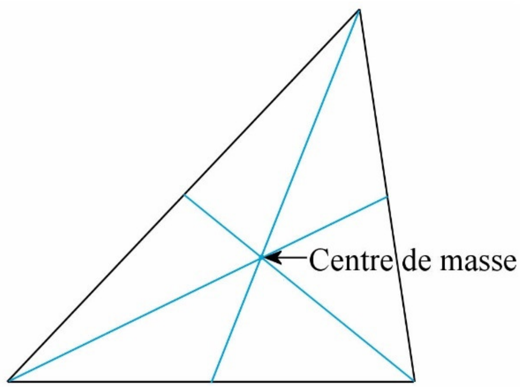
Centre de masse et axe de symétrie

Si l’objet possède un axe de symétrie, le centre de masse doit être sur cet axe. S’il y a plusieurs axes de symétrie, le centre de masse est au croisement des axes de symétrie.

Il n’y a pas que la forme de l’objet qui doit être symétrique, la densité de l’objet doit l’être aussi. C’était le cas avec notre tige de densité variable. L’objet était symétrique, mais sa densité était plus grande à gauche qu’à droite, ce qui brisait la symétrie.

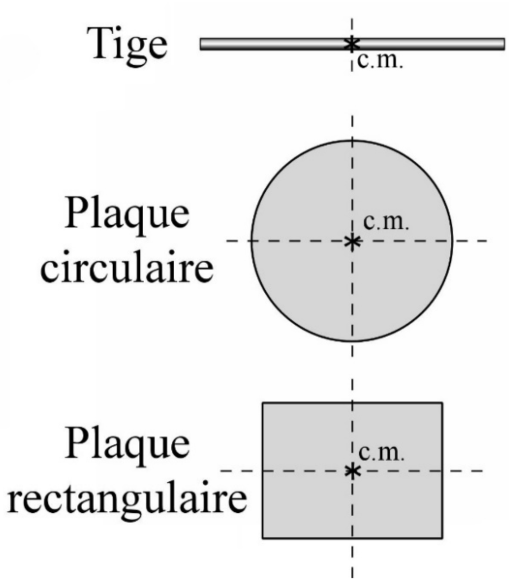
Cette simple utilisation de la symétrie nous permet donc de trouver le centre de masse d’objets simples sans devoir faire de longs calculs pour le trouver. Prenons une plaque triangulaire par exemple. Il y a trois axes de symétrie sur cette plaque en forme de triangle équilatéral. Le centre de masse est au croisement de ces axes.





(Petite note mathématique en passant : le centre de masse d'une plaque triangulaire peut aussi se trouver en cherchant le point de croisement des médianes du triangle. Cette méthode est encore plus générale, car on peut trouver le centre de masse même si le triangle n'est pas symétrique. Pour ceux qui ne savent pas ce qu'est une médiane, c'est une ligne qui va d'un sommet jusqu'au milieu du côté opposé.)

En utilisant ce truc, on peut donc trouver le centre de masse de plusieurs objets. On va se contenter ici de tiges ou de plaques, mais on pourrait appliquer cette idée pour des objets en trois dimensions. (Le centre de masse d'un objet en trois dimensions se trouve au croisement des plans de symétrie.)

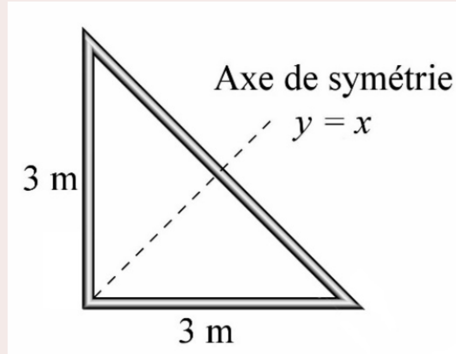


Les principes donnés plus tôt restent valides : si on ajoute de la masse, le centre de masse se déplace vers la masse ajoutée et si on enlève de la masse, le centre de masse se déplace dans la direction opposée à la masse enlevée.

Si vous avez affaire à un objet qui n'est pas symétrique, mais qui est composé d'objets symétriques, vous pouvez trouver son centre de masse en utilisant le truc suivant :

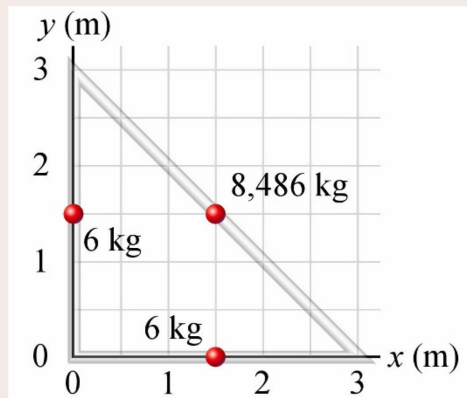
> Si un objet est composé d'éléments plus petits dont vous connaissez la position du centre de masse, remplacez chaque élément par une masse ponctuelle située au centre de masse de l'élément. Appliquer ensuite les formules pour trouver le centre de masse d'un système formé de masse ponctuelle pour trouver le centre de masse.

Exemple 11.1.4



Où est le centre de masse de cet assemblage de 3 tiges ? La masse linéique de toutes les tiges est de 2 kg/m.

On remarque premièrement qu'il y a un axe de symétrie à 45°. Cet axe a pour équation $y = x$. Il ne sera donc pas nécessaire de faire les calculs de la position du centre de masse pour les deux coordonnées. Quand on aura trouvé la position en x du centre de masse, on aura automatiquement celle en y, car les deux doivent être égales.



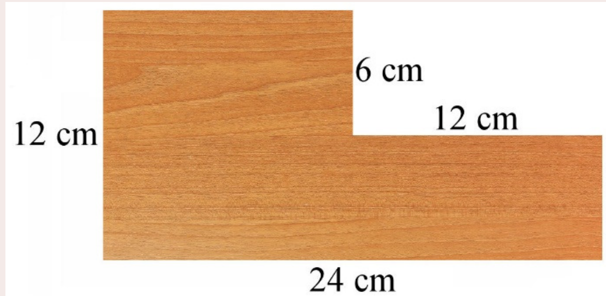
Comme on sait que le centre de masse d'une tige uniforme est au milieu de la tige, nous allons remplacer chaque tige par une masse ponctuelle située au milieu de la tige. La masse des tiges de 3 m est de 2 kg/m · 3 m = 6 kg alors que celle de la tige qui forme l'hypoténuse est de 2 kg/m · 4,243 m = 8,486 kg. On a alors la situation illustrée sur la figure de droite.

Vous vous demandez peut-être comment on a trouvé le centre de la tige à 45°. En fait, c'est assez facile. En x, un des bouts de la tige est à $x = 0$ et l'autre bout est à $x = 3$ m. Le milieu est donc à $x = 1{,}5$ m. En y, un des bouts de la tige est à $y = 0$ et l'autre bout est à $y = 3$ m. Le milieu est donc à $y = 1{,}5$ m. On applique ensuite la formule du centre de masse pour trouver sa position.

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum x_i m_i \\
&= \frac{1}{20{,}486kg}\left(0m \cdot 6kg + 1{,}5m \cdot 6kg + 1{,}5m \cdot 8{,}486kg\right) \\
&= \frac{21{,}729kg\ m}{20{,}486kg} \\
&= 1{,}0607m
\end{aligned}$$

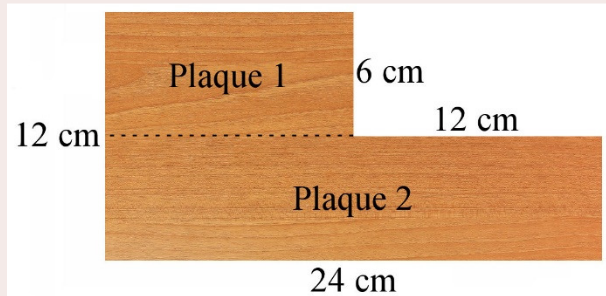
Le centre de masse est donc à la position (1,0607 m, 1,0607 m).

