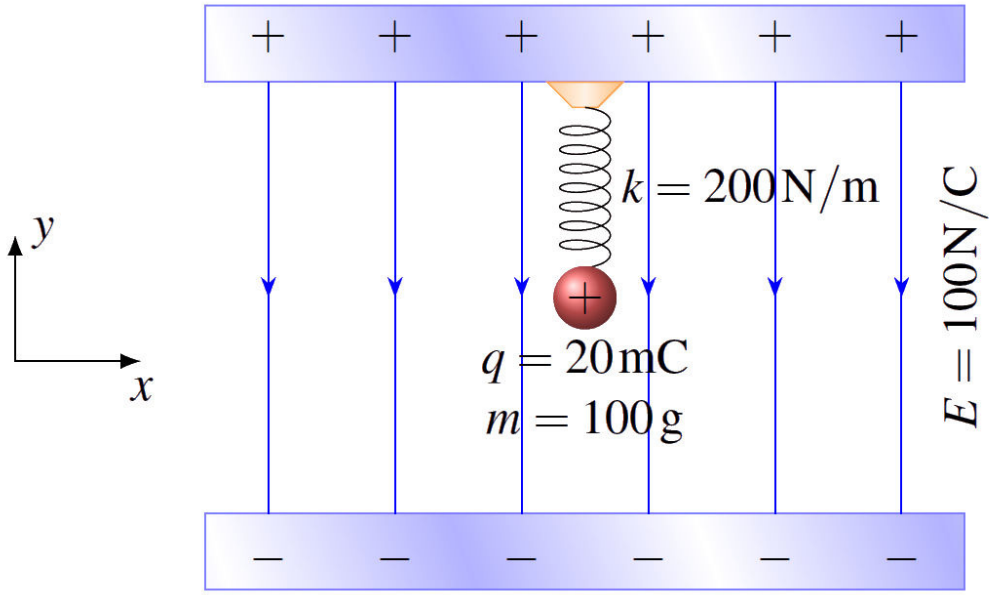
4 LE POTENTIEL

Un objet de 100 g est suspendu à un ressort qui n'est pas étiré initialement, tel qu'illustré sur la figure. Quel sera l'étirement maximal du ressort quand on laissera tomber la masse si on tient compte de la gravitation ?



Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

4.1 L'ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLECTRIQUE (U_E)

Imaginons qu'une charge ponctuelle positive est initialement près d'une sphère ayant aussi une charge positive.

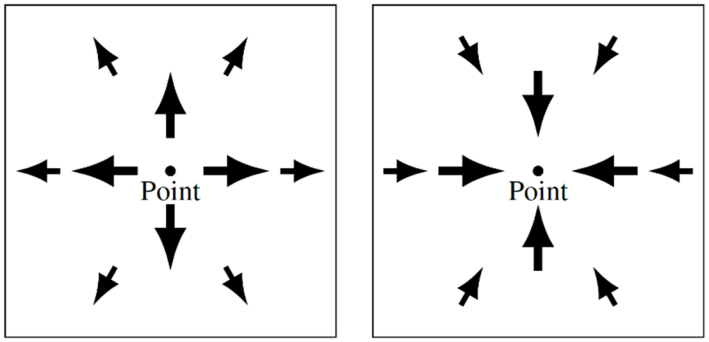
Si on laisse partir la charge ponctuelle, peut-on trouver sa vitesse quand elle sera loin de la sphère ?

Avec ce qu'on a appris dans les chapitres précédents, on pourrait théoriquement y arriver, mais ce ne serait pas si simple. On commencerait par trouver la force sur la charge à partir du champ fait par la sphère pour ensuite trouver l'accélération de la charge et finalement calculer la vitesse. Toutefois, la force sur la charge n'est pas constante puisque le champ diminue avec le carré de la distance. Cela signifie que pour trouver la vitesse, on ne pourrait pas utiliser les formules de mouvement à accélération constante et qu'il faudrait trouver la vitesse en intégrant.

Heureusement, il y a une autre façon de faire. On peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique pour résoudre ce problème. La seule chose qui nous manque pour utiliser cette méthode est la formule de l'énergie potentielle électrique.

L'énergie potentielle électrique

La force électrique faite par une sphère chargée ou une charge ponctuelle (c'est la même chose puisqu'on a vu que les champs faits par une sphère et une charge ponctuelle sont identiques) dépend uniquement de la distance. Cela signifie que la force électrique faite par une sphère est une force centrale. On se rappelle qu'une force centrale est une force dont la grandeur dépend uniquement de la distance r et qui est toujours dirigée vers ou à l'opposé d'un point fixe, tel qu'illustré sur la figure.



C'est effectivement ce qu'on a pour une sphère. Dans ce cas, le point central est le centre de la sphère. La force qui attire ou repousse une charge ponctuelle près de la sphère est toujours dirigée vers ce point ou est dans la direction opposée.

On a démontré au chapitre 9 en mécanique qu'une force centrale est nécessairement une force conservative et que, dans ce cas, il existe une énergie potentielle associée à cette force. Pour la force électrique, cette énergie sera notée U_E.

En mécanique, on avait aussi déterminé que l'énergie potentielle d'un objet soumis à ce genre de force se trouve avec

$$U = -\int F dr$$

Dans le cas d'une charge ponctuelle q soumise à la force électrique d'une sphère de charge Q, on arrive à

$$\begin{aligned} U_E &= -\int F_E dr \\ &= -\int qE dr \\ &= -\int q \frac{kQ}{r^2} dr \\ &= -kQq \int \frac{1}{r^2} dr \\ &= -kQq \left(-\frac{1}{r} \right) + Cst \\ &= \frac{kQq}{r} + Cst \end{aligned}$$

On peut choisir ce qu'on veut comme constante. Évidemment, on simplifie la formule en choisissant une valeur nulle. Avec ce choix, l'énergie potentielle devient nulle si la charge q est très loin de la sphère.

Énergie potentielle d'une charge q à une distance r du centre d'une sphère ayant une charge Q (ou à une distance r d'une charge ponctuelle Q)

$$U_E = \frac{kqQ}{r}$$

(La formule est valide pour une charge près d'une sphère chargée ou d'une autre charge ponctuelle puisque ces 2 objets font exactement le même champ électrique autour d'eux.)

On peut alors résoudre quelques problèmes en utilisant la conservation de l'énergie mécanique. Peut-être que quelques rappels seraient les bienvenus.

(Attention, la force électrique n'est pas toujours conservative. La force faite par des charges est toujours conservative, mais la force électrique induite par des variations de champ magnétique ne l'est pas. On rencontrera ces cas seulement à partir du chapitre 10.)

Quelques rappels

L'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système est

$$E_{mec} = E_k + U$$

où U est l'énergie potentielle. (Pour éviter toute confusion avec le champ électrique dans ce chapitre, l'énergie mécanique sera toujours notée E_{mec}.) On connait maintenant 3 formes d'énergie potentielle, soit l'énergie gravitationnelle, l'énergie du ressort et l'énergie électrique.

$$U = U_g + U_R + U_E$$

$$U_g = mgy \qquad U_R = \frac{1}{2}kx^2 \qquad U_E = \frac{kQq}{r}$$

Le principe de conservation de l'énergie mécanique

S'il n'y a pas de forces externes ou de forces non conservatives comme la friction, on peut utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique

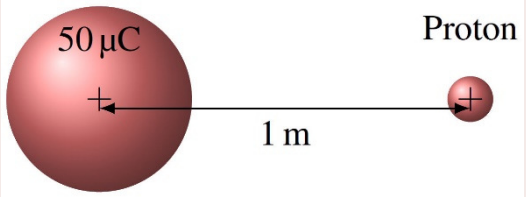
$$E_k + U = E_k' + U'$$

S'il y a des forces externes ou des forces non conservatives, on peut résoudre avec

$$E_k + U + W_{nc} + W_{ext} = E_k' + U'$$

Exemple 4.1.1

Un proton est initialement au repos à une distance de 1 m du centre d'une sphère ayant une charge de 50 µC. Il y a alors répulsion électrique entre la sphère et le proton. On laisse alors partir le proton en maintenant la sphère en place. Quelle sera la vitesse du proton quand il sera loin de la sphère ?



On va résoudre ce problème avec la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique du proton est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}m_p v^2 + U_E$$

Énergie quand le proton est à 1 mètre de la sphère

Initialement, l'énergie cinétique est nulle puisque le proton est au repos. L'énergie initiale est donc

$$E_{mec} = U_E = \frac{kQq}{r}$$

La valeur de l'énergie mécanique initiale est donc

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{kQq}{r} \\ &= \frac{9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 50\times10^{-6}C\cdot 1,602\times10^{-19}C}{1m} \\ &= 7,209\times10^{-14}J \end{aligned}$$

Énergie quand le proton est loin de la sphère

L'énergie mécanique quand le proton est loin est

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \tfrac{1}{2}m_p v'^2 + U'_E \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 1,673\times10^{-27}kg\cdot v'^2 + 0 \end{aligned}$$

(L'énergie potentielle est nulle puisque la distance *r'* devient alors très grande.)

Application du principe de conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie nous donne alors

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E'_{mec} \\ 7,209\times10^{-14}J &= \tfrac{1}{2}\cdot 1,673\times10^{-27}kg\cdot v'^2 \\ v' &= 928\,335\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Erreur vraiment très fréquente : utiliser des formules pour accélération constante

Certains pourraient tenter de résoudre le problème précédent en cherchant le champ électrique à l'endroit où est le proton pour ensuite trouver la force sur la charge et son accélération. Avec l'accélération et le déplacement, ils trouvent la vitesse en utilisant les formules du MRUA. Cette façon de faire est uniquement bonne si le champ est uniforme. Si le champ n'est pas uniforme, la force et l'accélération changent continuellement et on ne peut pas appliquer les formules du mouvement à accélération constante. C'était le cas dans l'exemple précédent.

L'énergie potentielle électrique peut donc nous permettre de résoudre certains problèmes beaucoup plus facilement qu'avec les forces. On va donc développer cette idée.

4.2 LE POTENTIEL (*V*)

Définition du potentiel

Comme on l'a fait pour le calcul de la force, on va séparer le calcul de l'énergie électrique en deux parties. Ainsi, le calcul de l'énergie potentielle électrique d'une charge q se fera avec les deux étapes suivantes.

1) On calcule une première partie qui dépend uniquement de la présence des charges autour de la charge pour laquelle on veut savoir l'énergie potentielle. Ce qu'on obtient s'appelle *le potentiel* (V).

2) On calcule l'énergie électrique de la charge avec la formule suivante, qui est en fait la définition du potentiel.

Définition du potentiel

$$U_E = qV$$

Cette séparation semble inutile dans des cas simples, mais chacune de ces étapes peut devenir une intégrale et cette séparation permet d'analyser la situation plus facilement.

Unité du potentiel

La définition du potentiel veut dire que le potentiel doit être en J/C. On a donné le nom de *volt* à cette unité.

Le volt

$$1V = 1\tfrac{J}{C}$$

Le potentiel fait par une sphère et par une charge ponctuelle

Revenons à notre petite charge q près de la sphère de charge Q. Avec ce qu'on sait, on peut maintenant trouver une formule qui donne le potentiel fait par la sphère.

On sait que l'énergie potentielle électrique d'une charge q près d'une sphère ayant une charge Q est

$$U_E = \frac{kQq}{r}$$

Or, l'énergie potentielle électrique de la charge q doit aussi être donnée par

$$U_E = qV$$

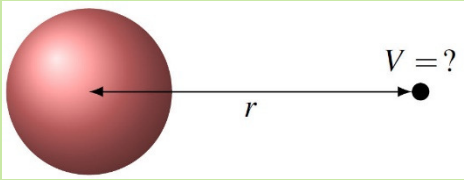
Puisque ces deux formules doivent donner le même résultat, on a

$$qV = \frac{kQq}{r}$$
$$V = \frac{kQ}{r}$$

Ce potentiel doit être fait par la charge Q. La charge q a une énergie potentielle uniquement parce que la charge Q est à proximité. S'il n'y avait pas de charge Q, il n'y aurait pas d'énergie potentielle et s'il n'y avait pas d'énergie potentielle, il n'y aurait pas de potentiel. On en conclut donc que c'est la charge Q qui fait le potentiel. Cela veut donc dire que la charge Q fait un potentiel autour d'elle. Ce potentiel est donné par cette formule.

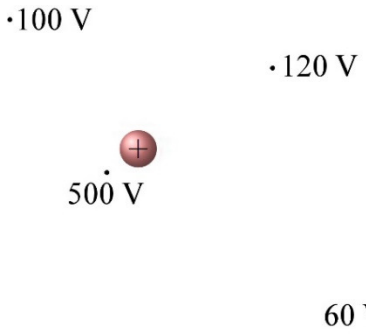
Potentiel à une distance *r* du centre d'une sphère ayant une charge *Q* (ou à une distance *r* d'une charge ponctuelle *Q*)

$$V = \frac{kQ}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



On se rappelle qu'au chapitre 2, les objets chargés créaient un champ électrique partout autour d'eux et que ce champ pouvait varier d'un endroit à l'autre.

Ici, on a un peu la même chose avec le potentiel : les objets chargés créent un potentiel électrique autour d'eux et ce potentiel peut changer d'un endroit à l'autre.



Par exemple, la figure de droite montre le potentiel à quelques endroits près d'une petite sphère chargée. Le potentiel diminue avec la distance, tel que prévu par la formule.

Notez que le potentiel est un scalaire. À chaque point de l'espace, il y a une valeur du potentiel. Ce n'est pas un vecteur, c'est un simple chiffre.

Exemple 4.2.1

Quel est le potentiel à 50 cm du centre d'une sphère ayant une charge de 40 µC ?

À cette distance, le potentiel est

$$\begin{aligned} V &= \frac{kQ}{r} \\ &= \frac{9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 40\times10^{-6}\,C}{0{,}5m} \\ &= 720\,000V \end{aligned}$$

Il ne faut pas se surprendre si on obtient des valeurs de quelques millions de volts…

Les surfaces équipotentielles

Définition

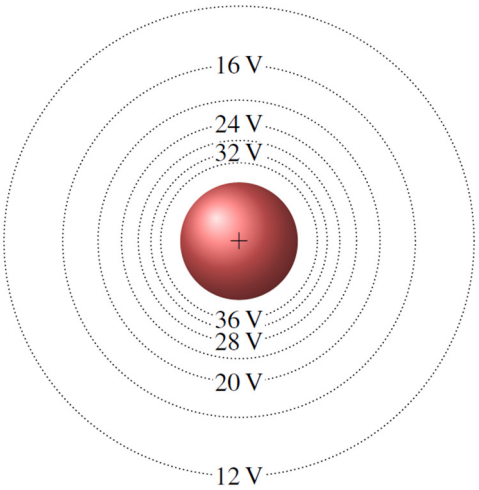
Comme avec le champ électrique, on peut représenter le potentiel autour d'un objet chargé. Pour y arriver, on utilise les surfaces équipotentielles.

Surfaces équipotentielles

Les surfaces équipotentielles sont des surfaces qui relient tous les endroits au même potentiel.

Surfaces équipotentielles d'une sphère chargée

Par exemple, la figure de droite montre les surfaces équipotentielles de 12 V, 16 V, 20 V, 24 V, 28 V, 32 V et 36 V près d'une sphère ayant une charge de 8 nC.



Comme le potentiel d'une sphère dépend uniquement de la distance, les surfaces équipotentielles sont des sphères autour de la sphère. Le potentiel est de 12 V à 600 cm de la charge, le potentiel est de 16 V à 450 cm de la charge, le potentiel est de 20 V à 360 cm de la charge et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne montrée de 36 V qui est à 200 cm de la charge. Plus on s'approche de la charge, plus le potentiel augmente. (Avec une charge négative, le potentiel serait de plus en plus négatif à mesure qu'on s'approcherait de la sphère.)

Calcul de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle

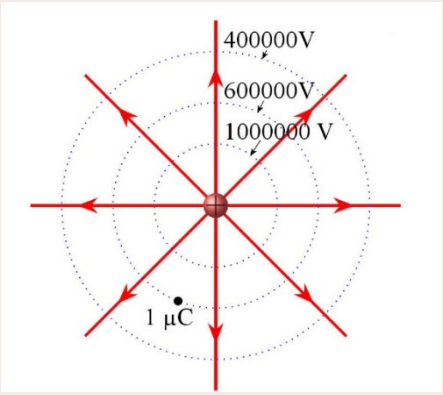
On peut maintenant utiliser le potentiel pour calculer l'énergie potentielle.

Exemple 4.2.2

Une petite charge de 1 μC est à 90 cm du centre d'une sphère ayant une charge de 60 μC. Quelle est l'énergie potentielle électrique de la petite charge ?

Nous allons commencer par trouver le potentiel fait par la sphère de 60 μC à une distance de 90 cm. À cette distance de la charge, le potentiel est de

$$V = \frac{kQ}{r}$$
$$= \frac{9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 60\times10^{-6}\,C}{0,9m}$$
$$= 600\,000V$$



On a donc une petite charge située à un endroit où le potentiel est de 600 000 V. La figure montre cette situation.

L'énergie potentielle électrique de la charge de 1 μC est donc

$$U_E = qV$$
$$= -1\times10^{-6}\,C\cdot 600\,000V$$
$$= -0,6J$$

Rappelons qu'avec cette façon de faire, on a donc calculé l'énergie potentielle de l'électron en deux étapes.

1) On a calculé le potentiel fait par la charge de 60 μC à l'endroit où est placée la charge de 1 μC (600 000 V).

2) On a calculé l'énergie de la charge de 1 μC avec $U_E = qV$.

Ça semble inutilement long, mais on verra bientôt les avantages de cette méthode.