Exemple 11.1.5



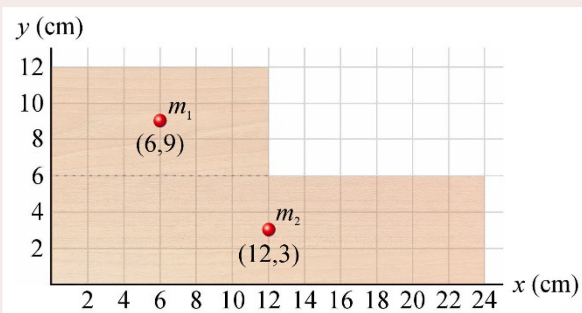
Où est le centre de masse de cette plaque de bois si la masse surfacique est constante ?

Ici, il n'y a aucun axe de symétrie. On devra donc calculer la position du centre de masse en *x* et en *y*. Pour y arriver, on sépare la plaque en deux plaques rectangulaires.



Comme on sait que le centre de masse d'une plaque uniforme est au milieu de la plaque, nous allons remplacer chaque plaque par une masse ponctuelle située au milieu de la plaque. On n'a pas la valeur de la masse surfacique, mais vous allez voir que cela n'a pas d'importance. La masse des plaques est

$$m_1 = \sigma \cdot aire = \sigma \cdot 72cm^2$$
$$m_2 = \sigma \cdot aire = \sigma \cdot 144cm^2$$



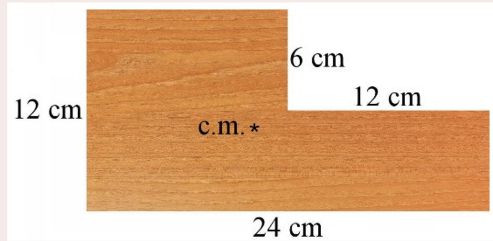
On a donc la situation montrée sur la figure.

On utilise ensuite la formule de la position de centre de masse.

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum x_i m_i \\ &= \frac{6cm \cdot \sigma \cdot 72cm^2 + 12cm \cdot \sigma \cdot 144cm^2}{\sigma \cdot 72cm^2 + \sigma \cdot 144cm^2} \\ &= \frac{\cancel{\sigma} \cdot 2160cm^3}{\cancel{\sigma} \cdot 216cm^2} \\ &= 10cm \end{aligned}$$

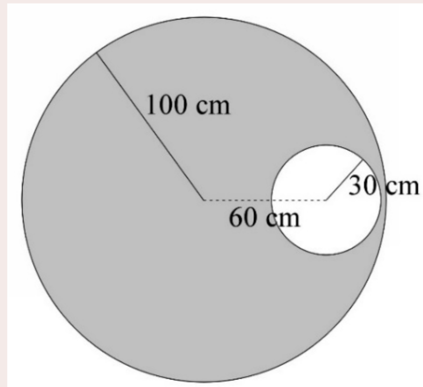
$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{m}\sum y_i m_i \\ &= \frac{9cm \cdot \sigma \cdot 72cm^2 + 3cm \cdot \sigma \cdot 144cm^2}{\sigma \cdot 72cm^2 + \sigma \cdot 144cm^2} \\ &= \frac{\cancel{\sigma} \cdot 1080cm^3}{\cancel{\sigma} \cdot 216cm^2} \\ &= 5cm \end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à la position (10 cm, 5 cm).



Exemple 11.1.6

Où est le centre de masse de cette plaque de métal dans laquelle il y a un trou si la masse surfacique est constante ?



On utilise des axes x et y dont l'origine est au centre de la plaque circulaire.

Comme il y a un axe de symétrie (axe horizontal passant par le centre de la plaque circulaire), on peut déduire assez facilement que $y_{cm} = 0$ m.

En x, c'est plus difficile. Comme on ne peut pas séparer la plaque en morceaux circulaires ou rectangulaires, il faudra trouver un autre truc.

On va imaginer qu'on a une plaque circulaire <u>sans trou</u> formée de deux plaques.

1) Une plaque circulaire avec un trou (l'indice 1 fait référence à cette plaque).
2) Une plaque circulaire qui viendrait boucher le trou (l'indice 2 fait référence à cette plaque).

La formule suivante donne alors la position du centre de masse de cette plaque sans trou.

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}}{m_{\text{plaque sans trou}}}$$

De toute évidence, la position de centre de masse de la plaque sans trou est au centre de la plaque (à $x_{cm} = 0$). Il nous reste donc

$$0 = \frac{m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}}{m_{\text{plaque sans trou}}}$$

$$0 = m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}$$

On peut alors trouver la position du centre de masse de la plaque avec un trou si on isole x_{1cm}.

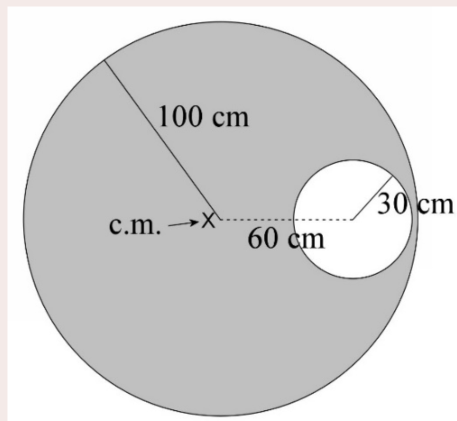
$$0 = m_1 \cdot x_{1cm} + m_2 \cdot x_{2cm}$$
$$m_1 \cdot x_{1cm} = -m_2 \cdot x_{2cm}$$
$$x_{1cm} = \frac{-m_2 \cdot x_{2cm}}{m_1}$$

Le centre de masse de la plaque qui boucherait le trou est au centre de cette plaque, donc à x_{2cm} = 0,6 m.

Comme à l'exemple précédent, on trouve les masses en multipliant la densité surfacique par l'aire de la plaque. On a donc

$$m_2 = \sigma \cdot \pi \cdot (0,3m)^2$$
$$m_1 = \sigma \cdot \left[\pi \cdot (1m)^2 - \pi \cdot (0,3m)^2 \right]$$

On a donc

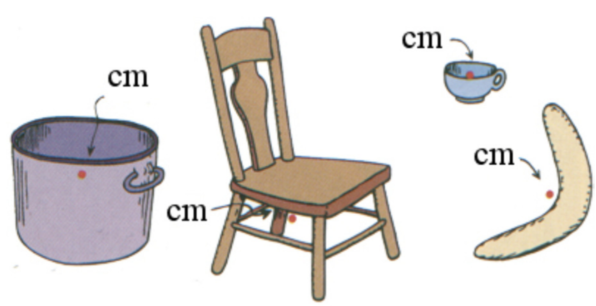


$$\begin{aligned} x_{1cm} &= \frac{-m_2 \cdot x_{2cm}}{m_1} \\ &= \frac{-\sigma \cdot \pi \cdot (0,3m)^2 \cdot 0,6m}{\sigma \cdot \left[\pi \cdot (1m)^2 - \pi \cdot (0,3m)^2 \right]} \\ &= \frac{-(0,3m)^2 \cdot 0,6m}{(1m)^2 - (0,3m)^2} \\ &= -0,05934m \end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à 5,934 cm à gauche du centre de la plaque.

Ce résultat est bien en accord avec le principe donné plus tôt qui dit que si on enlève de la masse à un système, le centre de masse se déplace dans la direction opposée à la masse enlevée. Ici, le centre de masse aurait été exactement au centre de la plaque s'il n'y avait pas ce trou. Si on enlève de la masse à droite pour faire le trou, on voit que le centre de masse se déplace vers la gauche (direction opposée).

Notez que le centre de masse n'est pas nécessairement à l'intérieur de la matière qui compose l'objet. L'image montre la position du centre de masse de 4 objets. Pour tous ces objets, le centre de masse est à l'extérieur de la matière qui compose l'objet, ce qui signifie qu'on pourrait toucher le centre de masse avec notre doigt. (On ne sentirait rien avec notre doigt en touchant le centre de masse.)



schools.wikia.com/wiki/Center_of_Mass

11.2 QUELQUES RÉSULTATS IMPORTANTS CONCERNANT LE CENTRE DE MASSE

Gravitation et centre de masse

La force de gravitation

On pourrait commencer par un rappel concernant la force de gravitation. On avait alors

Poids ou force de gravitation (formule valide près de la surface de la Terre)

1) Grandeur de la force

$$F_g = mg$$

2) Direction de la force

Vers le bas (centre de la Terre).

3) Point d'application de la force

À partir du centre de masse de l'objet.

On voit donc une première raison pour laquelle le centre de masse est important : la force de gravité s'applique au centre de masse d'un objet. En réalité, la force de gravitation s'applique sur tous les atomes de l'objet, mais pour calculer le mouvement d'un objet, on obtient les mêmes équations si on suppose que toute la force s'applique au centre de masse. Nous ferons la preuve de cela au chapitre suivant.

(Plus précisément, la force s'applique au centre de gravité de l'objet. Ce centre peut être à un endroit différent du centre de masse si l'accélération gravitationnelle n'est pas la même partout dans l'objet. C'est le cas pour de très gros objets comme une montagne. Le centre de gravité est un peu en dessous du centre de masse parce que l'accélération gravitationnelle est un peu plus faible en haut de la montagne qu'en bas de la montagne. Nous allons toutefois négliger cette différence dans ce cours.)

L'énergie gravitationnelle

Le centre de masse va également nous aider à résoudre un problème délicat : que doit-on prendre pour la hauteur d'un objet dans le calcul de l'énergie gravitationnelle ? Quelle valeur de y doit-on mettre dans mgy dans le cas d'une tige debout, posée sur le sol par exemple ? Le bout d'en bas de la tige ? Le milieu ? Le bout d'en haut ? En fait, l'énergie gravitationnelle totale est la somme de l'énergie gravitationnelle de chaque atome. Regardons ce qu'on obtient si on fait cette somme.

L'énergie de chaque atome de l'objet est

$$U_{gi} = m_i g y_i$$

L'énergie gravitationnelle totale de l'objet est donc

$$\begin{aligned} U_g &= \sum (m_i g y_i) \\ &= \sum (m_i y_i)\, g \end{aligned}$$

Or, puisque

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{m}$$
$$\sum m_i y_i = m y_{cm}$$

on arrive à

$$\begin{aligned} U_g &= \sum (m_i y_i)\, g \\ &= m y_{cm} g \end{aligned}$$

Ainsi, cette somme des énergies gravitationnelles de chaque atome donne exactement le même résultat que si on calcule l'énergie en faisant comme si toute la masse était concentrée au centre de masse.

Centre de masse et énergie gravitationnelle

Dans le calcul de l'énergie gravitationnelle d'un objet, on doit prendre la position du centre de masse pour la valeur de *y* dans *mgy*.

La quantité de mouvement totale d'un système

Prenons la définition de la position du centre de masse sous forme vectorielle.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \sum \vec{r}_i m_i$$

(Si on sépare cette équation en composantes, on revient à nos 3 équations pour la position du centre de masse en *x, y* et *z*.)

On a alors, en dérivant de chaque côté de l'équation,

$$m\vec{r}_{cm} = \sum \vec{r}_i m_i$$
$$\frac{d(m\vec{r}_{cm})}{dt} = \frac{d\left(\sum \vec{r}_i m_i\right)}{dt}$$
$$m\frac{d(\vec{r}_{cm})}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$m\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$$

Comme le terme de droite représente la quantité de mouvement totale d'un système, on a

Quantité de mouvement totale d'un système

$$\vec{p}_{tot} = m\vec{v}_{cm}$$

Ainsi, si vous voulez calculer la quantité de mouvement d'un bloc, il est inutile de séparer les blocs en tous ses atomes, de calculer la quantité de mouvement de chaque atome et de sommer (vectoriellement !). Vous n'avez qu'à prendre la masse du bloc et à multiplier par la vitesse du centre de masse. Cela va donner exactement le même résultat que la somme des quantités de mouvement de tous les atomes, et ce, même si le bloc tourne sur lui-même. C'est ce que nous faisions dans les chapitres précédents.

Quand le centre de masse est en mouvement, il faut parfois trouver la vitesse du centre de masse pour résoudre le problème. On peut la trouver avec l'équation qu'on vient d'obtenir

$$m\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$$
$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i$$

On a donc

Vitesse du centre de masse

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i$$

En composantes :

$$v_{cm\,x} = \frac{1}{m}\sum m_i v_{xi} \qquad v_{cm\,y} = \frac{1}{m}\sum m_i v_{yi} \qquad v_{cm\,z} = \frac{1}{m}\sum m_i v_{zi}$$

La première loi de Newton

Reprenons notre résultat obtenu avec la quantité de mouvement et dérivons encore

$$m\vec{v}_{cm} = \sum m_i \vec{v}_i$$
$$\frac{d\left(m\vec{v}_{cm}\right)}{dt} = \frac{d\left(\sum m_i \vec{v}_i\right)}{dt}$$
$$m\frac{d\left(\vec{v}_{cm}\right)}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$
$$m\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i$$

Puisque $\Sigma F = ma$ pour chaque atome, on a

$$m\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_i$$

Les forces sur chaque atome sont de deux types : il y a des forces internes et des forces externes.

$$m\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{i\,int} + \sum \vec{F}_{i\,ext}$$

On a déjà démontré au chapitre sur la quantité de mouvement que la somme des forces internes est toujours nulle à cause de la troisième loi de Newton.

$$m\vec{a}_{cm} = \cancel{\sum \vec{F}_{i\,\text{int}}} + \sum \vec{F}_{i\,ext}$$

Examinons ce qui se passe si la somme des forces externes est nulle. On a alors

Première loi de Newton

$$m\vec{a}_{cm} = 0 \qquad \text{si} \qquad \sum \vec{F}_{ext} = 0$$

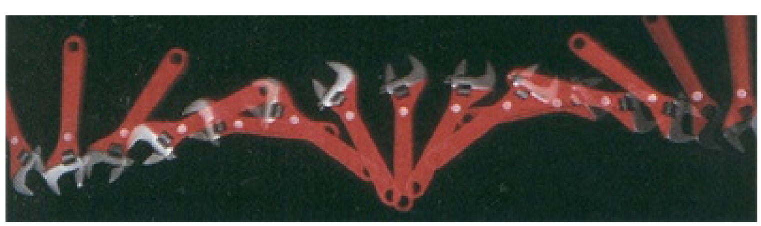
On retrouve alors le principe d'inertie qui veut qu'un objet ne peut modifier lui-même son mouvement. Les forces internes, donc faites par les atomes de l'objet lui-même, ne peuvent modifier la vitesse d'un objet, car elles s'annulent toujours. La force doit être faite par un autre objet. En l'absence d'une telle force externe, l'objet ne peut pas changer de vitesse.