Potentiel fait par plusieurs sphères chargées

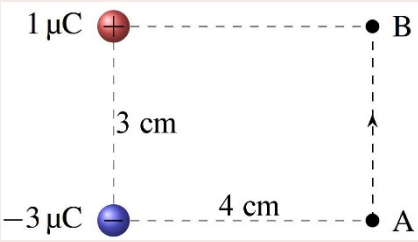
S'il y a plusieurs sphères (ou charges ponctuelles) autour d'un point où on veut connaitre le potentiel, le potentiel à cet endroit sera simplement la somme des potentiels faits par chacune des sphères.

Potentiel à un endroit fait par plusieurs sphères chargées (ou par des charges ponctuelles)

$$V = \sum \frac{kQ}{r}$$

Exemple 4.2.3

Considérons la situation montrée sur la figure.



a) Quel est le potentiel au point A ?

Le potentiel au point *A* est fait par deux charges. Le potentiel sera donc la somme des potentiels faits par chacune des charges.

Au point *A*, on est à 4 m de la charge de -3 µC et à 5 m (diagonale du rectangle) de la charge de 1 µC. Le potentiel est donc

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} \\ &= \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(-3\times10^{-6}C\right)}{4m} + \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 1\times10^{-6}C}{5m} \\ &= -4950V \end{aligned}$$

b) Quel est le potentiel au point B ?

Au point *B*, on est à 5 m (diagonale du rectangle) de la charge de -3 µC et à 4 m de la charge de 1 µC. Le potentiel est donc

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} \\ &= \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(-3\times10^{-6}C\right)}{5m} + \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 1\times10^{-6}C}{4m} \\ &= -3150V \end{aligned}$$

c) Quel travail faut-il faire pour prendre une charge de -5 µC initialement au repos au point A et la placer au repos au point B ? (Il n'y a pas de gravitation et de friction.)

On va résoudre ce problème avec l'énergie mécanique. Le travail externe qu'il faut faire se trouve avec la formule suivante.

$$E_k + U_E + W_{ext} = E_k' + U_E'$$

Comme la charge est au repos au début et à la fin, les énergies cinétiques sont nulles. On a alors

$$\begin{aligned} U_E + W_{ext} &= U_E' \\ W_{ext} &= U_E' - U_E \end{aligned}$$

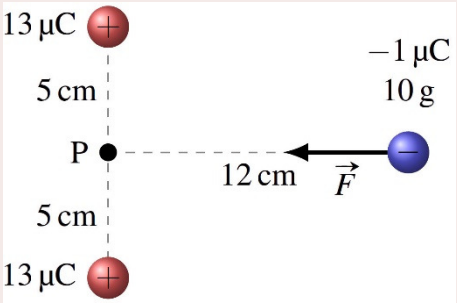
Comme l'énergie potentielle est qV, on a

$$\begin{aligned} W_{ext} &= qV' - qV \\ &= q\left(V' - V\right) \\ &= \left(-5\times10^{-6}C\right)\cdot\left(-3150V - -4950V\right) \end{aligned}$$

$$= -0,009J$$

(Autrement dit, on reçoit 0,009 J quand on déplace cette charge.)

Exemple 4.2.4



Une charge négative de -1 µC est initialement au repos à la position montrée sur la figure. Elle est cependant attirée vers le point *P* par les deux charges positives. Quelle sera sa vitesse quand elle arrivera au point *P* ? (Il n'y a pas de gravitation et de friction.)

On va résoudre ce problème avec la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique de la charge de -1 µC est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + U_E$$

<u>Énergie mécanique à l'instant 1 (situation illustrée sur la figure)</u>

Au départ, l'énergie cinétique est nulle. On peut trouver l'énergie potentielle avec

$$U_E = qV$$

Le potentiel à cet endroit est le potentiel fait par les deux charges positives. La distance entre ces charges et la position initiale de l'électron est

$$\sqrt{(5cm)^2 + (12cm)^2} = 13cm$$

Le potentiel est donc

$$\begin{aligned} V &= \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} \\ &= \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 13\times10^{-6}C}{0,13m} + \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 13\times10^{-6}C}{0,13m} \\ &= 1,8\times10^6 V \end{aligned}$$

L'énergie potentielle de la charge est donc

$$\begin{aligned} U_E &= qV \\ &= -1\times10^{-6}C\cdot 1,8\times10^6 V \\ &= -1,8J \end{aligned}$$

Ainsi, l'énergie mécanique initiale est

$$E_{mec} = -1,8J$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (charge au point P)

L'énergie mécanique au point *P* est

$$E'_{mec} = \frac{1}{2}mv'^2 + U'_E$$

Pour trouver l'énergie potentielle à cet endroit, il nous faut le potentiel. Au point *P*, on est à 5 cm des charges positives. Le potentiel est donc

$$\begin{aligned} V' &= \frac{kQ_1}{r'_1} + \frac{kQ_2}{r'_2} \\ &= \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 13\times10^{-6}C}{0,05m} + \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 13\times10^{-6}C}{0,05m} \\ &= 4,68\times10^6 V \end{aligned}$$

L'énergie potentielle de la charge à cet endroit est donc

$$\begin{aligned} U'_E &= qV' \\ &= -1\times10^{-6}C\cdot 4,68\times10^6 V \\ &= -4,68J \end{aligned}$$

L'énergie mécanique au point *P* est donc

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + U'_E \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,01kg\cdot v'^2 - 4,68J \\ &= 0,005kg\cdot v'^2 - 4,68J \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie mécanique

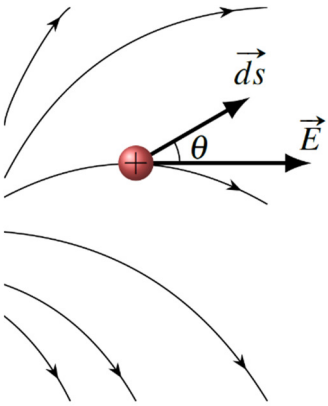
On a alors

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E'_{mec} \\ -1,8J &= 0,005kg\cdot v'^2 - 4,68J \\ v' &= 24\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

4.3 POTENTIEL ET CHAMP ÉLECTRIQUE

Changement de potentiel dans un champ électrique

Il y a un lien entre le champ électrique E et le potentiel V qui nous sera utile tout au long de ce chapitre. Pour le trouver, imaginons qu'une charge ponctuelle se déplace d'une distance ds dans un champ électrique.



Le travail fait par la force électrique sur la charge est

$$W_E = Fds\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad W_E = \vec{F}\cdot\vec{ds}$$
$$= qEds\cos\theta \qquad\qquad = q\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

(Les deux colonnes nous montrent deux notations différentes pour la même chose.)

Puisque la force électrique est une force conservative, le travail fait par la force électrique doit être égal à $-dU_E$, on a donc

$$dU_E = -qEds\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad dU_E = -q\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

Puisque $U_E = qV$, on doit avoir

$$dU_E = qdV$$

(On a fait la différentielle.) On arrive alors à

$$qdV = -qEds\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad qdV = -q\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

En éliminant les q, on arrive à

Lien entre *V* et *E*

$$dV = -Eds\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad dV = -\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

Plusieurs conclusions intéressantes peuvent être obtenues à partir de cette équation.

Le potentiel change quand il y a un champ électrique

La formule

$$dV = -Eds\cos\theta$$

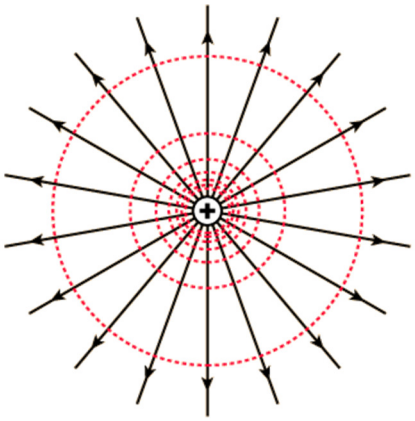
montre qu'un champ électrique fait changer le potentiel. Si le champ est nul, alors dV est toujours 0 peu importe la direction θ, ce qui signifie que le potentiel est le même partout. Par contre, s'il y a un champ électrique dans une région de l'espace, alors dV pourrait ne pas être nul, ce qui signifie que le potentiel n'est pas le même partout.

Cette formule montre aussi que le changement de potentiel est plus grand si le champ électrique est plus grand. Plus le champ est grand, plus le potentiel augmente rapidement et plus les lignes équipotentielles sont près les unes des autres. Cela signifie que

Propriété des surfaces équipotentielles

Plus les surfaces équipotentielles sont près les unes des autres, plus le champ électrique est grand.

C'est ce qui se passe avec une sphère chargée. Puisque le champ est de plus en plus grand à mesure qu'on s'approche de la sphère, le potentiel change de plus en plus rapidement et les surfaces équipotentielles sont de plus en plus près les unes des autres.



hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/equipot.html

Les surfaces équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ électrique

Si, dans une région où il y a un champ électrique, on se déplace d'une petite distance ds entre deux points sur une surface équipotentielle, on devrait avoir que

$$dV = 0$$

puisque, par définition, les deux points sont au même potentiel s'ils sont sur la même surface équipotentielle. Or, la différence de potentiel peut aussi se calculer avec

$$dV = -Eds\cos\theta$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$0 = -Eds\cos\theta$$

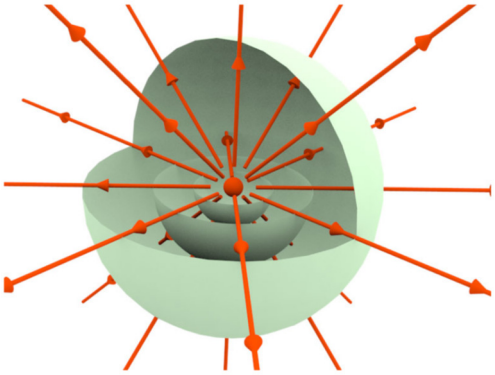
Comme il y a un champ, ce n'est pas E qui est nul. Comme on se déplace, ce n'est pas le déplacement qui est nul. C'est donc le cosinus qui doit être nul. Cela signifie que l'angle est de 90°. Cet angle est l'angle entre le champ et le déplacement. Puisqu'on se déplaçait

ici le long d'une surface équipotentielle, cela veut dire qu'il y a 90° entre le champ et la surface équipotentielle. Cette propriété est notre 6e propriété des lignes de champ.

Propriétés des lignes de champ

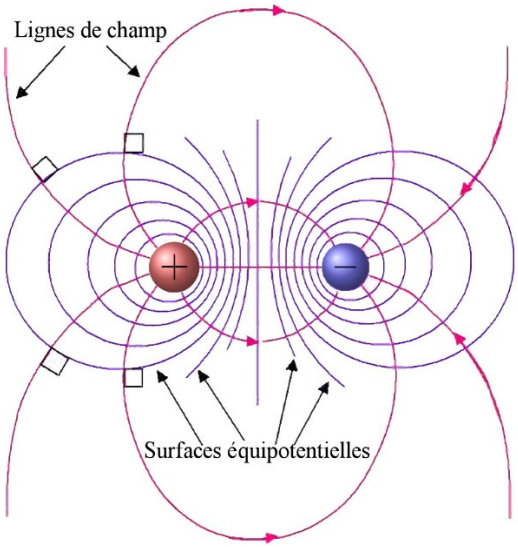
6) Les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

C'est ce qu'on peut voir sur cette image montrant les surfaces équipotentielles et les lignes de champ électrique d'une sphère chargée.

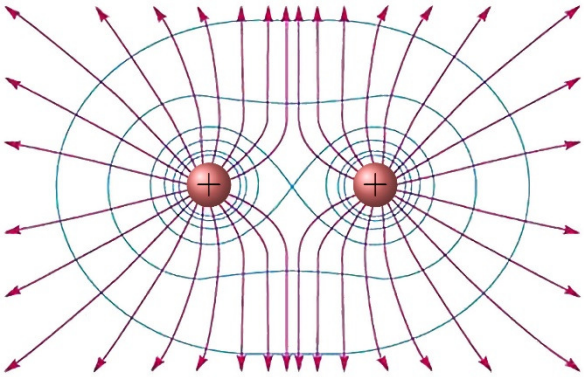


edberg.ccnysites.cuny.edu/F13-PHYS208/13/#/31

Les deux images suivantes montrent les lignes de champ et les surfaces équipotentielles pour 2 situations (2 charges de signes opposées et 2 charges positives). On voit bien sur ces figures que les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. (Mathématiquement, on dit qu'elles sont orthogonales.)



www.pstcc.edu/departments/natural_behavioral_sciences/Web%20Physics/Experim%2001.htm



www.lchsyes.org/cms/lib04/PA02001489/Centricity/Domain/87/AP%20Physics/APPhysCh19.pdf

Direction du champ électrique

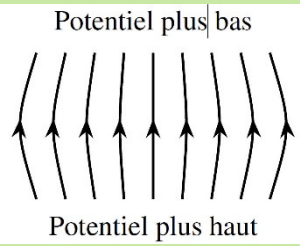
La formule

$$dV = -Eds\cos\theta$$

nous indique aussi, que si on se déplace dans le sens du champ électrique ($\theta = 0°$), on obtient un dV négatif, signifiant que le potentiel baisse dans cette direction.
Si on se déplace dans le sens opposé au champ électrique ($\theta = 180°$), on obtient un dV positif, signifiant que le potentiel monte dans cette direction.

On arrive donc à la conclusion suivante.

Le potentiel baisse si on va dans la direction du champ électrique et le potentiel monte si on va dans la direction opposée au champ électrique.



Mouvement des charges

Si on place une charge positive dans le champ, elle subira une force dans le sens du champ, donc vers l'endroit où le potentiel est le plus bas. Si on place une charge négative dans le champ, elle subira une force dans le sens contraire du champ, donc vers l'endroit où le potentiel est le plus élevé.

Les charges positives sont attirées vers les endroits où le potentiel est plus bas et les charges négatives sont attirées vers les endroits où le potentiel est plus haut.

On peut faire deux analogies pour visualiser ce mouvement et le concept de potentiel.

En 1813, Siméon Poisson fit l'analogie suivante entre l'électricité et la gravitation.

Gravitation	Quantité équivalente en électricité
Masse	Charge
Énergie gravitationnelle	Énergie électrique
Altitude	Potentiel

Ainsi, les charges positives cherchent à aller vers les endroits où le potentiel est le plus bas, exactement comme les masses cherchent à descendre vers la plus basse altitude sous l'effet de la gravitation.

On peut aussi faire l'analogie suivante avec la thermodynamique.

Thermodynamique	Quantité équivalente en électricité
Chaleur	Charge
Température	Potentiel

Ainsi, les charges positives cherchent à aller vers les endroits où le potentiel est le plus bas, exactement comme la chaleur cherche à aller vers les endroits où la température est basse. Cette analogie est vraiment bonne, car les équations qui décrivent le transport des charges dans la matière sont exactement identiques à celles décrivant le transport de la chaleur dans la matière.

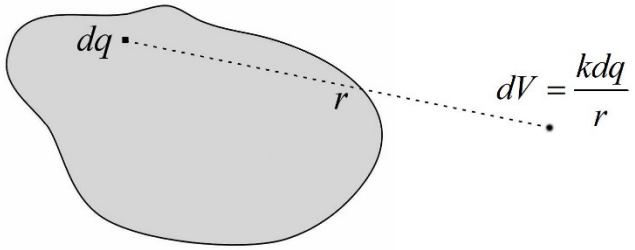
4.4 LE POTENTIEL FAIT PAR UN OBJET CHARGÉ

Jusqu'ici, on peut appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique si le potentiel est fait par des sphères chargées (ou des charges ponctuelles). Toutefois, il se pourrait que le potentiel soit fait par un objet chargé ayant une autre forme. On va voir ici comment trouver le potentiel dans ce cas.

Il y a deux façons de faire : on peut trouver le potentiel en séparant l'objet en charges ponctuelles ou on peut trouver le champ à partir de la formule du champ électrique fait par l'objet.

Calculer le potentiel en séparant l'objet en petits morceaux

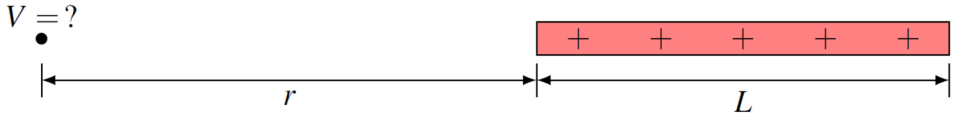
Examinons cette première façon de procéder. Pour calculer le potentiel, on sépare l'objet en charge ponctuelle et on calcule le potentiel fait par cette petite charge.



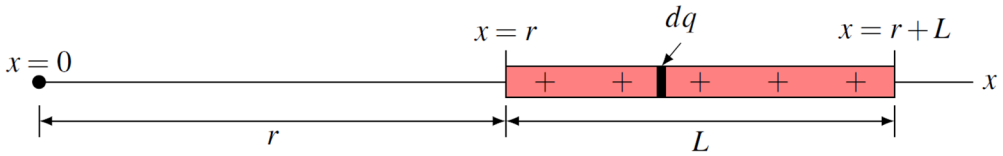
On somme ensuite les potentiels de toutes ces charges ponctuelles. Généralement, ce processus nous donnera une ou plusieurs intégrales à résoudre. Les calculs en 2 ou 3 dimensions sont encore un peu trop complexes pour vous, mais le calcul du potentiel fait par un objet en une dimension (tige) est à votre portée.

Potentiel vis-à-vis du bout d'une tige uniformément chargée

On a alors la situation suivante.