Remarquez que si la troisième loi de Newton était fausse, alors les forces internes ne s'annuleraient pas et les forces internes pourraient mettre l'objet en mouvement, ce qui serait en contradiction avec la première loi de Newton. La troisième loi de Newton doit donc être vraie pour que la première loi de Newton soit vraie.

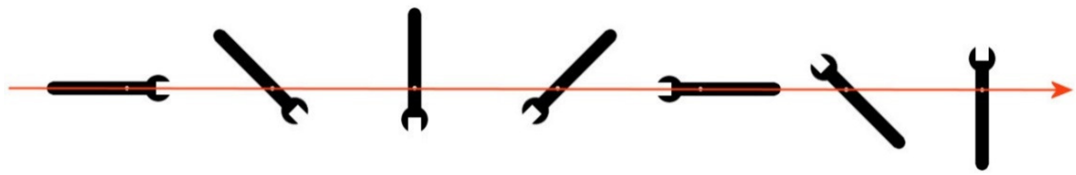
On obtient cependant une version plus précise de la première loi de Newton. Cette loi dit que la vitesse du centre de masse doit rester constante s'il n'y a pas de forces externes. Si vous êtes immobile dans l'espace loin de toutes autres masses, il n'y aura pas de forces externes et votre centre de masse restera toujours au même endroit. Il n'y a aucun mouvement que vous pouvez faire pour vous mettre le centre de masse en mouvement puisque ce sont toutes des forces internes qui ne peuvent pas changer la vitesse du centre de masse. Si vous lanciez quelque chose, disons une botte, vous partiriez dans la direction opposée, mais le centre de masse de vous et de la botte resterait toujours à la même place.

Même si le centre de masse va en vitesse constante, l'objet peut être en rotation. Par exemple, le mouvement de cet outil se fait en l'absence de force externe.

schools.wikia.com/wiki/Center_of_Mass



Le seul point de l'objet qui se déplace en ligne droite est le centre de masse, comme le spécifie la première loi de Newton.



Le reste des atomes de l'objet peut faire un mouvement beaucoup plus compliqué que cela.

Si on reprend l'exemple dans lequel vous êtes pris dans l'espace et qu'il n'y a pas de forces externes, cela veut dire que les mouvements ne peuvent changer la vitesse du centre de masse, mais ils peuvent vous mettre en rotation.

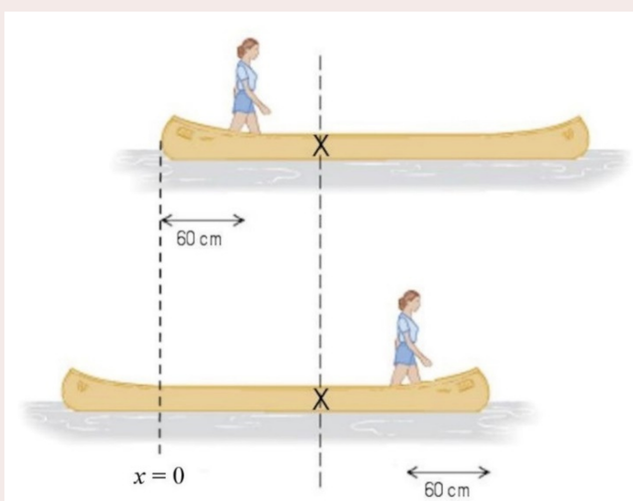
Erreur dans les films

On voit souvent des erreurs dans les films de science-fiction quand un vaisseau spatial explose. Comme l'explosion est une force interne, elle ne devrait pas changer la vitesse du centre de masse. Le centre de masse de tous les débris devrait donc continuer avec la même vitesse que le vaisseau. Pourtant, il arrive souvent qu'après l'explosion, le centre de masse de tous les débris change de vitesse (le centre de masse semble devenir immobile bien souvent). Ça semble être le cas pour l'explosion de ce vaisseau dans « Star Wars I »
http://physique.merici.ca/mecanique/explosion.wmv
Quand le vaisseau explose, le centre de masse des débris devrait continuer avec la même vitesse et venir frapper le vaisseau qui l'a détruit. Le vaisseau serait alors bombardé de fragments provenant de l'explosion et plusieurs de ces fragments pourraient faire des dommages considérables.

Voici un exemple d'application de cette meilleure version de la première loi de Newton.

Exemple 11.2.1

Une personne de 60 kg est à 60 cm de l'extrémité gauche d'un canoë de 5 m de long et ayant une masse de 90 kg. Elle se déplace ensuite pour aller s'asseoir à 60 cm de l'extrémité droite du canoë. De combien s'est déplacé le canoë s'il n'y a pas de friction entre le canoë et l'eau ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/450-woman-stands-600-canoe-500-long-walks-point-100-end-point-100-end-figure-intro-1-figur-q370549

Notre système est formé ici du canoë et de la personne. La vitesse du centre de masse est nulle initialement. Comme la somme des forces externes est nulle, la vitesse du centre de masse reste toujours nulle. Si la vitesse du centre de masse est toujours nulle, alors le centre de masse reste toujours à la même place quand la personne change de place dans le canoë. C'est donc notre idée de base pour résoudre ce problème : le centre de masse reste à la même place dans cette situation.

On va placer notre origine $x = 0$ au bout de gauche du canoë quand la personne est à gauche du canoë (voir figure).

Initialement (figure du haut), le centre de masse du canoë est à $x = 2,5$ m et la personne est à $x = 0,6$ m. La position du centre de masse du système personne-canoë est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{m}\sum x_i m_i \\ &= \frac{1}{150kg}\cdot\left(0,6m\cdot 60kg + 2,5m\cdot 90kg\right) \\ &= 1,74m \end{aligned}$$

Si la position du canoë était fixe, le centre de masse du canoë serait toujours à $x = 2,5$ m après le changement de position et la personne serait à $x = 4,4$ m. Mais la position n'est pas fixe et le canoë va se déplacer d'une distance d vers la gauche. Cela déplace aussi d'une distance d le centre de masse du canoë, qui est maintenant à $x = 2,5\text{m} - d$, et la position de la personne au bout du canoë, qui est à $x = 4,4\text{m} - d$.

On a donc

$$\begin{aligned} x'_{cm} &= \frac{1}{m}\sum x_i m_i \\ &= \frac{1}{150kg}\left(\left(4,4m - d\right)\cdot 60kg + \left(2,5m - d\right)\cdot 90kg\right) \\ &= \frac{489kg\ m - 150kg\cdot d}{150kg} \\ &= 3,26m - d \end{aligned}$$

Puisque le centre de masse devrait être resté à la même place, on peut écrire

$$\begin{aligned} x_{cm} &= x'_{cm} \\ 1,74m &= 3,26m - d \\ d &= 1,52m \end{aligned}$$

Le canoë s'est donc déplacé de 1,52 m vers la gauche.

Il faut se méfier de ce genre de déplacement du bateau, surtout si on cherchait à débarquer du bateau. Si on marche vers l'avant du bateau pour débarquer quand l'avant touche au quai, le bateau va reculer et l'espace entre le quai et le bateau va augmenter. Cet espace sera peut-être trop grand pour que vous puissiez le traverser, et plouf à l'eau.

La deuxième loi de Newton

Retournons à l'équation

$$m\vec{a}_{cm} = \cancel{\sum \vec{F}_{i\,\text{int}}} + \sum \vec{F}_{i\,ext}$$

S'il y a des forces externes, on obtient la deuxième loi de Newton.