Si on sépare la tige en petites charges infinitésimales, on a



Le potentiel à $x = 0$ fait par la charge dq est

$$dV = \frac{kdq}{x}$$

La charge dq dépend de la longueur du petit morceau dx. On trouve cette charge en multipliant la charge linéique par la longueur du petit morceau.

$$dq = \lambda dx$$

On a alors

$$dV = \frac{k\lambda dx}{x}$$

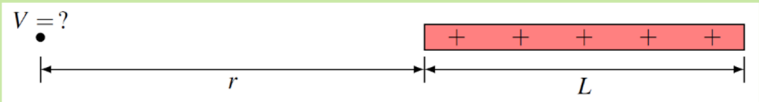
On obtient le potentiel en sommant tous ces potentiels en allant d'un bout à l'autre de la tige.

$$\begin{aligned} V &= \int_r^{r+L} \frac{k\lambda dx}{x} \\ &= k\lambda \int_r^{r+L} \frac{dx}{x} \\ &= k\lambda \left[\ln x\right]_r^{r+L} \\ &= k\lambda \left(\ln(r+L) - \ln(r)\right) \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'obtenir

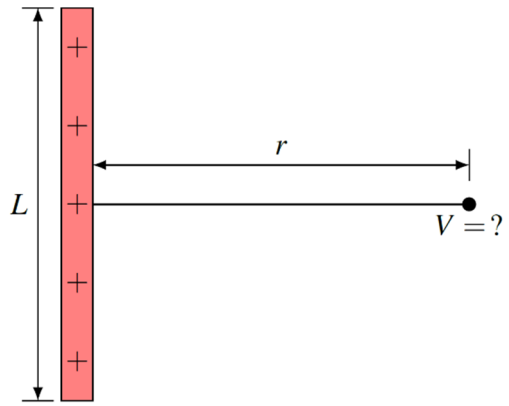
Potentiel vis-à-vis du bout d'une tige uniformément chargée

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{r+L}{r}\right)$$



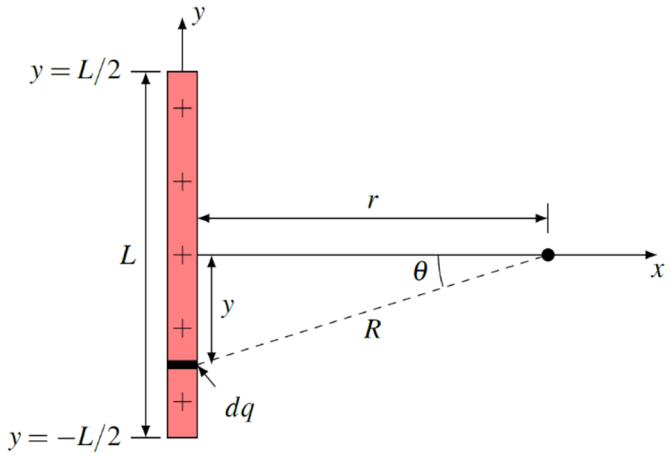
Potentiel vis-à-vis du milieu d'une tige uniformément chargée

On va maintenant déterminer le potentiel à l'endroit indiqué sur la figure.



Pour y arriver, on va placer des axes des x et des y avec l'origine au milieu de la tige. On prend un petit morceau de tige, à la position y de longueur dy et dont la charge est dq. Ce petit morceau fait un potentiel de

$$dV = \frac{kdq}{R}$$



La charge dq dépend de la longueur du petit morceau dy. On trouve cette charge en multipliant la charge linéique par la longueur du petit morceau.

$$dq = \lambda dy$$

Le potentiel dV est donc

$$dV = \frac{k\lambda dy}{R}$$

Puisque R est l'hypoténuse d'un triangle, on a

$$dV = \frac{k\lambda dy}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

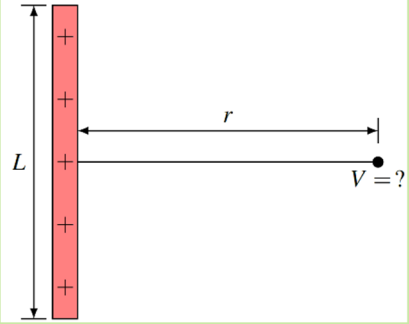
On trouve le potentiel en sommant tous les potentiels faits par chacun des petits morceaux. Cela veut dire qu'on fait l'intégrale et que nos bornes d'intégration sont les deux extrémités de la tige.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k\lambda dy}{\sqrt{y^2+r^2}} \\
&= k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{\sqrt{y^2+r^2}} \\
&= k\lambda \left[\ln\left(\sqrt{y^2+r^2} + y \right) \right]_{-L/2}^{L/2} \\
&= k\lambda \left[\ln\left(\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2+r^2} + \tfrac{L}{2} \right) - \ln\left(\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2+r^2} - \tfrac{L}{2} \right) \right] \\
&= k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2+r^2} + \tfrac{L}{2}}{\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2+r^2} - \tfrac{L}{2}} \right)
\end{aligned}
$$

En simplifiant un peu le tout, on obtient

Potentiel vis-à-vis le milieu d'une tige uniformément chargée

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{L^2+4r^2}+L}{\sqrt{L^2+4r^2}-L} \right)$$



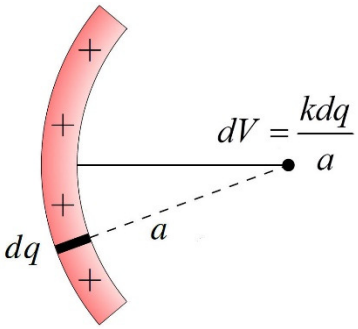
Potentiel au centre de courbure d'une tige chargée

On va maintenant déterminer le potentiel au centre de courbure d'une tige chargée.

Pour y arriver, on prend un petit morceau de tige de longueur *dl* et dont la charge est *dq*.

Ce petit morceau fait un petit potentiel de

$$dV = \frac{kdq}{a}$$



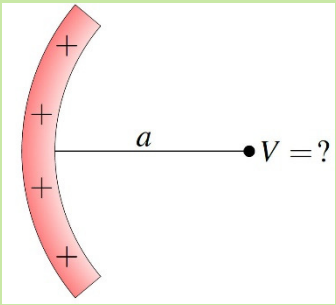
On trouve le potentiel total en sommant tous les petits potentiels faits par chacun des petits morceaux. Cela veut dire qu'on fait l'intégrale suivante.

$$V = \int \frac{kdq}{a}$$
$$= \frac{k}{a}\int dq$$

Cette intégrale est simplement la somme des charges de tous les petits morceaux, ce qui donne la charge totale de la tige. Ainsi, on a

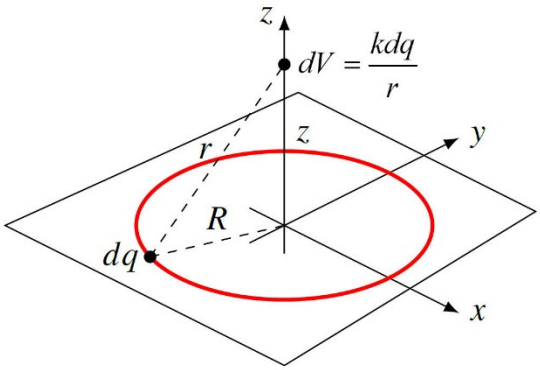
Potentiel au centre de courbure d'une tige chargée

$$V = \frac{kQ}{a}$$



Potentiel le long de l'axe d'un anneau

On va maintenant déterminer le potentiel le long de l'axe d'un anneau.



Pour y arriver, on prend un petit morceau de l'anneau dont la charge est *dq*. Ce petit morceau fait un potentiel de

$$dV = \frac{kdq}{r}$$

Puisque *r* est l'hypoténuse du triangle, on a

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

On trouve le potentiel en sommant tous les potentiels faits par chacun des petits morceaux.

$$V = \int \frac{kdq}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

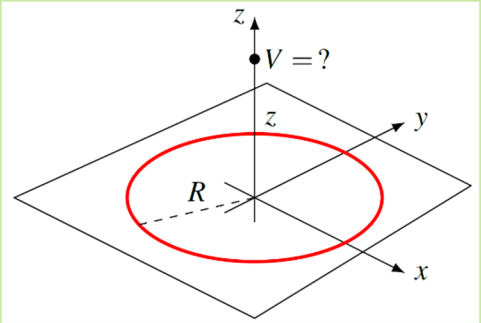
Comme *k, R* et D sont des constantes, on a

$$V = \frac{k}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int dq$$

L'intégrale est la somme des charges de l'anneau. Elle donne évidemment la charge totale de l'anneau. On a donc

Potentiel le long de l'axe d'un anneau

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$



Calculer le potentiel en utilisant la formule du champ électrique de l'objet (symétrie sphérique ou cylindrique)

On peut aussi trouver le potentiel à partir de la formule du champ électrique fait par l'objet.

Pour des objets chargés ayant une symétrie sphérique ou cylindrique, le champ dépend uniquement de la distance de l'objet. Dans ce cas, la force est centrale et on a le lien suivant entre la force et l'énergie potentielle.

$$U = -\int F dr$$

Or, puisque $U = qV$ et $F = qE$, on arrive à

$$qV = -\int qE dr$$
$$V = -\int E dr$$

On peut alors, avec cette formule, trouver V à partir de E.

<u>Potentiel à une distance r du centre d'une sphère chargée</u>

Extérieur de la sphère

Même si on a déjà la formule du potentiel à l'extérieur d'une sphère chargée, on va le refaire pour illustrer la méthode.

Avec la formule du champ à l'extérieur d'une sphère, on arrive à

$$\begin{aligned} V &= -\int \frac{kQ}{r^2} \cdot dr \\ &= \frac{kQ}{r} + cst \end{aligned}$$

Avec une constante d'intégration nulle, on arrive à notre formule du potentiel à l'extérieur d'une sphère, une formule qu'on connait déjà.

Intérieur de la sphère uniformément chargée

On se rappelle qu'à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée, le champ est

$$E = \frac{kQr}{\kappa R^3}$$

où κ est la permittivité relative de la substance. Le potentiel est donc

$$\begin{aligned} V &= -\int \frac{kQr}{\kappa R^3} dr \\ &= -\frac{kQr^2}{2\kappa R^3} + Cst \end{aligned}$$

On sait que le potentiel est nul à l'infini, mais on ne peut pas utiliser cette information puisque cette formule n'est pas valide à l'infini. Elle n'est valide que pour l'intérieur de la sphère. Par contre, cette formule doit donner le même potentiel que celui obtenu avec la formule valide à l'extérieur de la sphère quand on calcule le potentiel à la surface de la sphère. Selon la formule valide à l'extérieur, le potentiel à la surface est

$$V = \frac{kQ}{R}$$

Puisque la formule valide à l'intérieur doit donner la même valeur à la surface, on a

$$\begin{aligned} -\frac{kQR^2}{2\kappa R^3} + C &= \frac{kQ}{R} \\ -\frac{kQ}{2\kappa R} + C &= \frac{kQ}{R} \end{aligned}$$

On peut alors trouver la constante.

$$\begin{aligned} C &= \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2\kappa R} \\ &= \frac{kQ}{R}\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\right) \end{aligned}$$

La formule du potentiel à l'intérieur de la sphère est donc

$$\begin{aligned} V &= -\frac{kQr^2}{2R^3} + C \\ &= -\frac{kQr^2}{2R^3} + \frac{kQ}{R}\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne

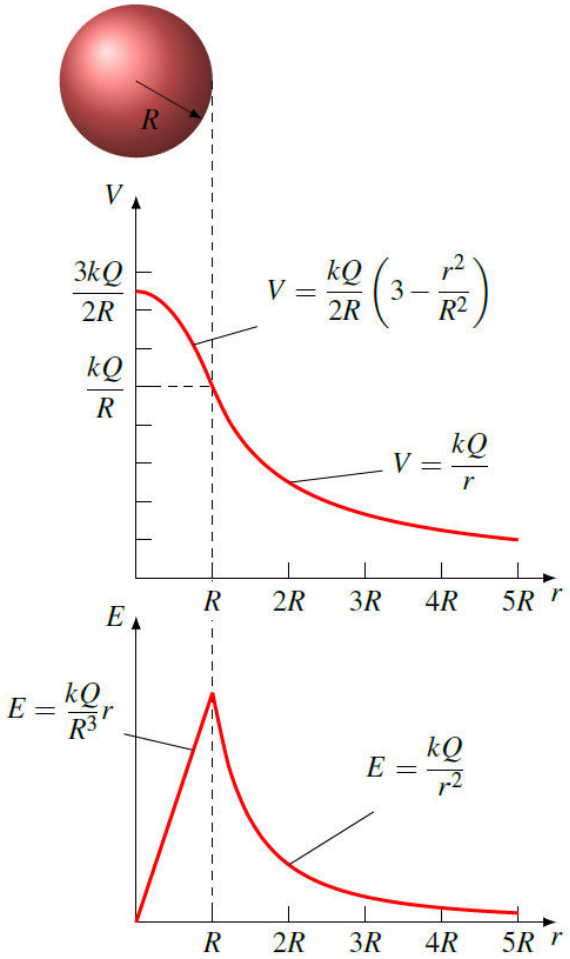
Potentiel à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée

$$V = \frac{kQ}{2R}\left(2 + \frac{1}{\kappa} - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Examinons ce que ça donne pour une sphère uniformément chargée faite d'une substance ayant une permittivité relative de 1. Dans ce cas, le potentiel est

$$V = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

À la page suivante, on peut voir les graphiques du potentiel et du champ électrique en fonction de la distance du centre de cette sphère. On remarque que le potentiel augmente tant qu'il y a du champ électrique. Plus E est grand, plus le potentiel augmente vite.



Potentiel d'une tige infinie

Comme il y a symétrie cylindrique, on utilise aussi

$$V = -\int E \cdot dr$$

pour trouver le potentiel. Avec le champ d'une tige infinie, on arrive à

$$\begin{aligned} V &= -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(r)\right] + cst \end{aligned}$$

Ici, on ne prendra pas une valeur nulle pour la constante, mais plutôt la valeur suivante.

$$cst = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_0)$$

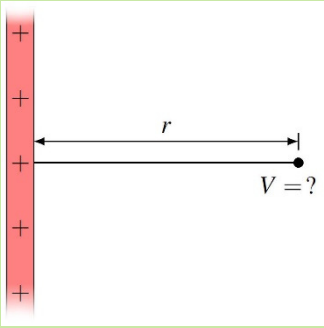
(Ça semble compliqué, mais ça va simplifier la formule finale.) Le potentiel est donc

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_0)$$

Puisque ln A – ln B = ln (A/B), on peut écrire

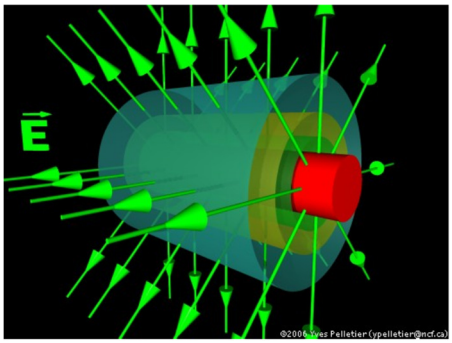
Potentiel près d'une tige chargée infinie

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$



Ce choix de constante permet de choisir le $V = 0$. Si $r_0 = 2$ m alors le $V = 0$ est à $r = 2$ m. Notez qu'on ne peut pas mettre le $V = 0$ à l'infini dans ce cas (comme on l'a fait pour la sphère) puisqu'on obtiendrait toujours $V = \pm$ infini avec la formule.

Notez que les lignes équipotentielles près d'une tige infinie ressemblent à ce qu'on peut voir sur la figure de droite.



web.ncf.ca/ch865/englishdescr/EquipotCylinder.html

Potentiel avec un champ uniforme

Ici, il n'y a pas de symétrie sphérique ou cylindrique. On peut quand même utiliser le champ pour trouver le potentiel. Comme

$$dV = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

on doit avoir

$$V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

On imagine alors un petit déplacement (on va se contenter de deux dimensions ici)

$$\overrightarrow{ds} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

Puisque le champ est constant, on arrive alors à

$$V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$= -\int E_x dx - \int E_y dy$$
$$= -E_x \int dx - E_y \int dy$$
$$= -E_x x - E_y y + cst$$

La constante semble un peu inutile, mais elle nous permet de choisir de façon arbitraire la position du $x = 0$ et du $y = 0$. On a donc

Potentiel dans un champ électrique uniforme

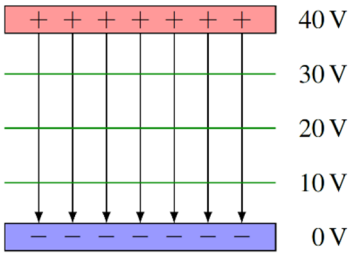
$$V = -E_x x - E_y y$$

Le $x = 0$ et le $y = 0$ sont arbitraires.

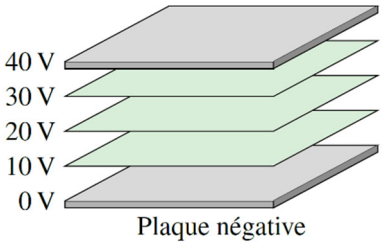
Notez qu'on ne peut pas mettre le $V = 0$ à l'infini dans ce cas (comme on l'a fait pour la sphère) puisqu'on obtiendrait toujours $V = \pm$ infini.

Cette formule peut être utilisée tant que le champ est constant, qu'il soit fait par une ou plusieurs plaques.

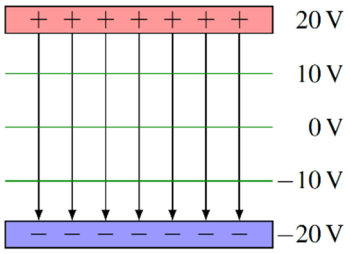
Examinons les surfaces équipotentielles dans un cas précis. Supposons qu'il y ait un champ de 1000 N/C entre deux plaques distantes de 4 cm. En plaçant le $y = 0$ à la plaque négative, on a les surfaces équipotentielles montrées à droite.



N'oubliez pas que ce sont des surfaces. En trois dimensions, ça ressemble donc plutôt à ceci.



N'oubliez pas non plus que le $y = 0$ est arbitraire. Les surfaces équipotentielles montrées à droite, dans lesquelles le $y = 0$ est exactement entre les plaques, sont toutes aussi bonnes.



Dans les deux cas, la plaque positive est à un potentiel 40 V plus élevé que la plaque négative. Notez que la plaque positive a toujours un potentiel plus élevé que la plaque négative.

Note sur les potentiels des tiges et plaques infinies

On aurait pu obtenir les formules du potentiel de la sphère en sommant les potentiels faits par toutes les charges de la sphère. Ça demande de faire une intégrale en 3-D, mais c'est possible de le faire. En procédant de cette façon, on aurait obtenu les mêmes formules.

Cependant, cette procédure aurait échoué pour la tige infinie et la plaque infinie. On aurait alors obtenu des potentiels infinis. (On peut d'ailleurs remarquer que c'est ce qui arrive si on fait tendre L vers l'infini dans notre formule de la tige de longueur L.)

C'est que dans ces deux cas, le choix de la constante qui place $V = 0$ à une distance infinie pour les charges ponctuelles et le fait que la charge de l'objet est infinie contribuent à faire diverger l'intégrale. Pour arriver à un résultat avec lequel on peut travailler, il faut utiliser un autre choix de constante d'intégration qui place le $V = 0$ ailleurs, ce qu'on a fait.

Potentiel fait par plusieurs objets chargés

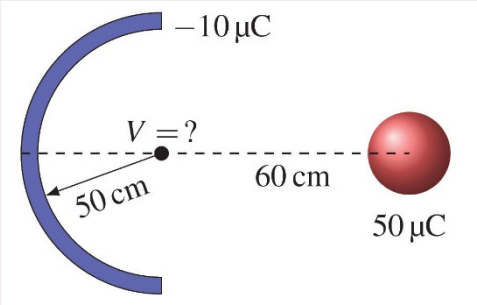
S'il y a plusieurs objets chargés qui entourent un endroit, le potentiel à cet endroit est simplement la somme des potentiels faits par chacun des objets.

Potentiel à un endroit

$$V = \sum V_{\text{de chaque objet}}$$

Exemple 4.4.1

Quel est le potentiel à l'endroit indiqué sur la figure ?



Il suffit d'additionner les potentiels faits par la sphère et la tige courbée.

Le potentiel fait par la sphère est

$$\begin{aligned} V &= \frac{kQ}{r} \\ &= \frac{9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 50\times10^{-6}\,C}{0,6m} \\ &= 750\,000V \end{aligned}$$

Le potentiel fait par la tige est

$$\begin{aligned} V &= \frac{kQ}{a} \\ &= \frac{9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(-10\times10^{-6}C\right)}{0,5m} \\ &= -180\,000V \end{aligned}$$

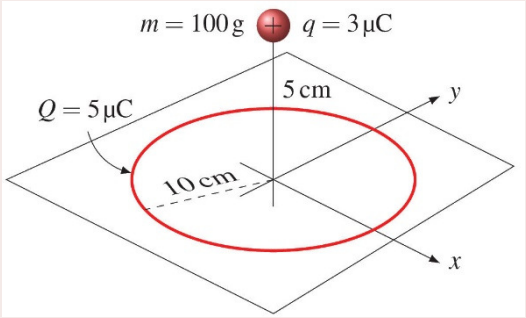
Le potentiel est donc

$$\begin{aligned} V &= V_{sphere} + V_{tige} \\ &= 750\,000V + -180\,000V \\ &= 570\,000V \end{aligned}$$

4.5 UTILISATION DES FORMULES DE POTENTIEL POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES

On peut maintenant utiliser ces résultats pour résoudre des problèmes avec la conservation de l'énergie mécanique.

Exemple 4.5.1



Une charge de 3 μC est placée initialement au repos sur l'axe d'un anneau, à 5 cm du plan de l'anneau. L'anneau a une charge de 5 μC et un rayon de 10 cm. Comme la charge et l'anneau sont tous deux positifs, ils se repoussent. Si l'anneau est fixe et que la charge peut se déplacer, quelle sera la vitesse de la charge quand elle sera très loin de l'anneau (s'il n'y a pas de gravitation et de friction) ?

On va trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique de la charge de 3 μC est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (quand la charge est à 5 cm du plan de l'anneau)

Comme la charge est immobile à ce moment, on a

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV = qV$$

Le potentiel est le potentiel fait par l'anneau. On a donc

$$\begin{aligned}
E_{mec} &= qV \\
&= q\frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}} \\
&= 3\times10^{-6}C\cdot\frac{9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot5\times10^{-6}C}{\sqrt{(0,1m)^2+(0,05m)^2}} \\
&= 3\times10^{-6}C\cdot402\,492V \\
&= 1,2075J
\end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand la charge est loin de l'anneau)

Quand la charge est loin de l'anneau, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned}
E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + qV' \\
&= \frac{1}{2}\cdot0,1kg\cdot v'^2 + 0 \\
&= 0,05kg\cdot v'^2 + 0
\end{aligned}$$

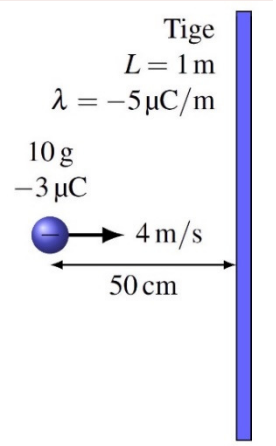
Le potentiel est nul parce qu'on est très loin de l'anneau et que le potentiel fait par un anneau est nul quand on est très loin de cet anneau. (C'est vrai pour tous les objets chargés, sauf les tiges infinies et les plaques infinies.)

Application du principe de conservation de l'énergie mécanique

Avec la conservation de l'énergie, on a

$$\begin{aligned}
E_{mec} &= E'_{mec} \\
1,2075J &= 0,05\cdot v'^2 \\
v' &= 4,91\tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

Exemple 4.5.2



Une charge de -3 µC ayant une vitesse de 4 m/s se dirige vers une tige négative telle qu'illustrée sur la figure. La charge étant repoussée par la tige, elle va ralentir et repartir vers la gauche. Quelle sera la distance minimum entre la charge et la tige (s'il n'y a pas de gravitation et de friction) ?

On va trouver la distance avec la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique de la charge négative est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (quand la charge est à 50 cm de la tige)

Initialement, l'énergie est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Le potentiel est le potentiel fait par la tige. On a donc

$$\begin{aligned}
E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + qV \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + q \cdot k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{L^2+4r^2}+L}{\sqrt{L^2+4r^2}-L}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0{,}1kg \cdot \left(4\tfrac{m}{s}\right)^2 \\
&\qquad + \left(-3\times10^{-6}C\right)\cdot 9\times10^{9}\tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(-5\times10^{-6}\tfrac{C}{m}\right)\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{(1m)^2+4\cdot(0{,}5m)^2}+1m}{\sqrt{(1m)^2+4\cdot(0{,}5m)^2}-1m}\right) \\
&= 0{,}8J + 0{,}135J \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \\
&= 1{,}038J
\end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand la charge est au plus près de la tige)

Quand la charge est au plus près de la tige, sa vitesse est nulle, l'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned}
E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + qV' \\
&= qV'
\end{aligned}$$

Application du principe de conservation de l'énergie mécanique

Avec la conservation de l'énergie, on a

$$\begin{aligned}
E_{mec} &= E'_{mec} \\
1{,}038J &= qV' \\
1{,}038J &= -3\times10^{-6}C \cdot V' \\
V' &= -345\,990V
\end{aligned}$$

Il reste à trouver à quelle distance de la tige on a ce potentiel avec cette formule

$$V' = k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{L^2+4r'^2}+L}{\sqrt{L^2+4r'^2}-L}\right)$$

Posons que

$$a = \sqrt{L^2+4r'^2}$$

On a alors

$$V' = k\lambda \ln\left(\frac{a+L}{a-L}\right)$$

$$-345\,990V = 9\times10^9\,\tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(-5\times10^{-6}\,\tfrac{C}{m}\right)\cdot\ln\left(\frac{a+1m}{a-1m}\right)$$

$$7,6887 = \ln\left(\frac{a+1m}{a-1m}\right)$$

$$e^{7,6887} = \frac{a+1m}{a-1m}$$

$$(a-1m)\cdot 2183,5 = a+1m$$

$$2183,5\cdot a - 2183,5m = a+1m$$

$$2182,5\cdot a = 2184,5m$$

$$a = 1,000916m$$

Cela signifie que

$$a = \sqrt{L^2+4r'^2}$$

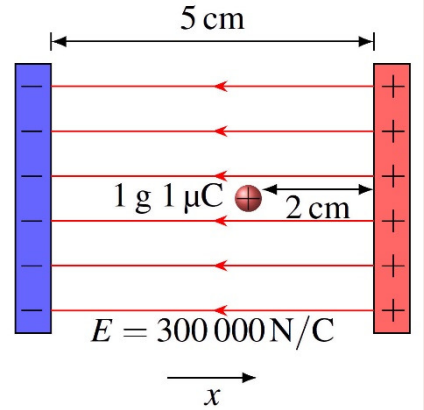
$$1,000916m = \sqrt{(1m)^2+4r'^2}$$

$$r' = 0,02141m$$

La charge s'approchera donc jusqu'à 2,141 cm de la tige.

Exemple 4.5.3

Une charge de 1 µC ayant une masse de 1 g est initialement au repos entre deux plaques parallèles possédant des charges opposées. Le champ entre les plaques est de 300 000 N/C. Si la charge est à 2 cm de la plaque positive, quelle sera la vitesse de la charge quand elle va frapper la plaque négative s'il n'y a pas de gravitation et de friction ?



L'énergie mécanique de cette charge est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (quand la charge est à 2 cm de la plaque positive)

Au départ, l'énergie de la charge est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Le potentiel est le potentiel dans un champ constant. Ce potentiel est

$$V = -E_x x - E_y y$$

Comme il n'y a pas de composante du champ en *y*, le potentiel est simplement

$$V = -E_x x$$

L'énergie mécanique de la charge est donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - qE_x x$$

L'énergie cinétique est nulle parce que la charge est initialement au repos. Il ne reste qu'à choisir l'endroit où on aura $x = 0$. On va choisir ici la plaque négative. Notre charge est donc à $x = 3$ cm au départ. Ainsi, l'énergie est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -qE_x x \\ &= -10^{-6}C \cdot \left(-300\,000\tfrac{N}{C}\right) \cdot 0,03m \\ &= 0,009J \end{aligned}$$

L'énergie mécanique à l'instant 2 (juste avant que la charge frappe la plaque)

L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + qV' \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 - qE_x x' \end{aligned}$$

Quand la charge frappe la plaque négative, elle est à $x' = 0$ cm. On a donc

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 - qE_x x' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,001kg \cdot v'^2 - 10^{-6}C \cdot \left(-300\,000\tfrac{N}{C}\right) \cdot 0m \\ &= 0,0005kg \cdot v'^2 \end{aligned}$$

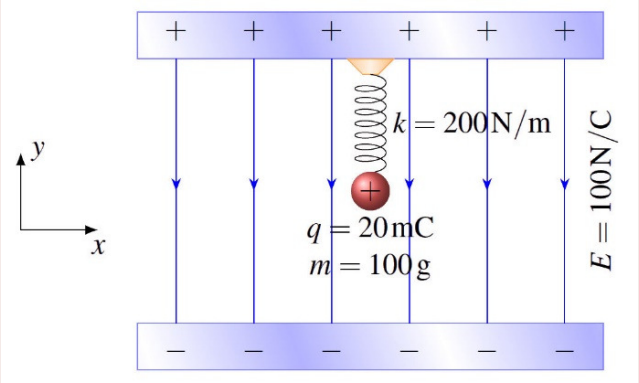
Application de la loi de la conservation de l'énergie mécanique

On a

$$E_{mec} = E'_{mec}$$
$$0,009J = 0,0005kg \cdot v'^2$$
$$v' = 4,243\tfrac{m}{s}$$

On pourrait se dire qu'on aurait pu trouver la vitesse avec les forces et l'accélération puisque l'accélération est constante. Cela pourrait vouloir dire que l'utilisation de l'énergie potentielle dans un champ constant est peu utile. C'est vrai pour cet exemple, mais l'exemple suivant, qui serait difficile à résoudre avec les forces, montre l'utilité de cette méthode.

Exemple 4.5.4



Un objet de 100 g est suspendu à un ressort qui n'est pas étiré initialement, tel qu'illustré sur la figure. (Il n'y a pas de friction.) Quel sera l'étirement maximal du ressort quand on laissera tomber la masse si on tient compte de la gravitation ?

Puisqu'on doit tenir compte de la gravitation, du ressort et du champ électrique, l'énergie du système masse-ressort est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + U \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + U_g + U_R + U_E \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 + qV \end{aligned}$$

Ici, on a un champ constant pour lequel il n'y a pas de composante en x. Le potentiel est donc

$$V = -E_y y$$

L'énergie mécanique devient alors

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 - qE_y y$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (quand le ressort n'est pas étiré)

En mettant le $y = 0$ à la position initiale de la masse, l'énergie initiale est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 - qE_y y \\ &= 0J + 0J + 0J - 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

Énergie à l'instant 2 (quand le ressort est étiré au maximum)

Quand le ressort est étiré au maximum, la masse a descendu de d (elle est donc à $y = -d$) et l'énergie cinétique est retournée à 0 J. On a donc

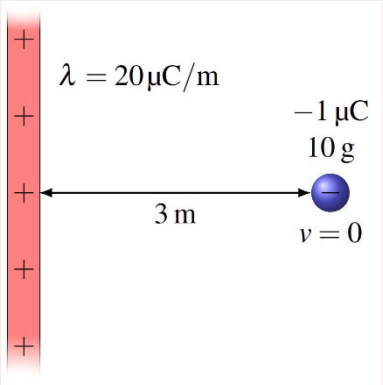
$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 - qE_y y' \\ &= 0J + 0{,}1kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot (-d) + \frac{1}{2} \cdot 200\tfrac{N}{m} \cdot d^2 - 0{,}02C \cdot \left(-100\tfrac{N}{C}\right) \cdot (-d) \\ &= -0{,}98N \cdot d + 100\tfrac{N}{m} \cdot d^2 - 2N \cdot d \\ &= -2{,}98N \cdot d + 100\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \end{aligned}$$

Application de la loi de la conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie nous donne

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E'_{mec} \\ 0J &= -2{,}98N \cdot d + 100\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \\ 0J &= -2{,}98N + 100\tfrac{N}{m} \cdot d \\ 2{,}98N &= 100\tfrac{N}{m} \cdot d \\ d &= 0{,}0298m = 2{,}98cm \end{aligned}$$

Exemple 4.5.5



Une charge négative est initialement à 3 m d'une tige infinie, tel qu'illustré sur la figure. On laisse alors partir cette charge qui est attirée par la tige infinie. Quelle sera la vitesse de la charge quand elle sera à 25 cm de la tige ? (Il n'y a pas de friction et de gravitation.)

L'énergie mécanique de la charge est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (quand la charge est à 3 m de la tige)

Si on choisit de placer notre $V = 0$ à $r = 3$ m, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + qV \\ &= 0 + 0 \\ &= 0J \end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand la charge est à 0,25 m de la tige)

À 0,25 m de la tige, le potentiel est

$$\begin{aligned} V' &= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r'}{3m}\right) \\ &= \frac{-20\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{2\pi\cdot 8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}\cdot\ln\left(\frac{0,25m}{3m}\right) \\ &= 893\,329V \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + qV' \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,01kg\cdot v'^2 + \left(-1\times10^{-6}C\right)\cdot 893\,329V \\ &= 0,005kg\cdot v'^2 - 0,893329J \end{aligned}$$

Application du principe de conservation de l'énergie mécanique

On a

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E'_{mec} \\ 0 &= 0,05kg\cdot v'^2 - 0,893329J \\ v' &= 13,37\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

4.6 ÉNERGIE POTENTIELLE D'UN OBJET CHARGÉ DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE

On se rappelle qu'il y a deux étapes pour calculer l'énergie électrique d'un objet. Ces étapes sont :

1) On calcule le potentiel qui dépend uniquement de la présence des charges autour de la charge dont on veut savoir l'énergie.

2) On calcule l'énergie électrique de la charge avec la formule $U = qV$.

Jusqu'ici, on s'est concentré sur la première partie en trouvant le potentiel fait par différent objet. On a vu que ce calcul peut devenir une intégrale.

La deuxième partie semblait plus simple, mais c'est simplement parce qu'on a toujours calculé l'énergie potentielle électrique de simples charges ponctuelles. Si l'objet n'est pas ponctuel, il faut séparer l'objet en petits morceaux. L'énergie potentielle de chaque petit morceau est alors

$$dU_E = Vdq$$

où V est le potentiel à l'endroit où est cette petite charge. Pour trouver l'énergie potentielle totale, on somme l'énergie potentielle de chaque petit morceau pour obtenir

$$U_E = \int Vdq$$

Dans ce calcul, il faut intégrer sur tout le volume. Comme la plupart d'entre vous ne peuvent intégrer sur un volume, on va se contenter de calculer l'énergie potentielle de tiges. Dans ce cas, on sépare la tige en petits morceaux de longueur dx dont la charge est λdx. L'énergie potentielle devient alors

Énergie potentielle d'une tige chargée

$$U_E = \int V\lambda dx$$

Exemple 4.6.1

Une tige uniformément chargée est près d'une sphère, tel qu'illustré sur la figure. Quelle est l'énergie potentielle électrique de la tige ?