Deuxième loi de Newton

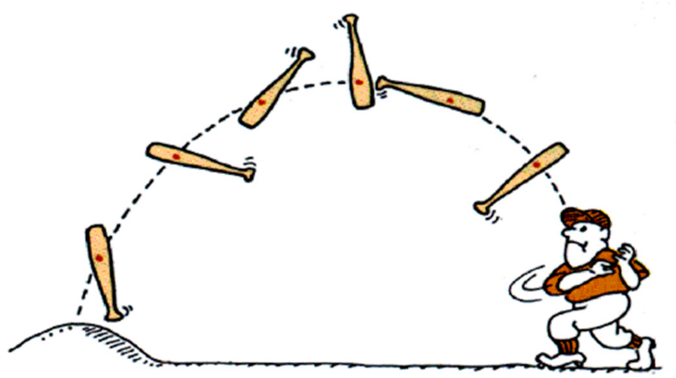
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm}$$

ou

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

Ces résultats montrent que la deuxième loi de Newton permet en fait de décrire le mouvement du centre de masse.

Par exemple, quand on affirmait qu'un projectile suit une trajectoire parabolique, on affirmait en réalité que le centre de masse du projectile suit une trajectoire parabolique.



www.ux1.eiu.edu/~addavis/1350/09Mom/CoM.html

On peut voir dans ce vidéo la trajectoire parabolique suivie par le centre de masse de plusieurs projectiles.
http://www.youtube.com/watch?v=DY3LYQv22qY
Cette équation montre assez clairement que ce sont les forces externes qui changent le mouvement du centre de masse. On ne peut pas changer la vitesse du centre de masse avec une force interne.

L'image de droite vient d'un vidéo montrant plusieurs personnes poussant une camionnette.
https://www.youtube.com/watch?v=zsR2jqRhT5E
Évidemment, les efforts de la personne (appelons-le Bob) dans la camionnette sont inutiles. En faisant partie du système camionnette+Bob, les forces qu'il exerce deviennent des forces internes et elles ne peuvent pas modifier le mouvement du camion.

Si on considérait que notre système est formé uniquement du camion, alors les forces faites par Bob ne sont pas des forces internes. Toutefois, la force faite par Bob sur le camion est annulée par la force de friction faite par les pieds de Bob. Ainsi, la force totale faite par Bob sur le camion est nulle et on arrive encore à la conclusion que les efforts de Bob sont inutiles.

Quelle version de la deuxième loi de Newton est plus générale ?

Nous avons deux formes de la deuxième loi

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm} \qquad\qquad \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

et on peut se demander laquelle est plus générale. On peut souvent lire que la deuxième est plus générale puisqu'elle revient à la première uniquement si la masse est constante (comme on l'a montré au chapitre précédent). La deuxième version serait donc plus générale puisqu'elle pourrait s'appliquer aux cas où la masse change alors que la première ne pourrait pas.

Cependant, ce n'est pas vrai. Dans un système isolé, la masse ne peut pas varier et les deux équations sont aussi générales l'une que l'autre. Dans un système qui n'est pas isolé, alors il y a quelques subtilités qui font en sorte que, très souvent, aucune de ces deux équations ne peut être utilisée sans une petite modification. Pour une discussion plus approfondie des systèmes non isolés, consultez ce document.
https://physique.merici.ca/mecanique/DeuxversionsNewton.pdf

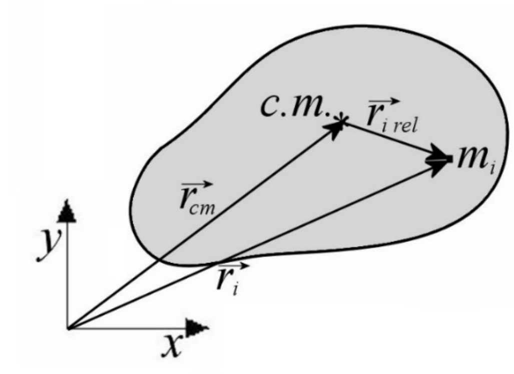
L'énergie cinétique totale d'un système

Puisqu'on peut calculer la quantité de mouvement d'un système uniquement en considérant le mouvement du centre de masse avec

$$\vec{p}_{tot} = m\vec{v}_{cm}$$

on peut se demander si on peut faire la même chose avec l'énergie cinétique. Peut-on calculer l'énergie cinétique totale d'un système avec la formule suivante ?

$$E_{k\,tot} \overset{?}{=} \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$



Pour répondre à cette question, nous allons calculer l'énergie cinétique d'un atome dans l'objet et sommer toutes ces énergies cinétiques pour obtenir l'énergie cinétique totale.

La position d'une petite masse de l'objet est

$$\vec{r} = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_{rel}$$

Si on dérive, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{rel}}{dt} \\ \vec{v} &= \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{rel} \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette équation est la différence de vitesse entre l'atome et le centre de masse, qu'on appelle la *vitesse relative*. Si l'atome a la même vitesse (en grandeur et en direction) que le centre de masse, alors v_{rel} est nul.

L'énergie cinétique totale du système est donc

$$\begin{aligned} E_{k\,tot} &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i\,rel} \right)^2 \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \left(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{i\,rel} + v_{i\,rel}^2 \right) \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum m_i \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{i\,rel} + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i\,rel}^2 \end{aligned}$$

Le deuxième terme est

$$\begin{aligned} \sum m_i \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{i\,rel} &= \vec{v}_{cm} \cdot \sum m_i \vec{v}_{i\,rel} \\ &= \vec{v}_{cm} \cdot m \vec{v}_{cm\,rel} \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que la somme des quantités de mouvement se trouve avec la vitesse du centre de masse. Or, puisque v_{rel} mesure la différence de vitesse entre un objet et le centre de masse, $v_{cm\,rel}$ est la différence de vitesse entre le centre de masse et le centre de masse ! De toute évidence, cette vitesse est nulle. Le deuxième terme est donc nul et il nous reste

$$E_{k\,tot} = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i\,rel}^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i\,rel}^2$$

On obtient finalement

Énergie cinétique totale d'un système

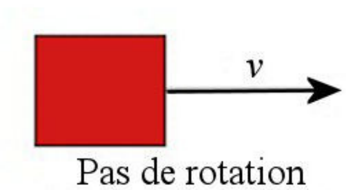
$$E_{k\,tot} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i\,rel}^2$$

Le premier terme s'appelle *l'énergie cinétique du centre de masse* alors que le deuxième terme s'appelle *l'énergie cinétique relative au centre de masse*.

On voit donc que, généralement, ***on ne peut pas*** trouver l'énergie cinétique d'un système simplement avec le mouvement du centre de masse comme on pouvait le faire pour la quantité de mouvement.

Un exemple : les énergies cinétiques des objets qui tournent et des objets qui ne tournent pas

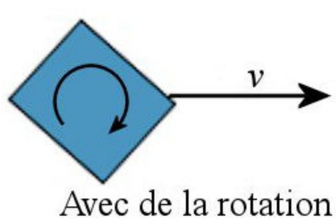
Si un objet se déplace sans tourner, alors tous ses atomes ont la même vitesse que le centre de masse. Alors, tous les v_{rel} sont nuls (puisqu'il n'y a pas de différence de vitesse entre les atomes et le centre de masse) et on a alors



$$E_{k\,tot} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

Nos calculs d'énergie cinétique dans les chapitres précédents étaient donc corrects puisque tous les atomes des objets allaient à la même vitesse que le centre de masse des objets dans tout ce que nous avons fait jusqu'ici.

Mais si l'objet est en rotation en même temps qu'il se déplace, alors certains atomes vont plus vite que le centre de masse (comme ceux au-dessus du centre de masse sur notre figure) et certains vont moins vite que le centre de masse (comme ceux en bas du centre de masse sur notre figure). Dans le cas de la quantité de mouvement, ces différences finissaient par s'annuler, mais ce n'est pas ce qui se produit dans le cas de l'énergie cinétique. Dans ce cas, l'énergie cinétique est



$$E_{k\,tot} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{i\,rel}^2$$

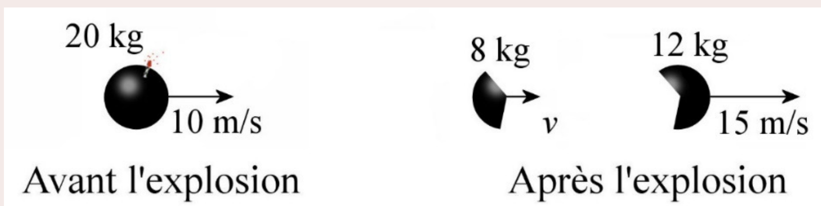
Comme le deuxième terme de cette équation doit être positif, l'énergie cinétique de l'objet en rotation est plus grande que l'objet qui n'est pas en rotation même si leurs masses et leurs vitesses sont identiques. On pourrait penser que le calcul de ce deuxième terme sera très long, car il faudrait faire une somme sur tous les atomes qui composent l'objet. Nous verrons cependant au chapitre suivant comment calculer le deuxième terme si l'objet tourne sur lui-même.

Autres possibilités

Il n'y a pas que la rotation qui peut changer l'énergie cinétique de l'objet. Tout ce qui fait changer la vitesse des atomes par rapport à la vitesse du centre de masse fait changer l'énergie cinétique. Par exemple, s'il y a des vibrations dans l'objet, l'énergie cinétique change. L'agitation thermique des atomes peut aussi changer la vitesse des atomes par rapport au centre de masse.

Exemple 11.2.2

Une bombe explose en deux fragments tels qu'illustrés sur la figure.



a) Quelle est la vitesse du morceau de 8 kg ?

On peut trouver cette vitesse avec la conservation de la quantité de mouvement, ou en remarquant que la vitesse du centre de masse après l'explosion doit être la même que celle avant l'explosion. Comme on a déjà fait des exemples avec la conservation de *p*, on va utiliser la formule de la vitesse du centre de masse. On a donc

Avant l'explosion, la vitesse du centre de masse est évidemment.

$$v_{cm} = 10\tfrac{m}{s}$$

Après l'explosion, on peut calculer la vitesse du centre de masse à partir de la vitesse de chaque morceau. On a alors

$$\begin{aligned} v'_{cm} &= \frac{1}{m}\sum m_i v'_i \\ &= \frac{1}{20kg}\left(12kg \cdot 15\tfrac{m}{s} + 8kg \cdot v\right) \end{aligned}$$

Comme la vitesse du centre de masse ne change pas, on a

$$v_{cm} = v'_{cm}$$

$$10\tfrac{m}{s} = \frac{1}{20kg}\left(12kg\cdot 15\tfrac{m}{s} + 8kg\cdot v\right)$$
$$v = 2,5\tfrac{m}{s}$$

b) Quelle est l'énergie cinétique du système après l'explosion ?

On va le faire de deux façons. On peut premièrement additionner les deux énergies cinétiques. On a alors

$$\begin{aligned} E_{k\,tot} &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 12kg\cdot\left(15\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 8kg\cdot\left(2,5\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 1375J \end{aligned}$$

On va le faire d'une deuxième façon, principalement pour illustrer ce qu'est v_{rel} dans la formule de l'énergie

$$E_{k\,tot} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m v_{i\,rel}^2$$

Le premier fragment (celui de 12 kg) a une vitesse de 15 m/s. Comme le centre de masse a une vitesse de 10 m/s, la différence de vitesse entre ce fragment et le centre de masse est 5 m/s.

$$v_{1\,rel} = 5\tfrac{m}{s}$$

Le deuxième fragment (celui de 8 kg) a une vitesse de 2,5 m/s. Comme le centre de masse a une vitesse de 10 m/s, la différence de vitesse entre ce fragment et le centre de masse est 7,5 m/s.

$$v_{2\,rel} = 7,5\tfrac{m}{s}$$

(Inutile de s'occuper du signe de ces vitesses puisqu'on va mettre v_{rel} au carré.)

L'énergie cinétique est donc

$$\begin{aligned} E_{k\,tot} &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i {v_{i\,rel}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 20kg\cdot\left(10\tfrac{m}{s}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 12kg\cdot\left(5\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 8kg\cdot\left(7,5\tfrac{m}{s}\right)^2\right) \\ &= \underbrace{1000J}_{\text{Énergie du centre de masse}} + \underbrace{375J}_{\text{Énergie par rapport au centre de masse}} \\ &= 1375J \end{aligned}$$

Le résultat est le même avec les deux méthodes. Ici, la deuxième méthode était plus longue, mais elle peut devenir beaucoup plus courte dans certains cas en utilisant certaines méthodes pour simplifier ce calcul. C'est ce qu'on fera pour les objets en rotation au chapitre suivant.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Centre de masse d'un système composé de particules

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\sum \vec{r}_i m_i$$

En composantes :

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{m}\sum y_i m_i \qquad z_{cm} = \frac{1}{m}\sum z_i m_i$$

Centre de masse d'un objet

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int x\,dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{m}\int y\,dm \qquad z_{cm} = \frac{1}{m}\int z\,dm$$

Centre de masse d'une tige

$$x_{cm} = \frac{1}{m}\int \lambda x\,dx$$

Centre de masse et axe de symétrie

Si l'objet possède un axe de symétrie, le centre de masse doit être sur cet axe. S'il y a plusieurs axes de symétrie, le centre de masse est au croisement des axes de symétrie.

Centre de masse et énergie gravitationnelle

Dans le calcul de l'énergie gravitationnelle d'un objet, on doit prendre la position du centre de masse pour la valeur de y dans mgy.

Quantité de mouvement totale d'un système

$$\vec{p}_{tot} = m\vec{v}_{cm}$$

Vitesse du centre de masse

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i$$

En composantes :

$$v_{cm\,x} = \frac{1}{m}\sum m_i v_{xi} \qquad v_{cm\,y} = \frac{1}{m}\sum m_i v_{yi} \qquad v_{cm\,z} = \frac{1}{m}\sum m_i v_{zi}$$

Première loi de Newton

$$m\vec{a}_{cm} = 0 \qquad \text{si} \qquad \sum \vec{F}_{ext} = 0$$

Deuxième loi de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm}$$

ou

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

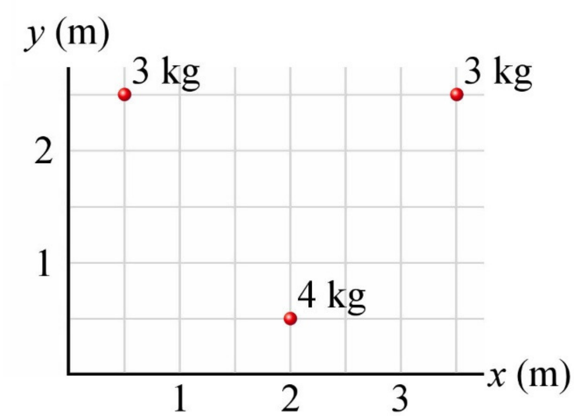
Énergie cinétique totale d'un système

$$E_{k\,tot} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_{i\,rel}^2$$

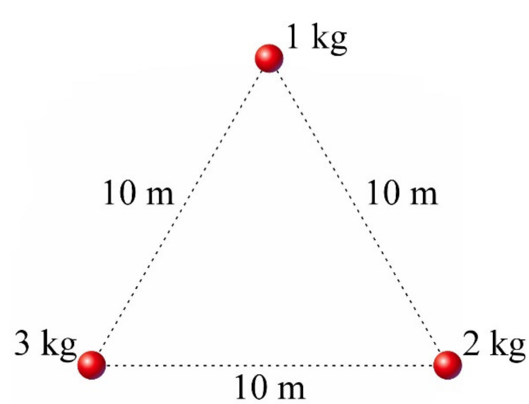
EXERCICES

11.1 La position du centre de masse

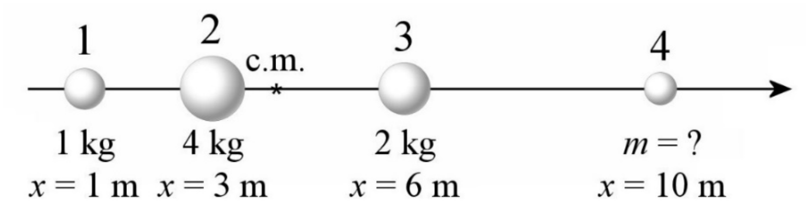
1. Où est le centre de masse de ces trois masses ?