Pour trouver l'énergie potentielle, on va séparer la tige en petites charges dont la charge est λdx. L'énergie de ce petit morceau est

$$\begin{aligned} dU_E &= Vdq \\ &= V\lambda dx \end{aligned}$$

Le potentiel est le potentiel fait par la sphère (kQ/r). Comme notre distance est plutôt notée x ici, le potentiel fait par la sphère est

$$V = \frac{kQ}{x}$$

L'énergie potentielle du petit morceau est donc

$$dU_E = \frac{kQ}{x}\lambda dx$$

En sommant l'énergie de tous les morceaux, on arrive à

$$U_E = \int_{3m}^{5m} \frac{kQ}{x}\lambda dx$$

Les bornes d'intégration sont 3 m et 5 m parce qu'un bout de la tige est à 3 m du centre de la sphère et l'autre bout est à 5 m du centre de la sphère.

L'énergie est donc

$$\begin{aligned} U_E &= kQ\lambda \int_{3m}^{5m} \frac{1}{x} dx \\ &= kQ\lambda \left[\ln(x)\right]_{3m}^{5m} \\ &= kQ\lambda \left[\ln(5m) - \ln(3m)\right] \\ &= kQ\lambda \ln\left(\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

Comme la charge de la sphère est $Q = 40$ µC et que la charge linéique de la tige est

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{50\mu C}{2m} \\ &= 25 \tfrac{\mu C}{m} \end{aligned}$$

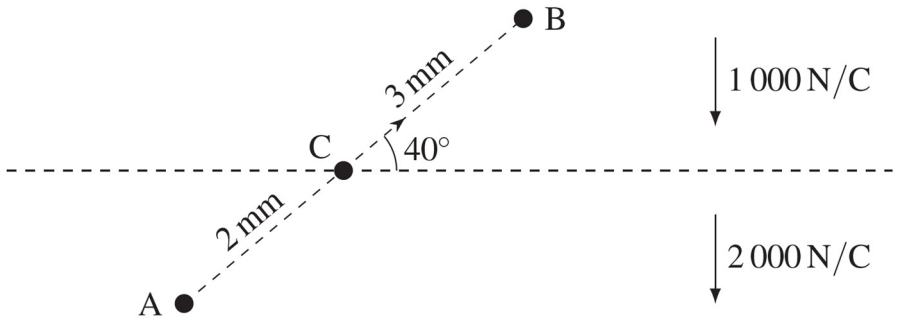
l'énergie est

$$\begin{aligned} U_E &= 9\times10^9 \tfrac{Nm^2}{C^2} \cdot 40\times10^{-6} C \cdot 25\times10^{-6} \tfrac{C}{m} \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= 4,597 J \end{aligned}$$

4.7 DIFFÉRENCE DE POTENTIEL À PARTIR DU CHAMP

On sait comment trouver la différence de potentiel entre deux points si on connait la formule du potentiel. Toutefois, on doit connaitre la configuration de charge pour pouvoir calculer le potentiel.

Toutefois, on pourrait tomber sur une situation où on connait le champ, mais pas la configuration des charges qui font ce champ. Par exemple, on pourrait demander le travail qu'il faut faire pour déplacer une charge de 5 µC du point A au point B dans cette situation.



On connait le champ, mais pas la position des charges qui font ce champ. Comment peut-on alors calculer le potentiel pour calculer l'énergie potentielle de la charge aux points A et B ?

Ici, nous allons trouver une façon de calculer la variation de potentiel entre deux points à partir du champ. Cela signifie qu'on ne connaitra pas le potentiel au point *A* et *B*, mais on connaitra la variation de potentiel entre ces deux positions. Avec cette variation, on pourra obtenir la variation d'énergie potentielle.

Trouvons premièrement le lien entre la variation de potentiel et la variation d'énergie potentielle.

Puisque $U_E = qV$, la différence d'énergie potentielle entre deux points est

$$\begin{aligned}\Delta U_E &= U'_E - U_E \\ &= qV' - qV \\ &= q\left(V' - V\right)\end{aligned}$$

Ce qui nous amène à

Variation d'énergie électrique à partir de la variation de potentiel

$$\Delta U_E = q\Delta V$$

Une fois que la variation d'énergie potentielle électrique est obtenue, on peut utiliser

$$\Delta E_k + \Delta U = 0$$

pour résoudre le problème s'il n'y a pas de force externe ou de force non conservative. Cette formule dit essentiellement que l'énergie mécanique reste la même.

S'il y a des forces externes ou des forces non conservatives, on utilise plutôt

$$\Delta E_k + \Delta U = W_{ext} + W_{nc}$$

Cette formule dit essentiellement que le changement d'énergie mécanique est égal aux travaux faits par les forces externes et les forces non conservatives.

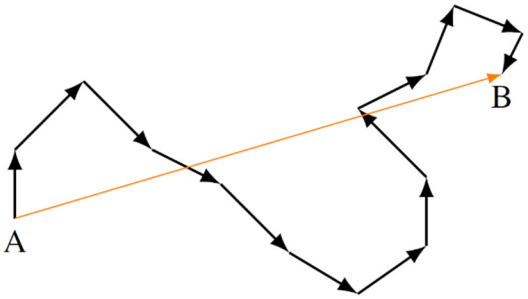
La variation de potentiel entre deux points dans un champ électrique uniforme

On sait qu'il y a un lien entre le changement de potentiel et le champ électrique.

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

En sommant toutes ces différences de potentiel en allant du point A au point B dans un champ uniforme, on arrive à

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \int_A^B \overrightarrow{ds}$$



Or, la somme de tous ces petits déplacements est simplement un vecteur qui va de la position initiale à la position finale. Si on appelle ce vecteur $\overrightarrow{\Delta s}$, on arrive à

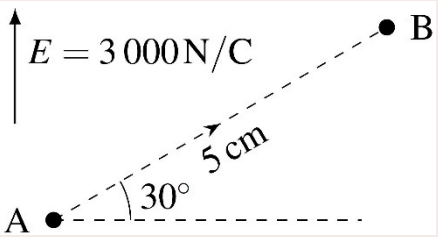
$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\Delta s}$$

La différence de potentiel entre ces deux points est donc

Différence de potentiel entre deux points dans un champ uniforme

$$\Delta V = -E\Delta s \cos\theta \qquad \text{ou} \qquad \Delta V = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\Delta s}$$

Exemple 4.7.1



De combien change l'énergie potentielle électrique d'une charge de 10 µC quand elle se déplace du point A au point B dans cette figure ?

La différence de potentiel entre A et B est

$$\begin{aligned}\Delta V_{AB} &= -E\Delta s \cos\theta \\ &= -3000\tfrac{N}{C} \cdot 0,05m \cdot \cos 60° \\ &= -75V\end{aligned}$$

Cela signifie que le potentiel au point B est plus bas de 75 V que le potentiel au point A.

Notez que l'angle de 60° est l'angle entre le vecteur champ électrique et le vecteur déplacement.

Ainsi, la variation d'énergie électrique de la charge est

$$\begin{aligned}\Delta U_E &= q\Delta V \\ &= 10\mu C \cdot (-75V) \\ &= -0,00075J\end{aligned}$$

Exemple 4.7.2

Le champ électrique dans une région est donné par $\vec{E} = \left(10\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)\frac{N}{C}$.

Quelle est la différence de potentiel quand on passe du point (0 m, 0 m, 2 m) au point (-2 m, 5 m, 6 m) ?

Quand on a les composantes de champ et du déplacement, on trouve plus facilement la différence de potentiel en calculant le produit scalaire avec la formule utilisant les composantes. Pour commencer, trouvons les composantes du déplacement.

Le déplacement est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Delta s} &= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \\ &= (-2m - 0m)\vec{i} + (5m - 0m)\vec{j} + (6m - 2m)\vec{k} \\ &= \left(-2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}\right)m\end{aligned}$$

La différence de potentiel est donc

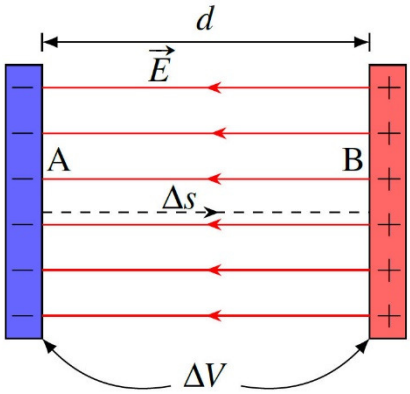
$$\begin{aligned}\Delta V &= -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\Delta s} \\ &= -\left(10\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}\right)\tfrac{N}{C} \cdot \left(-2\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}\right)m \\ &= -\left(10\tfrac{N}{C} \cdot (-2m) + \left(-3\tfrac{N}{C}\right) \cdot 5m + 5\tfrac{N}{C} \cdot 4m\right) \\ &= 15V\end{aligned}$$

Différence de potentiel entre deux plaques

On peut donc se servir de l'équation

$$\Delta V = -E\Delta s\cos\theta$$

pour faire le lien entre le champ entre deux plaques et la différence de potentiel entre deux plaques. Utilisons donc cette équation pour calculer la différence de potentiel quand on passe de la plaque négative (point A) à la plaque positive (point B).



La différence de potentiel est

$$\begin{aligned}\Delta V &= -E\Delta s\cos\theta \\ &= -Ed\cos 180°\end{aligned}$$

Comme on va d'une plaque à l'autre et que la distance entre les plaques est d, on a $\Delta s = d$. De plus, l'angle est de 180°, car notre déplacement est dans la direction opposée au champ électrique. On a donc le résultat suivant.

Différence de potentiel entre deux plaques parallèles ayant des charges opposées

$$\Delta V = Ed$$

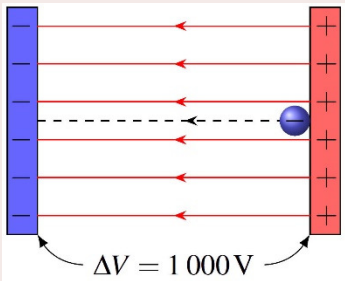
La plaque positive est toujours à un potentiel plus élevé que la plaque négative.

Cette dernière équation nous montre aussi qu'on peut exprimer le champ électrique avec une autre unité. Puisque la différence de potentiel est en volt et que la distance est en mètre, on peut déduire que le champ est en V/m.

Autre unité pour le champ électrique

$$1\tfrac{V}{m} = 1\tfrac{N}{C}$$

Exemple 4.7.3



Un électron est entre deux plaques parallèles ayant des charges opposées. Quel travail doit-on fournir pour déplacer un électron de la plaque positive à la plaque négative ? L'électron est au repos au début et à la fin de son mouvement. (Il n'y a pas de gravitation et de friction.)

Puisqu'il n'y a pas de force non conservative et que seule l'énergie électrique est présente, on a

$$\Delta E_k + \Delta U_E = W_{ext}$$

Puisque l'électron est au repos au début et à la fin du mouvement, la variation d'énergie cinétique est nulle. Il reste donc

$$\Delta U_E = W_{ext}$$

Puisque $\Delta U_E = q\Delta V$, on a

$$q\Delta V = W_{ext}$$

Comme le potentiel baisse de 1000 V (la plaque négative a toujours un potentiel inférieur à la plaque positive.), le travail externe est

$$\begin{aligned} W_{ext} &= q\Delta V \\ &= \left(-1,602\times10^{-19}C\right)\cdot\left(-1000V\right) \\ &= 1,602\times10^{-16}J \end{aligned}$$

L'électronvolt

Le joule n'est pas une unité très pratique quand on fait des calculs avec des protons et des électrons. Pour cette raison, on a inventé une autre unité d'énergie, qu'on a déjà utilisée dans le cours de physique moderne. Il s'agit de l'électronvolt. L'électronvolt est l'énergie cinétique acquise par un électron initialement au repos quand il passe d'un endroit où le potentiel est 0 V à un endroit où le potentiel est de 1 V en l'absence de force externe. Cette variation d'énergie est

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= -\Delta U_E \\ &= -q\Delta V \\ &= -\left(-1,602\times10^{-19}C\right)\cdot\left(1V-0V\right) \\ &= 1,602\times10^{-19}J \end{aligned}$$

On obtient donc la correspondance suivante.

L'électronvolt (eV)

$$1eV = 1,602\times10^{-19}J$$

Ainsi, dans l'exemple précédent, le travail à fournir pour déplacer l'électron est de 1000 eV.

Calcul de ΔV si E ou θ change

Pour trouver la différence de potentiel entre deux points dans ce cas, il suffit de séparer la trajectoire allant d'un point à l'autre en parties où le champ électrique et l'angle entre le champ et la trajectoire sont constants. On calcule alors la différence de potentiel dans chacune de ces parties et on somme ensuite toutes les différences de potentiel ainsi obtenues pour arriver à la différence de potentiel entre les deux points.

Différence de potentiel entre deux points dans un champ non uniforme

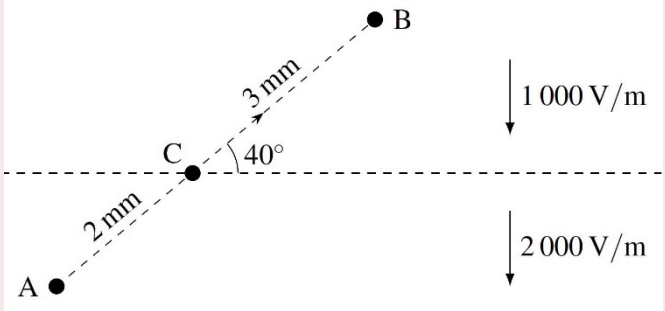
$$\Delta V = -\sum E\Delta s\cos\theta$$

$$\Delta V = -\sum \vec{E}\cdot\overrightarrow{\Delta s}$$

On sépare la trajectoire en parties où E est uniforme et θ est constant.

Exemple 4.7.4

Quel travail faut-il faire pour prendre une charge de 5 μC au repos au point A et la placer au repos au point B dans la situation montrée sur la figure ? (Il n'y a pas de gravitation et de friction.)



(La ligne pointillée horizontale montre la frontière entre la région où le champ est 1000 V/m et la région où le champ est 2000 V/m.)

Puisqu'il n'y a pas de force non conservative et que seule l'énergie électrique est présente, on a

$$\Delta E_k + \Delta U_E = W_{ext}$$

Puisque l'électron est au repos au début et à la fin du mouvement, la variation d'énergie cinétique est nulle. Il reste donc

$$\Delta U_E = W_{ext}$$

Puisque $\Delta U_E = q\Delta V$, on a

$$q\Delta V = W_{ext}$$

Pour trouver la différence de potentiel, on va séparer la trajectoire en parties où le champ et l'angle sont constants. On va donc séparer la trajectoire en 2 parties.

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{AC} + \Delta V_{CB}$$

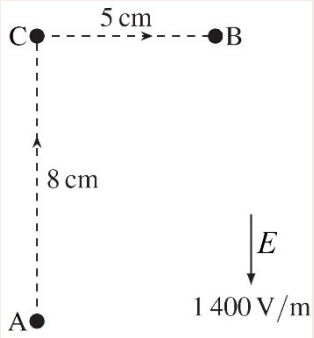
On peut alors calculer la différence de potentiel, car le champ et l'angle sont constants pour chacune de ces parties.

$$\begin{aligned}
\Delta V_{AB} &= \Delta V_{AC} + \Delta V_{CB} \\
&= -E_1 \Delta s_1 \cos\theta_1 - E_2 \Delta s_2 \cos\theta_2 \\
&= -2000\tfrac{N}{C} \cdot 0,002m \cdot \cos 130° - 1000\tfrac{N}{C} \cdot 0,003m \cdot \cos 130° \\
&= 2,571V + 1,928V \\
&= 4,499V
\end{aligned}$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned}
W_{ext} &= q\Delta V \\
&= 5\times10^{-6} C \cdot 4,499V \\
&= 2,25\times10^{-5} J
\end{aligned}$$

Exemple 4.7.5



Quelle est la différence de potentiel quand on passe du point *A* au point *B* en suivant la trajectoire montrée dans cette figure ?

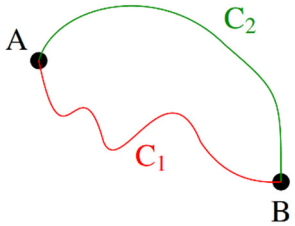
Pour trouver la différence de potentiel, on va séparer la trajectoire en parties où le champ et l'angle sont constants. On va donc séparer la trajectoire en 2 parties.

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{AC} + \Delta V_{CB}$$

On peut alors calculer la différence de potentiel, car le champ et l'angle sont constants pour chacune de ces parties.

$$\begin{aligned}\Delta V_{AB} &= \Delta V_{AC} + \Delta V_{CB} \\ &= -E_1 \Delta s_1 \cos\theta_1 - E_2 \Delta s_2 \cos\theta_2 \\ &= -1400\tfrac{V}{m} \cdot 0,08m \cdot \cos 180° - 1400\tfrac{V}{m} \cdot 0,05m \cdot \cos 90° \\ &= 112V + 0V \\ &= 112V\end{aligned}$$

Le fait que la force électrique soit conservative signifie aussi que la variation d'énergie potentielle est indépendante de la trajectoire suivie pour aller d'un point à un autre entre deux points. Si une charge passe du point A au point B sur cette figure, la variation d'énergie potentielle est la même en passant par le trajet C_1 ou par le trajet C_2. Cela veut aussi dire qu'on obtiendra toujours la même différence de potentiel entre A et B, peu importe le trajet suivi pour passer d'un point à l'autre puisque

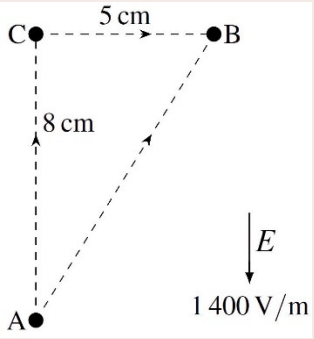


$$\begin{aligned}\Delta U_{E1} &= \Delta U_{E2} \\ q\Delta V_1 &= q\Delta V_2 \\ \Delta V_1 &= \Delta V_2\end{aligned}$$

Ainsi on a

> La différence de potentiel entre deux points est indépendante du trajet utilisé pour calculer la différence de potentiel.

Exemple 4.7.6



Quelle est la différence de potentiel quand on passe du point *A* au point *B* ?

Au lieu de suivre la trajectoire suivie dans l'exemple précédent, on va prendre une trajectoire qui va directement de A à B. Alors, la différence de potentiel est

$$\begin{aligned}\Delta V_{AB} &= -E\Delta s\cos\theta \\ &= -1400\tfrac{V}{m}\cdot\sqrt{(0,05m)^2+(0,08m)^2}\cdot\cos 148° \\ &= -1400\tfrac{V}{m}\cdot 0,09434m\cdot\cos 148° \\ &= 112V\end{aligned}$$

Remarquez que le calcul avec le trajet en ligne droite n'est pas nécessairement plus facile que le calcul fait avec l'autre trajectoire puisqu'il fallait calculer la longueur du trajet et l'angle entre la trajectoire et le champ, alors que ce n'était pas nécessaire avec la trajectoire qui passait par le point C.

Calcul de ΔV si E ou θ change constamment

Si le champ ou l'angle varient constamment et qu'il n'y a pas de régions où le champ et l'angle sont constants, on va séparer le trajet en très petites parties, tellement petites qu'elles seront de longueur infinitésimale. Comme les parties du trajet sont très petites, on peut considérer que le champ et l'angle sont constants. La différence de potentiel sur ce petit bout de trajectoire est donc

$$dV = -Eds\cos\theta$$

On somme ensuite toutes ces différences de potentiel (ce qui correspond alors à faire une intégrale). On a alors

Différence de potentiel entre deux points dans un champ non uniforme

$$\Delta V = -\int E\cos\theta ds$$

$$\Delta V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

Ces intégrales sont appelées des *intégrales de lignes*, un type d'intégrale qu'on obtient quand on intègre une quantité en suivant une trajectoire. En trois dimensions, ça peut parfois être assez compliqué. Toutefois, en une dimension, le produit scalaire est simplement

$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = E_x dx$$

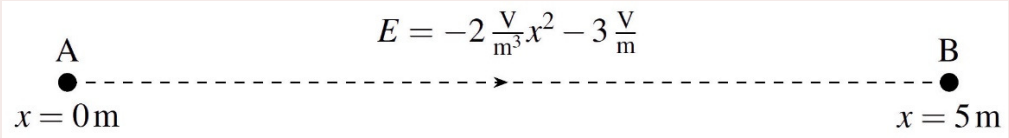
(On utilise *x,* mais ce pourrait être n'importe quelle autre coordonnée.) On obtient alors

Différence de potentiel en une dimension entre deux points dans un champ non uniforme

$$\Delta V = -\int E_x dx$$

Exemple 4.7.7

Quelle est la différence de potentiel quand on passe du point A au point B dans cette figure ?



Ici, la grandeur du champ varie continuellement le long de la trajectoire allant de A à B. La différence de potentiel est donc

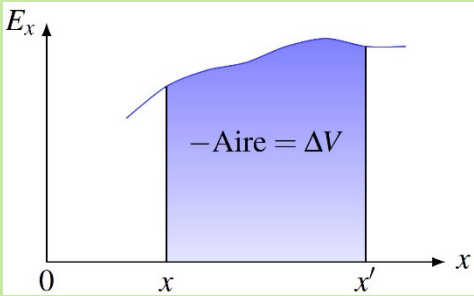
$$\begin{aligned}
\Delta V &= -\int_{0m}^{5m} E_x dx \\
&= -\int_{0m}^{5m} \left(-2\tfrac{V}{m^3}\cdot x^2 - 3\tfrac{V}{m}\right) dx \\
&= \int_{0m}^{5m} \left(2\tfrac{V}{m^3}\cdot x^2 + 3\tfrac{V}{m}\right) dx \\
&= \left[\tfrac{2}{3}\tfrac{V}{m^3}\cdot x^3 + 3\tfrac{V}{m}\cdot x\right]_{0m}^{5m} \\
&= \left[\tfrac{2}{3}\tfrac{V}{m^3}\cdot (5m)^3 + 3\tfrac{V}{m}\cdot 5m\right] - \left[\tfrac{2}{3}\tfrac{V}{m^3}\cdot (0m)^3 + 3\tfrac{V}{m}\cdot 0m\right] \\
&= 98,333V
\end{aligned}$$

Puisque l'intégrale est l'aire sous la courbe, la formule

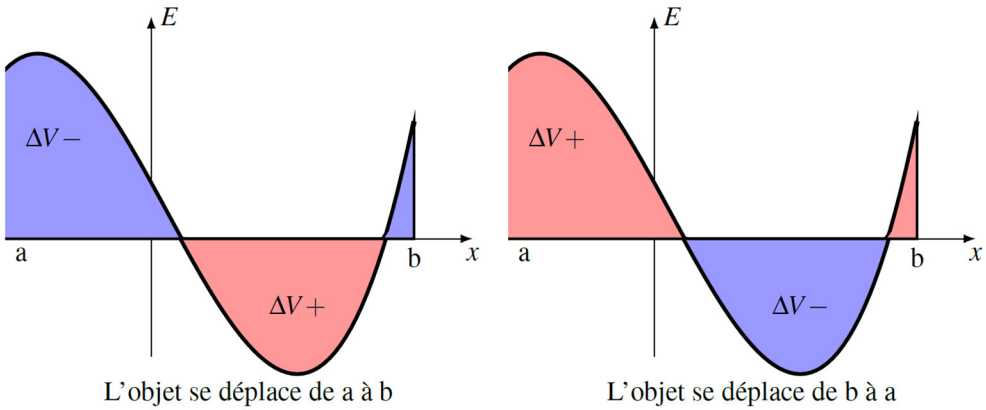
$$\Delta V = -\int E_x dx$$

nous indique que la différence de potentiel entre deux positions est égale à l'opposé de l'aire sous la courbe du champ électrique entre ces deux points.

Graphique du champ électrique



Comme c'est le cas en calcul intégral, l'aire est positive si elle est au-dessus de l'axe des x et négative si elle est en dessous. Avec le signe négatif devant l'intégrale, ces signes seront inversés. Si on se déplace d'une valeur de x plus élevée vers une valeur de x plus petite, le signe est de nouveau inversé parce que l'inversion des bornes d'une intégrale change le signe de la réponse. On a alors les signes suivants pour les aires pour le calcul de ΔV.



L'objet se déplace de a à b L'objet se déplace de b à a

4.8 LE CHAMP ÉLECTRIQUE À PARTIR DU POTENTIEL

Il est possible de trouver le champ électrique à partir du potentiel. C'est d'ailleurs une façon assez puissante pour trouver le champ dans des situations complexes, car le calcul du potentiel est plus facile à faire que le calcul du champ, principalement parce que le potentiel n'est pas un vecteur et qu'on n'a pas à le séparer en composantes.

On commence avec

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Ce produit scalaire peut s'écrire aussi

$$dV = -\left(E_x dx + E_y dy + E_z dz\right)$$

Si on se déplace uniquement dans la direction des x (y et z sont alors constants) on a donc

$$dV = -E_x dx$$

Si on isole le champ, on obtient

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Le champ est donc égal à l'opposé de la dérivée du potentiel. En fait, la notation n'est pas tout à fait correcte. Dans cette dérivée, on dérive en considérant que x est une variable et que y et z sont des constantes. Cette dérivée s'appelle une dérivée partielle et elle se note

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

On peut faire le même raisonnement avec les autres coordonnées pour obtenir

Composantes du champ électrique à partir du potentiel

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Exemple 4.8.1

Dans une certaine situation, le potentiel varie d'un endroit à l'autre. Si le potentiel à la position (*x, y, z*) est donné par

$$V = \left(5\tfrac{V}{m}\cdot x - 3\tfrac{V}{m^2}\cdot y^2 + 2\tfrac{V}{m}\cdot z\right)$$

Quel est le champ électrique au point (1 m, 5 m, 3 m) ?

La composante en *x* est

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial\left(5\tfrac{V}{m}\cdot x - 3\tfrac{V}{m^2}\cdot y^2 + 2\tfrac{V}{m}\cdot z\right)}{\partial x} \\ &= -5\tfrac{V}{m} \end{aligned}$$

Au point (1 m, 5 m, 3 m), on a donc E_x = -5 V/m.

La composante en *y* est

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial\left(5\tfrac{V}{m}\cdot x - 3\tfrac{V}{m^2}\cdot y^2 + 2\tfrac{V}{m}\cdot z\right)}{\partial y} \\ &= 6\tfrac{V}{m^2}\cdot y \end{aligned}$$

Au point (1 m, 5 m, 3 m), on a donc E_y = 6 V/m² · 5 m = 30 V/m.

La composante en *z* est

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial\left(5\tfrac{V}{m}\cdot x - 3\tfrac{V}{m^2}\cdot y^2 + 2\tfrac{V}{m}\cdot z\right)}{\partial z} \\ &= -2\tfrac{V}{m} \end{aligned}$$

Au point (1 m, 5 m, 3 m), on a donc E_z = -2 V/m.

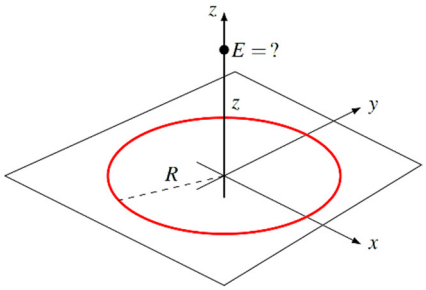
En combinant ces résultats, on trouve que le champ est

$$\vec{E} = \left(-5\vec{i} + 30\vec{j} - 2\vec{k}\right)\tfrac{V}{m}$$

Erreur fréquente : Oublier le signe négatif devant les dérivées.

Le champ électrique le long de l'axe d'un anneau

Pour bien illustrer la puissance de cette technique (qui sera peu utilisée ici, mais qui l'est beaucoup dans des niveaux plus avancés), trouvons le champ électrique le long de l'axe d'un anneau uniformément chargé. On a alors la situation montrée à droite.



Par symétrie, on sait que les composantes en x et y du champ seront nulles parce que ce serait paradoxal si le champ était incliné dans une direction par rapport à l'axe des z alors que l'anneau est identique dans toutes les directions par rapport à l'axe des z.

On peut alors trouver la composante en z du champ à partir de la dérivée du potentiel de l'anneau qu'on a trouvée précédemment.

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \\ &= -kQ\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}(2z) \end{aligned}$$

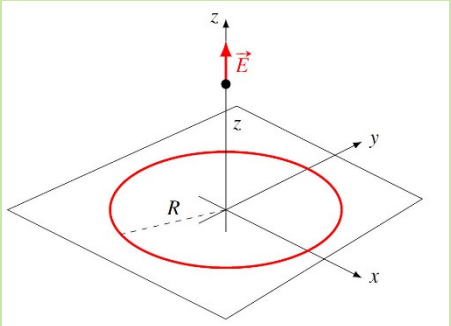
En simplifiant, on obtient

Champ électrique le long de l'axe d'un anneau

$$E_x = 0 \qquad E_y = 0 \qquad E_z = \frac{k|Q|z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le champ est dirigé dans la direction opposée au centre de l'anneau s'il est chargé positivement.

Le champ est dirigé vers le centre de l'anneau s'il est chargé négativement.



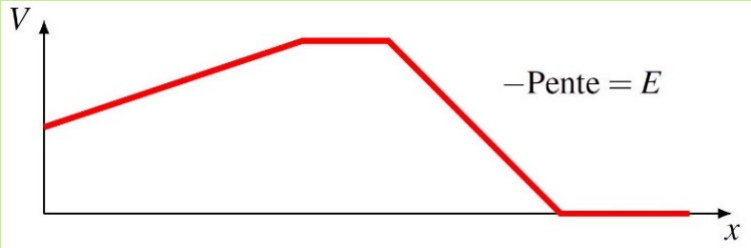
Interprétation graphique

En une dimension, la dérivée partielle en x devient une simple dérivée.

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Comme la dérivée est égale à la pente sur un graphique, cette équation signifie que le champ électrique est égal à l'opposé de la pente sur un graphique du potentiel en fonction de la position.

Graphique du potentiel



À ce point du chapitre, vous seriez en mesure de comprendre comment la notion de potentiel est arrivée en physique. Si jamais cet historique vous intéresse, lisez ceci.
https://physique.merici.ca/electricite/Historiquepotentiel.pdf

4.9 L'ÉNERGIE D'UN GROUPE DE CHARGES

Jusqu'ici, nous avons calculé l'énergie potentielle électrique d'une seule charge entourée d'autres charges. Ici, nous allons calculer l'énergie électrique de tout le système formé de plusieurs charges.

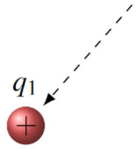
La formule de l'énergie

Pour trouver l'énergie électrique de plusieurs charges, on va construire le système en amenant une charge à la fois. On va calculer le travail qu'il faut faire pour apporter chaque charge. L'énergie électrique sera simplement la somme de tous les travaux qu'on a dû faire pour apporter toutes les charges.

Première charge

Il n'y a alors qu'une charge. Comme il n'y a pas de charges autour, le potentiel est nul. Le travail est donc

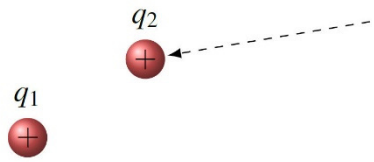
$$\begin{aligned} W_1 &= \Delta U = U_f - U_i = U_f \\ &= q_1 V \\ &= q_1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



Deuxième charge

La charge q_1 fait alors un potentiel à l'endroit où on va placer la charge q_2. Le travail fait pour amener la charge q_2 est donc

$$\begin{aligned} W_2 &= \Delta U = U_f - U_i \\ &= U_f = q_2 V = q_2 \frac{kq_1}{r_{12}} \\ &= \frac{kq_1 q_2}{r_{12}} \end{aligned}$$

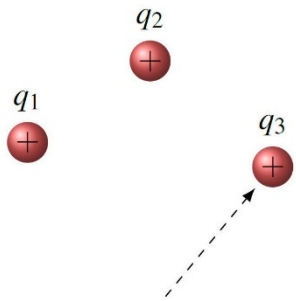


où r_{12} est la distance entre les charges 1 et 2. Pour la charge q_2, on obtient à nouveau la formule de l'énergie potentielle obtenue au début du chapitre.

Troisième charge

Les charges q_1 et q_2 font alors un potentiel à l'endroit où on va placer la charge q_3. Le travail fait pour amener la charge q_3 est donc

$$\begin{aligned} W_3 &= \Delta U = U_f - U_i \\ &= U_f = q_3 V = q_3 \left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}} \right) \\ &= \frac{kq_1 q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2 q_3}{r_{23}} \end{aligned}$$

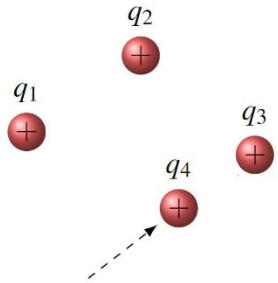


où r_{13} est la distance entre les charges 1 et 3 et r_{23} est la distance entre les charges 2 et 3.

Quatrième charge

Les charges q_1, q_2 et q_3 font alors un potentiel à l'endroit où on va placer la charge q_4. Le travail fait pour amener la charge q_4 est donc

$$\begin{aligned} W_4 &= \Delta U = U_f - U_i \\ &= U_f = q_4 V = q_4 \left(\frac{kq_1}{r_{14}} + \frac{kq_2}{r_{24}} + \frac{kq_3}{r_{34}} \right) \end{aligned}$$



$$= \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}}$$

où r_{14} est la distance entre les charges 1 et 4, r_{24} est la distance entre les charges 2 et 4 et r_{34} est la distance entre les charges 3 et 4.

Énergie totale

On pourrait continuer longtemps comme ça, mais on a suffisamment d'information pour trouver une formule générale. L'énergie électrique totale est la somme des travaux, donc

$$U_E = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$
$$U_E = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}}$$

On remarque assez facilement qu'on obtient la somme des énergies électriques de toutes les paires de charges possibles qu'on peut faire dans le système.

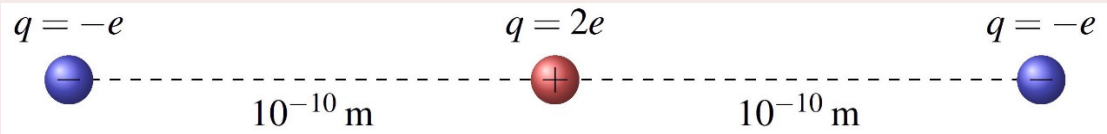
Énergie électrique d'un groupe de charges

$$U_E = \sum_{i<j} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$$

Autrement dit, on fait la somme sur toutes les paires de charges possibles.

Exemple 4.9.1

Quelle est l'énergie électrique de cette configuration de charges ?