2. Où est le centre de masse de ces trois masses ? (Mettez l'origine de vos axes à la position de la masse de 3 kg.)

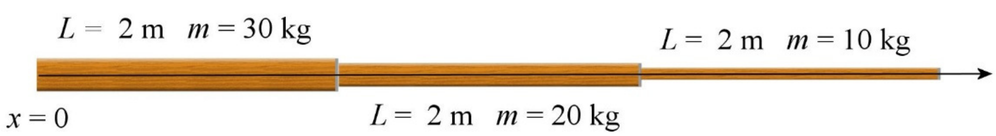


3. Sachant que le centre de masse de ces 4 objets est à x = 4 m, déterminer la masse de l'objet 4.

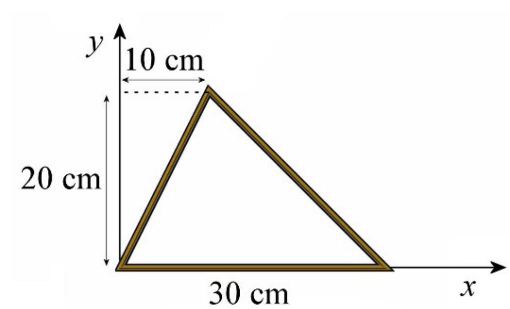


4. Où est le centre de masse d'une tige de 3 m de long dont la masse linéique est donnée par la formule $\lambda = 1\frac{kg}{m^3} \cdot x^2 + 1\frac{kg}{m}$?

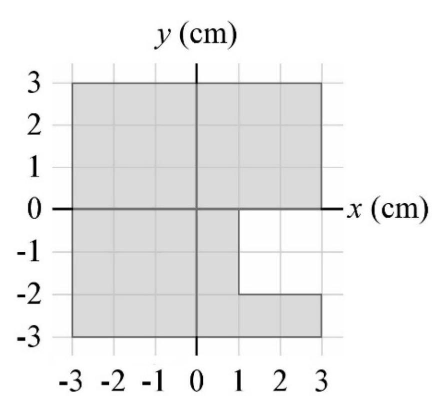
5. Où est le centre de masse de cette poutre composée de 3 tiges ?



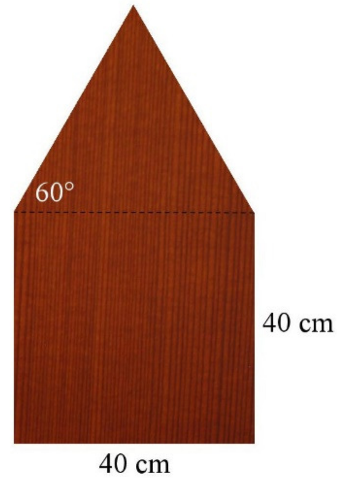
6. Où est le centre de masse de cet objet formé de trois tiges de même masse linéique ?



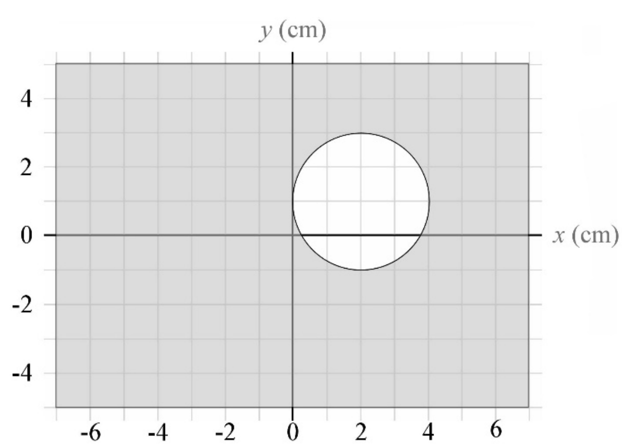
7. Où est le centre de masse de cette plaque ayant une masse surfacique uniforme ?



8. Où est le centre de masse de cette plaque de bois ayant une masse surfacique de 60 kg/m² ?



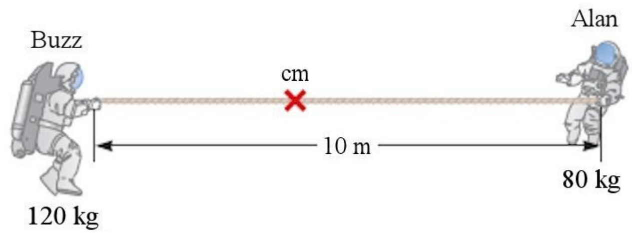
9. Où est le centre de masse de cette plaque de masse surfacique uniforme si le trou a un rayon de 2 cm ?



11.2 Quelques résultats importants concernant le centre de masse

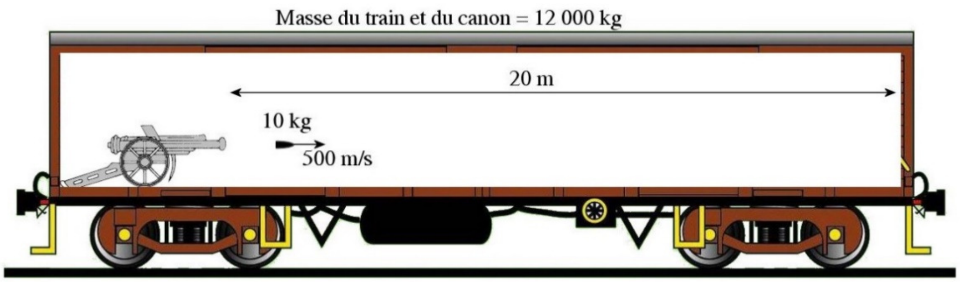
10. Buzz et Alan sont deux astronautes initialement au repos flottant dans l'espace tel qu'illustré sur la figure. Buzz tire alors sur la corde, ce qui lui donne une vitesse de 3 m/s directement vers Alan.

a) Quelle est la vitesse d'Alan après que Buzz ait tiré sur la corde ?
b) Quelle est la distance entre Buzz et Alan 1 seconde après que Buzz ait tiré sur la corde ?
c) Où vont-ils se rencontrer et au bout de combien de temps ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/astronauts-having-mass-m-connected-rope-length-d-having-negligible-mass-isolated-space-orb-q3272102

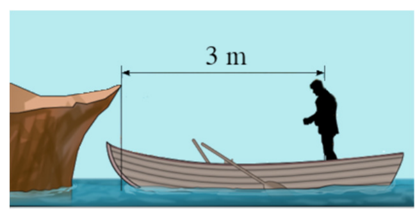
11. Un wagon de train contenant un canon est immobile sur une voie ferrée. Soudainement, le canon tire accidentellement un obus de 10 kg à 500 m/s. Le canon est solidement fixé au train et il n'y a pas de friction qui s'oppose au mouvement du train.



www.sa-transport.co.za/train_drawings/wagons/fb-8.html
www.ipaustralia.com.au/applicant/the-arsenal-football-club-public-limited-company/trademarks/805631/

a) De quelle distance s'est déplacé le train entre le moment où le canon a tiré et le moment où l'obus a atteint l'autre côté du train ?
b) Quelle est la vitesse du train après que le canon ait tiré ?
c) Quelle est la vitesse du centre de masse du système formé par le train, le canon et l'obus après que le canon ait tiré ?