Il y a trois paires de charges possibles ici. L'énergie électrique est donc

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} \\ &= \frac{k(-e)(2e)}{10^{-10}m} + \frac{k(-e)(-e)}{2\times10^{-10}m} + \frac{k(2e)(-e)}{10^{-10}m} \\ &= -\frac{2ke^2}{10^{-10}m} + \frac{ke^2}{2\times10^{-10}m} - \frac{2ke^2}{10^{-10}m} \\ &= \frac{ke^2}{10^{-10}m}\cdot\left(-2+\frac{1}{2}-2\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{9\times10^{9}\,\frac{Nm^2}{s^2}\cdot\left(1,609\times10^{-19}C\right)^2}{10^{-10}m}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)$$
$$= -8,084\times10^{-18}J$$
$$= -50,463eV$$

Si la réponse est négative, cela signifie qu'il faudra fournir de l'énergie à ce système pour le détruire. En effet, l'énergie minimale des charges quand elles sont loin les unes des autres est de 0 J (l'énergie cinétique minimale est 0 et l'énergie électrique est nulle quand les charges sont loin les unes des autres). Pour détruire le système, on doit donc lui fournir de l'énergie pour qu'elle augmente au moins jusqu'à 0 J. Ainsi, dans l'exemple précédent, il faudrait donc fournir au moins 50,463 eV pour détruire ce système. C'est pour ça qu'on appelle parfois l'énergie qu'on doit fournir (ici 50,463 eV) *l'énergie de liaison*. Si on calcule l'énergie électrique de l'atome d'hydrogène, on obtient -13,61 eV, ce qui signifie qu'il faudrait fournir au moins 13,61 eV pour arracher l'électron. Avec les atomes, on appelle souvent cette énergie (13,61 eV pour l'hydrogène) *l'énergie d'ionisation*.

Si la valeur de l'énergie électrique d'un système est positive, ce système pourra se détruire spontanément. On dit alors que le système est instable. L'énergie électrique ira alors en énergie cinétique des charges composant le système, dans des proportions qui dépendent des circonstances et des masses de ces charges.

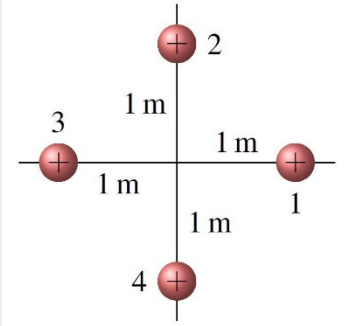
Quelle énergie faut-il calculer ?

On a vu précédemment qu'on pouvait calculer l'énergie potentielle électrique avec $U_E = qV$ et on vient juste de voir qu'on peut calculer l'énergie potentielle électrique en calculant l'énergie de toutes les paires de charges. On peut donc se demander quelle façon de calculer l'énergie potentielle on doit utiliser. En fait, cela dépend s'il y a une ou plusieurs charges qui vont se déplacer.

On va donc donner quelques règles à suivre pour résoudre correctement les problèmes.

Si toutes les charges se déplacent ou vont se déplacer, il faut utiliser l'énergie électrique de tout le groupe de charges.

Exemple 4.9.2



Voici un groupe de 4 charges identiques (même charge de 2 µC et même masse de 50 g). On laisse partir les 4 charges. Quelle sera la vitesse des charges quand elles seront loin les unes des autres charges ?

On va trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie. L'énergie potentielle électrique qu'on a

initialement dans ce système va devenir de l'énergie cinétique des 4 charges. Par symétrie, l'énergie sera distribuée également entre les 4 charges.

L'énergie initiale de ce système de charges est

$$\begin{aligned}
U_E &= \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}} \\
&= kq^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{\sqrt{2}m}\right) \\
&= kq^2\left(\frac{4}{\sqrt{2}m} + \frac{2}{2m}\right) \\
&= 9\times10^9\,\tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(2\times10^{-6}C\right)^2\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2}m} + \frac{2}{2m}\right) \\
&= 0{,}1378J
\end{aligned}$$

Cela signifie qu'à la fin, l'énergie cinétique de chaque charge sera de

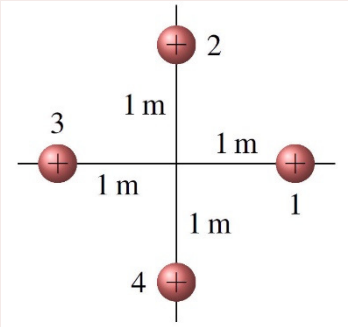
$$\begin{aligned}
E_k' &= \frac{0{,}1378J}{4} \\
&= 0{,}03446J
\end{aligned}$$

Avec $\frac{1}{2}mv^2$, on trouve alors que la vitesse de chaque charge est 1,174 m/s.

Passons à la règle suivante.

Si plusieurs (mais pas toutes) charges se déplacent ou vont se déplacer, il faut utiliser l'énergie électrique obtenue en calculant l'énergie de toutes les paires de charges (comme quand on calcule l'énergie du groupe de charges), mais on peut laisser tomber les paires qui comportent deux charges qui restent au repos.

Exemple 4.9.3



Voici un groupe de 4 charges identiques (même charge de 2 µC et même masse de 50 g). On laisse partir les charges 1 et 3 tout en gardant les 2 autres charges en place. Quelle sera la vitesse des charges 1 et 3 quand elles seront loin des 2 autres charges ?

On va trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie. Une partie de l'énergie potentielle électrique initiale du système va devenir de l'énergie cinétique des charges 1 et 3. Par symétrie, l'énergie sera distribuée également entre les 2 charges.

La partie de l'énergie potentielle électrique qui nous intéresse ici est

$$U_E = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}}$$

(On a fait toutes les paires possibles, sauf celle formée des charges 2 et 4 qui resteront à la même place.) On obtient alors

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}} \\ &= kq^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{\sqrt{2}m}\right) \\ &= kq^2\left(\frac{4}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m}\right) \\ &= 9\times10^9\,\tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(2\times10^{-6}C\right)^2\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m}\right) \\ &= 0{,}1198J \end{aligned}$$

Cela signifie qu'à la fin, l'énergie cinétique de chaque charge sera de

$$\begin{aligned} E_k' &= \frac{0{,}1198J}{2} \\ &= 0{,}05991J \end{aligned}$$

Avec $\frac{1}{2}mv^2$, on trouve alors que la vitesse de chaque charge est 1,55 m/s.

Voyons pourquoi cette méthode fonctionne. Comme les charges 2 et 4 restent toujours à la même place, il n'est pas nécessaire de compter l'énergie due à cette paire de charges. L'énergie de ces paires de charges restant la même, elle ne pourra pas être convertie en d'autres formes d'énergie et elle n'aura pas d'influence sur le résultat final.

On dit qu'on *peut* laisser tomber les paires de charges qui resteront immobiles. Ce n'est pas obligatoire. Si on calcule l'énergie de toutes les paires, ça va fonctionner quand même. Dans l'exemple, on aurait pu calculer l'énergie de tout le groupe de charges pour obtenir 0,137 8 J (comme à l'exemple 4.9.2). On aurait ensuite calculé l'énergie finale, mais on aurait alors eu de l'énergie potentielle dans l'énergie finale puisqu'il restait une paire de charges (la paire 2-4). L'énergie finale aurait été de

$$\begin{aligned} E_{mec}' &= E_k' + U_E' \\ &= E_k' + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} \\ &= E_k' + \frac{9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(2\times10^{-6}C\right)^2}{2m} \\ &= E_k' + 0{,}018J \end{aligned}$$

L'équation de la conservation de l'énergie aurait alors donné

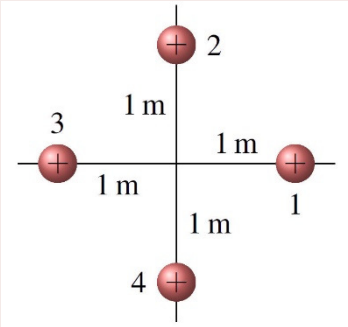
$$E_{mec} = E'_{mec}$$
$$0{,}1378J = E'_k + 0{,}018J$$
$$E'_k = 0{,}1198J$$

C'est le même résultat, mais c'est un peu plus long à calculer parce qu'on compte une paire de charges de plus dans l'énergie initiale et cette même paire de charges de plus dans l'énergie finale. Quand on fait la conservation de l'énergie, cette paire de plus s'annule et on obtient le même résultat.

Passons à la dernière règle.

Si seulement une charge se déplace ou va se déplacer, on calcule l'énergie potentielle de la charge avec $U_E = qV$.

Exemple 4.9.4



Voici un groupe de 4 charges identiques (même charge de 2 µC et même masse de 50 g). On laisse partir la charge 1 tout en gardant les autres charges en place. Quelle sera la vitesse de la charge 1 quand elle sera loin des autres charges ?

On va trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie. L'énergie potentielle électrique initiale de la charge 1 va devenir de l'énergie cinétique de cette charge.

L'énergie initiale de la charge 1 se calcule avec qV. Elle est donc

$$\begin{aligned}
U_E &= q_1 V \\
&= q_1\left(\frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{kq_3}{r_{13}} + \frac{kq_4}{r_{14}}\right) \\
&= \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} \\
&= kq^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{\sqrt{2}m}\right) \\
&= kq^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m}\right) \\
&= 9\times10^9\,\tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(2\times10^{-6}C\right)^2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m}\right) \\
&= 0{,}0689J
\end{aligned}$$

Cela signifie qu'à la fin, l'énergie cinétique de la charge sera de 0,068 9 J.

Avec ½mv^2, on trouve alors que la vitesse de la charge 1 est 1,66 m/s.

Examinons cette façon de faire. On remarque que l'énergie initiale (3e ligne)

$$U_E = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}}$$

calculée avec qV correspond à l'énergie de certaines paires de charges. Toutefois, ce n'est pas l'énergie de toutes les paires de charges possibles, mais seulement l'énergie provenant de 3 des 6 paires possibles. On a donc travaillé avec seulement une partie de l'énergie potentielle du système. La partie qui manque est l'énergie correspondante aux paires de charges qui resteront à la même place. La méthode employée est donc identique à celle employée quand plusieurs (mais pas toutes) charges se déplaçaient.

Encore une fois, on aurait pu utiliser l'énergie de tout le groupe de charge. Dans ce cas, l'énergie initiale aurait encore été de 0,137 8 J. On aurait ensuite calculé l'énergie finale, mais on aurait alors eu de l'énergie potentielle dans l'énergie finale puisqu'il restait trois paires de charges (les paires 2-3, 2-4 et 3-4). L'énergie finale aurait été de

$$\begin{aligned}
E'_{mec} &= E'_k + U'_E \\
&= E'_k + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}} \\
&= E'_k + kq^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{\sqrt{2}m}\right) \\
&= E'_k + 9\times10^9\,\tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\left(2\times10^{-6}C\right)^2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2}m} + \frac{1}{2m}\right) \\
&= E'_k + 0,069J
\end{aligned}$$

L'équation de la conservation de l'énergie aurait alors donné

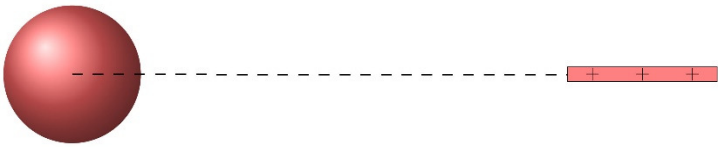
$$\begin{aligned}
E_{mec} &= E'_{mec} \\
0,1378J &= E'_k + 0,0689J \\
E'_k &= 0,0689J
\end{aligned}$$

C'est le même résultat, mais c'est un peu plus long à calculer parce qu'on compte trois paires de charges de plus dans l'énergie initiale et ces trois mêmes paires de charges de plus dans l'énergie finale. Quand on fait la conservation de l'énergie, ces trois paires de plus s'annulent et on obtient le même résultat.

Calcul de l'énergie avec des objets chargés

On a vu que quand il n'y a qu'une seule charge qui va se déplacer, on calcule l'énergie de la charge qV. Cela revient à calculer l'énergie des paires incluant seulement cette charge. Voyons ce que devient cette règle quand il y a des objets chargés.

Quand on calcule l'énergie d'une charge ponctuelle près d'une sphère chargée en calculant le potentiel fait par la sphère puis en calculant qV, on fait exactement la même chose. Le résultat obtenu correspond à l'énergie provenant de toutes les paires de charges possibles entre la petite charge q et les charges de la sphère. Toutefois, elle n'inclut pas l'énergie provenant des paires de charges formées de charges qui sont toutes deux dans la sphère. Cette partie de l'énergie serait inutile puisque ces charges ne se déplaceront pas les unes par rapport aux autres dans la sphère (puisque la distance entre ces charges reste toujours la même) et elle ne changera donc pas. De façon formelle, l'énergie calculée ainsi n'est pas l'énergie potentielle de la charge q (même si on l'appelle comme ça). C'est plutôt une partie de l'énergie potentielle totale du système.



Quand on calcule l'énergie d'une tige près d'une sphère chargée en calculant le potentiel fait par la sphère puis en intégrant qV, le résultat obtenu correspondait à l'énergie provenant de toutes les paires de charges possibles entre les charges de la tige et les charges de la sphère. Toutefois, elle n'inclut pas l'énergie provenant des paires de charges formées de charges qui sont toutes deux dans la sphère et l'énergie provenant des paires de charges formées de charges qui sont toutes deux dans la tige. On n'a pas besoin d'inclure ces paires de charges dans le calcul de l'énergie puisque l'énergie potentielle de ces paires de charges restera la même (puisque la distance entre ces charges reste toujours la même) et ne pourra être transformée en d'autres formes d'énergie. On peut donc calculer simplement l'énergie avec qV dans ce cas.

4.10 LE POTENTIEL D'UN CONDUCTEUR CHARGÉ

On a vu que les lignes de champ sont toujours perpendiculaires à la surface d'un conducteur. On a vu également que les lignes de champs sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. Cela signifie que la surface d'un conducteur est une surface équipotentielle et que le potentiel est le même partout sur la surface d'un conducteur.

De plus, comme le champ à l'intérieur du conducteur est nul, le potentiel ne peut pas changer si on entre dans le conducteur. En effet, la variation de potentiel est

$$dV = -Eds\cos\theta$$

Si on a $E = 0$, on a nécessairement $dV = 0$. Le potentiel à l'intérieur du conducteur est donc le même qu'à la surface du conducteur. On en arrive donc à la conclusion suivante.

Potentiel d'un conducteur à l'équilibre

Dans un conducteur, le potentiel est le même partout (ce qui inclut la surface et l'intérieur).

Potentiel d'une sphère conductrice chargée

On sait que le potentiel à l'extérieur d'une sphère est

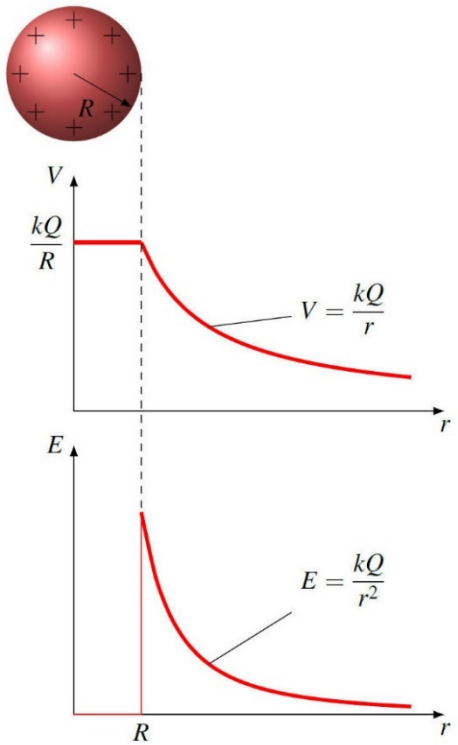
$$V = \frac{kQ}{r}$$

Si la sphère est positive, le potentiel augmente à mesure qu'on s'approche de la surface. Le potentiel de la sphère chargée est la valeur du potentiel quand on arrive à la surface de la sphère. Comme la surface de la sphère est à une distance R (R est le rayon de la sphère) du centre de la sphère, on a

Potentiel d'une sphère conductrice de rayon *R* chargée avec une charge *Q*

$$V = \frac{kQ}{R}$$

Voici le graphique du potentiel et du champ électrique en fonction de la distance du centre de la sphère conductrice chargée.

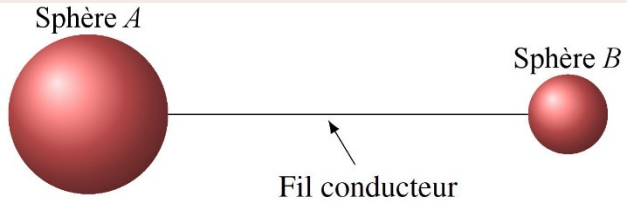


On remarque que le potentiel reste constant partout à l'intérieur de la sphère.

On remarque que le champ électrique tombe subitement à zéro à l'intérieur de la sphère conductrice.

Sachant que le potentiel d'un conducteur est partout le même, on peut calculer ce qui se produit si on relie 2 sphères conductrices avec un fil conducteur.

Exemple 4.10.1



Une sphère conductrice A a une charge de 10 µC et un rayon de 50 cm et une sphère conductrice B a une charge de -3 µC et un rayon de 20 cm. On relie alors les deux sphères avec un fil conducteur.

a) Quelles sont les charges des sphères après qu'on les ait reliées avec un fil ?

Quand on ajoute le fil conducteur, les sphères et le fil deviennent le même conducteur et les sphères échangent des charges jusqu'à ce qu'elles aient le même potentiel. On aura donc (si on note les charges après l'échange avec des primes)

$$V'_A = V'_B$$
$$\frac{kQ'_A}{R_A} = \frac{kQ'_B}{R_B}$$
$$\frac{Q'_A}{0,5m} = \frac{Q'_B}{0,2m}$$

Il nous faut une autre équation pour résoudre ce problème. Cette équation est la conservation de la charge. La somme des charges des sphères avant l'échange doit être égale à la somme des charges après l'échange.

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B$$
$$10\mu C + -3\mu C = Q'_A + Q'_B$$
$$7\mu C = Q'_A + Q'_B$$

Si on isole Q'_B dans cette équation et qu'on remplace dans l'équation des potentiels, on obtient

$$\frac{Q'_A}{0,5m} = \frac{Q'_B}{0,2m}$$
$$\frac{Q'_A}{0,5m} = \frac{7\mu C - Q'_A}{0,2m}$$
$$0,2Q'_A = 0,5\left(7\mu C - Q'_A\right)$$
$$0,2Q'_A = 3,5\mu C - 0,5Q'_A$$
$$0,7Q'_A = 3,5\mu C$$
$$Q'_A = 5\mu C$$

Ce qui nous permet d'obtenir Q'_A = 5 µC et Q'_B = 2 µC.

b) Quel est le potentiel des sphères après qu'on les ait reliées avec un fil ?