12. Sébastien marche dans sa chaloupe pour aller vers le bord du lac qui est à 3 m de lui. Quand il arrive à l'autre bout de la chaloupe, celle-ci a reculé de 40 cm. Quelle est la masse de la chaloupe si Sébastien a une masse de 60 kg ?

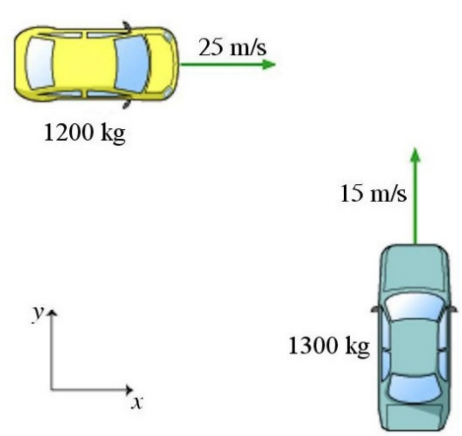


www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/mysterious-man-weight-wman-200-lb-boat-weight-wboat-400-lb-rest-close-river-edge-shown-pic-q947329

13. Voici deux voitures qui feront une collision.

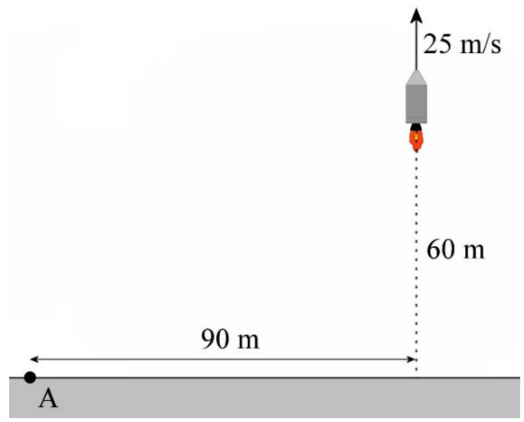
a) Quelle est la vitesse de centre de masse avant la collision ?
b) Quelle est la vitesse de centre de masse après la collision si les voitures font une collision parfaitement inélastique ?
c) Quelle est la vitesse de centre de masse après la collision si les voitures font une collision élastique ?

(Donnez toujours votre réponse sous la forme $\vec{v}_{cm} = \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\right)\frac{m}{s}$)

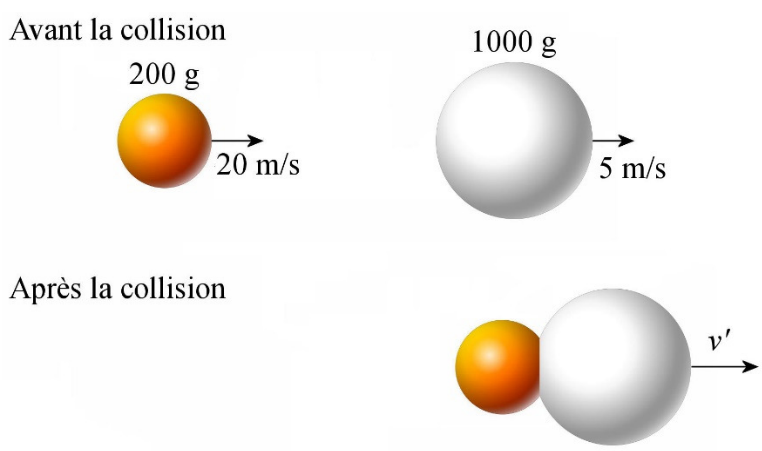


www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/problem-consider-collision-cars-initially-moving-right-angles-assume-collision-cars-stick--q3004672

14. Un modèle réduit de fusée décolle verticalement. Quand elle a atteint une altitude de 60 m et une vitesse de 25 m/s, ses moteurs s'arrêtent et la fusée explose en deux morceaux. Le premier morceau à atteindre le sol est un morceau de 500 g qui touche le sol 6 secondes après l'explosion à 90 m à l'est du point de départ de la fusée (point A sur la figure). Où est alors l'autre morceau, dont la masse est de 1200 g ?



15. Voici une collision parfaitement inélastique.



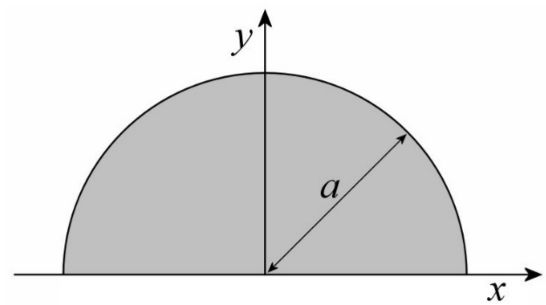
a) Quelle est la vitesse du centre de la masse avant la collision ?
b) Quelle est l'énergie cinétique du centre de masse avant la collision ?
c) Quelle est l'énergie cinétique relative au centre de masse avant la collision ?
d) Quelle est la vitesse v' après la collision ?
e) Quelle est l'énergie cinétique du centre de masse après la collision ?
f) Quelle est l'énergie cinétique relative au centre de masse après la collision ?

Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

16. La densité d'une tige allant de $x = 0$ à $x = L$ est donnée par $\lambda = kx^n$. Quelle doit-être la valeur de n pour que le centre de masse soit à $x = 0,9\ L$?

17. Une plaque ayant une masse surfacique constante a la forme d'un demi-cercle. Où est la position en y du centre de masse de cette plaque ? (Donnez la position en utilisant les axes montrés sur la figure.)



RÉPONSES

11.1 Position du centre de masse

1. $x_{cm} = 2$ m $y_{cm} = 1{,}7$ m
2. $x_{cm} = 4{,}17$ m $y_{cm} = 1{,}44$ m
3. 0,5 kg
4. $x_{cm} = 2{,}0625$ m
5. $x_{cm} = 2{,}333$ m
6. $x_{cm} = 13{,}98$ cm $y_{cm} = 6{,}28$ cm
7. $x_{cm} = -0{,}25$ cm $y_{cm} = 0{,}125$ cm
8. $x_{cm} = 20$ cm $y_{cm} = 29{,}53$ cm (origine au coin inférieur gauche de la plaque)
9. $x_{cm} = -0{,}19722$ m $y_{cm} = -0{,}0986$ m (origine au centre de la plaque rectangulaire)

11.2 Quelques résultats importants concernant le centre de masse

10. a) 4,5 m/s vers la gauche b) 2,5 m c) Au centre de masse, au bout de 1,333 s
11. a) 1,665 cm vers la gauche b) 0,4167 m/s vers la gauche c) 0 m/s
12. 390 kg
13. a) $\vec{v}_{cm} = \left(12\vec{i} + 7{,}8\vec{j}\right)\frac{m}{s}$ b) $\vec{v}_{cm} = \left(12\vec{i} + 7{,}8\vec{j}\right)\frac{m}{s}$ c) $\vec{v}_{cm} = \left(12\vec{i} + 7{,}8\vec{j}\right)\frac{m}{s}$
14. Le deuxième morceau est à 37,5 m à l'est du point de départ et est à une altitude de 47,6 m.
15. a) 7,5 m/s b) 33,75 J c) 18,75 J d) 7,5 m/s e) 33,75 J f) 0 J

Défis

16. $n = 8$
17. $y_{cm} = 4a/3\pi$