Le potentiel de la sphère A est

$$\begin{aligned} V' &= \frac{kQ'_A}{R_A} \\ &= \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 5\times10^{-6}C}{0,5m} \\ &= 90\,000V \end{aligned}$$

On aurait pu le calculer avec les valeurs pour la sphère B et on aurait obtenu le même résultat puisque les deux sphères ont le même potentiel après l'ajout du fil.

c) Quel est le champ à la surface de chaque sphère après qu'on les ait reliées avec un fil ?

Les champs sont

$$\begin{aligned} E'_A &= \frac{kQ'_A}{R_A^2} \\ &= \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 5\times10^{-6}C}{(0,5m)^2} \\ &= 180\,000\tfrac{V}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'_B &= \frac{kQ'_B}{R_B^2} \\ &= \frac{9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\cdot 2\times10^{-6}C}{(0,2m)^2} \\ &= 450\,000\tfrac{V}{m} \end{aligned}$$

Énergie électrique des charges d'un conducteur

On veut maintenant calculer l'énergie des charges dans un conducteur. Pour ce faire, il faut additionner l'énergie de toutes les paires de charges possibles. Toutefois, on va voir qu'on obtient une énergie qui est nettement plus facile à calculer quand les charges sont dans un conducteur. Reprenons notre résultat final pour quatre charges.

$$U_E = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2}\left(\frac{2kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{2kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{2kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{2kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{2kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{2kq_3q_4}{r_{34}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_4q_1}{r_{14}}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}} + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{kq_4q_2}{r_{24}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}} + \frac{kq_4q_3}{r_{34}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_E &= \frac{1}{2}q_1\left(\frac{kq_2}{r_{12}}+\frac{kq_3}{r_{13}}+\frac{kq_4}{r_{14}}\right)+\frac{1}{2}q_2\left(\frac{kq_1}{r_{12}}+\frac{kq_3}{r_{23}}+\frac{kq_4}{r_{24}}\right)\\ &\qquad +\frac{1}{2}q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}}+\frac{kq_2}{r_{23}}+\frac{kq_4}{r_{34}}\right)+\frac{1}{2}q_4\left(\frac{kq_1}{r_{14}}+\frac{kq_2}{r_{24}}+\frac{kq_3}{r_{34}}\right)\\ &= \frac{1}{2}q_1V_1+\frac{1}{2}q_2V_2+\frac{1}{2}q_3V_3+\frac{1}{2}q_4V_4\end{aligned}$$

où V_1 est le potentiel à l'endroit où est située la charge 1 (et l'équivalent pour les autres charges). En extrapolant pour plusieurs charges, on arrive à

$$U_E = \frac{1}{2}\sum qV$$

Ce résultat est valide dans toutes les situations. Toutefois, dans un conducteur, toutes les charges sont au même potentiel. Dans ce cas, on peut donc sortir le V de la somme et l'énergie devient

$$U_E = \frac{1}{2}\left(\sum q\right)V$$

Puisque la somme des charges est la charge totale de l'objet, on a

Énergie électrique d'un conducteur dont le potentiel est *V*

$$U_E = \frac{1}{2}QV$$

Exemple 4.10.2

Quelle est l'énergie potentielle électrique d'une sphère conductrice ayant une charge de 40 µC et un rayon de 50 cm ?

L'énergie potentielle électrique est

$$U_E = \frac{1}{2}QV$$

On connait la charge, mais pas le potentiel. Le potentiel est

$$\begin{aligned}V &= \frac{kQ}{R}\\ &= \frac{9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot 40\times10^{-6}\,C}{0,5m}\\ &= 720\,000V\end{aligned}$$

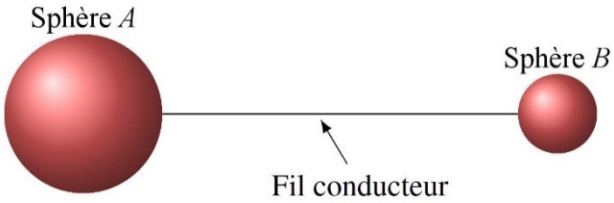
L'énergie électrique est donc

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2}QV \\ &= \frac{1}{2}\cdot 40\times 10^{-6}C\cdot 720\,000V \\ &= 14,4J \end{aligned}$$

L'effet de pointe

On va maintenant montrer comment change le champ électrique à la surface d'un conducteur. Pour découvrir ce résultat, on va considérer un conducteur formé de deux sphères conductrices et d'un fil conducteur.

Si les deux sphères et le fil sont conducteurs, alors cet objet est un conducteur, ce qui signifie qu'il doit être partout au même potentiel. Cela implique que les deux sphères sont au même potentiel.



Le champ électrique près de la surface de la sphère est

$$E = \frac{kQ}{R^2}$$

Or, comme le potentiel d'une sphère est

$$V = \frac{kQ}{R}$$

on a

$$E = \frac{kQ}{R^2} = \frac{kQ}{R}\frac{1}{R} = \frac{V}{R}$$

Comme le potentiel est le même pour les deux sphères, cette équation nous indique que le champ sera plus grand si le rayon de courbure de la sphère est petit. Le champ est donc plus grand à la surface de la petite sphère. En fait, ce résultat est très général.

Champ électrique à la surface d'un conducteur

Le champ à la surface est inversement proportionnel au rayon de courbure de l'objet à cet endroit.

Cela est conforme au résultat obtenu à l'exemple précédent. Le champ à la surface de la sphère ayant un rayon de 20 cm était de 450 000 V/m alors que le champ à la surface de la sphère ayant un rayon de 50 cm était de 180 000 V/m. On constate que le champ est plus grand près de la sphère ayant le plus petit rayon.

On peut aussi calculer la densité de charge à la surface des sphères. On sait que le potentiel de la sphère est

$$V = \frac{kQ}{R}$$

De là, on trouve que Q est

$$Q = \frac{VR}{k}$$

On peut maintenant calculer la densité de charge à la surface de la sphère.

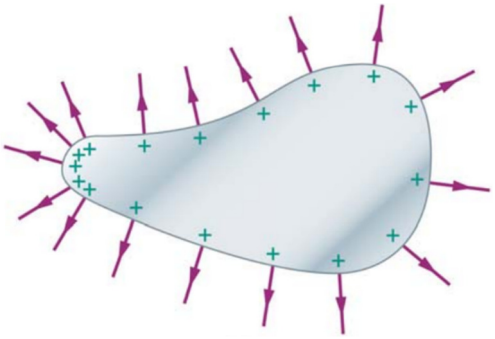
$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\text{charge}}{\text{aire}} \\ &= \frac{VR/k}{4\pi R^2} \\ &= \frac{V}{4\pi kR}\end{aligned}$$

On constate alors que la densité de charge est aussi inversement proportionnelle au rayon de courbure. En fait, ce résultat est, encore une fois, très général.

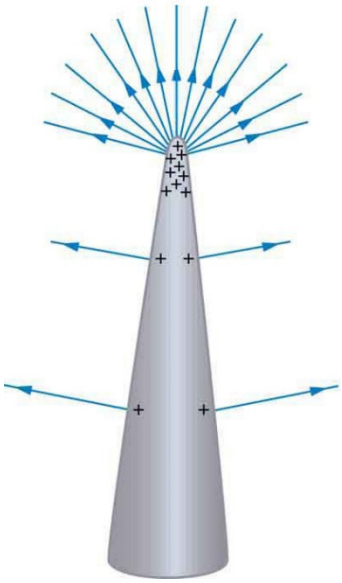
Densité de charge à la surface d'un conducteur

La densité de charge est inversement proportionnelle au rayon de courbure de l'objet à cet endroit.

Examinons les conséquences de cela avec ce patatoïde chargé. On remarque qu'il s'accumule plus de charges et que les lignes de champ sont plus près les unes des autres, aux endroits où le rayon de courbure de l'objet est plus petit.



www.csun.edu/~rd436460/100B/lectures/chapter20-3-4.pdf



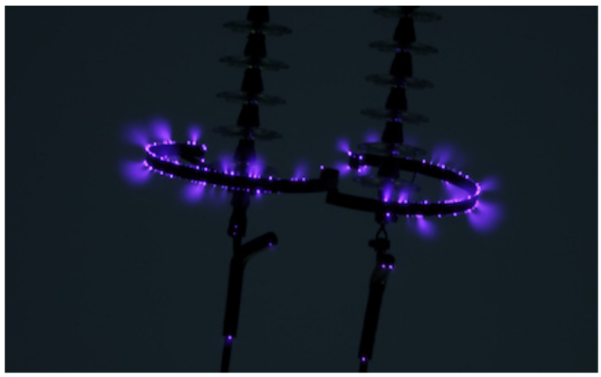
En poussant un peu plus loin la différence de courbure, on peut obtenir le résultat de la figure de gauche. Dans ce cas, le champ devient très grand et il y a beaucoup de charges qui s'accumulent à l'endroit où l'objet forme une pointe (où le rayon de courbure est très petit).

cnx.org/content/m42317/latest/?collection=col11406/latest

Le champ électrique près des pointes peut devenir si grand qu'il peut se former des éclairs. Quand le champ électrique dans l'air dépasse 3×10^6 V/m (la valeur exacte dépend de l'humidité), des électrons sont arrachés des atomes et l'air, contenant maintenant des électrons libres et des ions, devient conducteur, ce qui permet le déplacement des charges. Ce déplacement des charges dans l'air est un éclair. Ces éclairs se formeront nécessairement aux endroits où il y a des pointes sur un conducteur, car c'est là que le champ est le plus grand. C'est pour cette raison que les éclairs se forment souvent aux pointes, comme c'est le cas dans ce vidéo, où l'éclair se forme au bout de la tour du CN.
http://www.youtube.com/watch?v=7tclTXBwK5Q

En fait, la plupart du temps, il n'y a même pas d'éclairs au bout des pointes. Le simple fait que le champ soit plus grand près de la pointe permet d'ioniser l'air. Les particules ayant une charge contraire à celle de la pointe vont se diriger vers la pointe et les particules ayant la même charge que la pointe vont s'éloigner de la pointe pour aller annuler la charge de l'autre objet qu'il fait le champ électrique.
https://www.youtube.com/watch?v=s8704VbBKbw
Ainsi, la plupart du temps, les paratonnerres installés sur les édifices permettent de décharger les nuages et le sol avant même que l'éclair ne se forme. Essentiellement, les paratonnerres servent à prévenir la formation d'éclair. Si jamais il se forme un éclair quand même, il y a de bonnes chances que ce soit le paratonnerre qui soit frappé (puisque c'est une pointe) et ce dernier est conçu pour pouvoir transporter le courant de l'éclair vers le sol sans qu'il y ait le moindre dommage.

Quand un objet se décharge par effet de pointe, il y a souvent une lueur bleue près des pointes. Ces lueurs sont appelées *feux de Saint-Elme*. Cette lueur vient de la recombinaison d'ions et d'électrons dans la zone ionisée par le champ électrique intense. Comme ces recombinaisons provoquent l'émission de lumière, on obtient les feux de Saint-Elme.

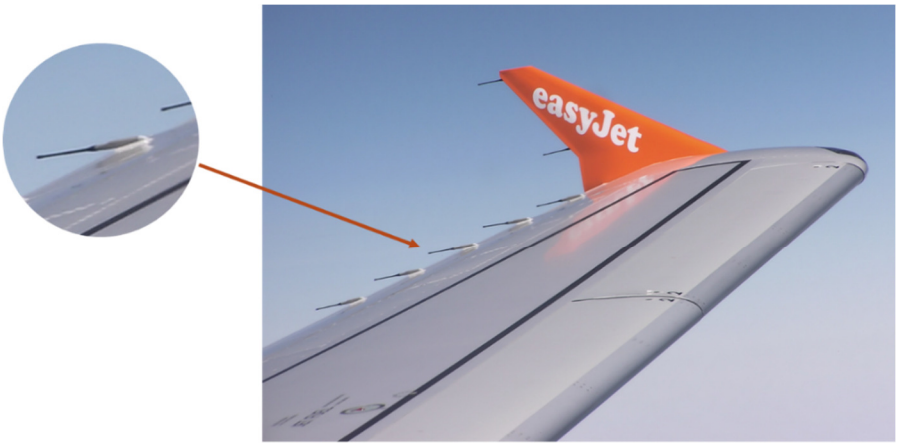


www.livescience.com/st-elmos-fire.html

Même si on ne voit pas cette lueur bleue (on ne la verrait pas en plein jour), on peut quand même entendre le bruit de grésillement caractéristique de ces feux.
https://www.youtube.com/watch?v=1W9j6-jERpE

Les déperditeurs sur les avions

Pour éviter que les avions se chargent en vol (par frottement entre l'avion et l'air, la pluie, la grêle ou des poussières dans l'air), on installe des *déperditeurs d'électricité statique* qui permettent aux charges qui s'accumulent sur le fuselage de retourner dans l'air. Ce sont simplement des petites pointes placées sur les ailes qui permettent aux charges de quitter l'avion par effet de pointe.



By Adrian Pingstone (Arpingstone) - Own work, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7840012

Chaque mèche se termine par une pointe pour que le champ soit très grand à cet endroit. Si la charge devient trop importante, le champ au bout de la pointe dépasse la valeur maximale que l'air peut supporter. L'air près de la pointe s'ionise et devient alors conducteur, ce qui permet aux charges de quitter l'avion.

Il peut se former des feux de Saint-Elme au bout des déperditeurs quand l'avion accumule des charges très rapidement et qu'il perd ensuite ces charges par les déperditeurs. C'est cette lueur bleutée qu'on peut voir au bout de l'aile sur cette photo.

aerosavvy.com/static-discharges/

Les décharges dans les fenêtres du cockpit d'un avion

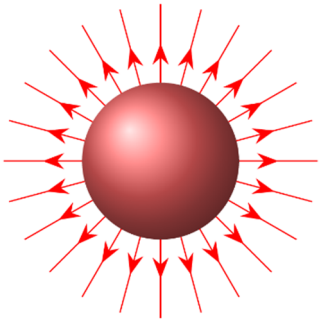
Parfois, bien que ce soit assez rare, on observe des décharges électriques dans les fenêtres du cockpit des avions.
https://www.youtube.com/watch?v=P0vrDQzqKN4
Ces décharges se produisent quand l'avion a un rythme d'accumulation de charge très grand. Les charges du fuselage s'éliminent tout aussi rapidement par les déperditeurs, mais les charges accumulées par les vitres du cockpit continuent de s'accumuler parce que le matériau utilisé pour les vitres n'est pas conducteur d'électricité. Quand la différence de potentiel entre la vitre chargée et le fuselage devient trop grande et que la valeur du champ électrique de la substance isolante qui forme la vitre dépasse la valeur maximale (rigidité électrique), il se forme de petits éclairs dans la vitre. Dans internet, on appelle souvent ces décharges des feux de Saint-Elme, mais elles n'en sont pas. Ce sont tout simplement des décharges dans les vitres, pas une ionisation de l'air qui se produit près d'une pointe.

4.11 LA DENSITÉ D'ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTRIQUE

La formule de la densité d'énergie

Il faut une certaine quantité d'énergie pour faire un champ électrique. Trouvons cette énergie en calculant le travail qu'il faut faire pour faire apparaitre un champ électrique.

Imaginons une sphère conductrice chargée, qui fait un champ autour d'elle. Le potentiel de la sphère est

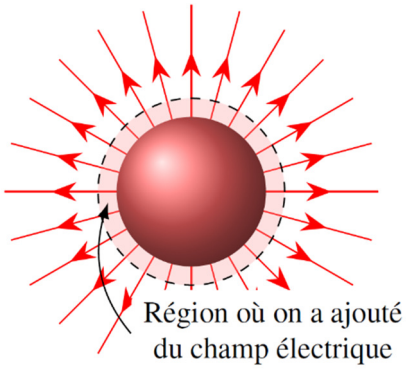


$$V = \frac{kQ}{R}$$

Ce qui signifie que l'énergie électrique de la sphère est

$$U_E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q\frac{kQ}{R} = \frac{kQ^2}{2R}$$

Imaginons maintenant qu'on réduit très légèrement le rayon de la sphère de x. Cela veut dire que $R_i - R_f = x$. Il y aura maintenant un peu plus de champ électrique qu'avant (région rosée sur figure de droite).



Le travail qu'on a dû faire pour diminuer le rayon est

$$W = \Delta U_E = \frac{kQ^2}{2R_f} - \frac{kQ^2}{2R_i} = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}\right)$$

En mettant les fractions au même dénominateur commun, on a

$$W = \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{R_i - R_f}{R_f R_i}\right) \approx \frac{kQ^2}{2}\left(\frac{x}{R^2}\right)$$

puisque $R_i \approx R_f$ et $R_i - R_f = x$.

Cette énergie fournie a permis de créer du nouveau champ électrique. Le travail fait serait donc l'énergie du nouveau champ électrique. La formule semble être propre à cette situation, mais on va voir qu'elle prend une forme assez générale si on calcule l'énergie du champ par unité de volume (autrement dit, la densité d'énergie). On peut calculer le volume de cette région mince en utilisant

$$\begin{aligned} Volume &\approx aire \cdot épaisseur \\ &\approx 4\pi R^2 x \end{aligned}$$

L'énergie du champ par unité de volume est donc

$$\begin{aligned}\frac{U_E}{volume} &= \frac{\frac{kQ^2x}{2R^2}}{4\pi R^2 x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{kQ^2}{4\pi R^4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{kQ^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{k^2Q^2}{R^4}\right)\end{aligned}$$

Comme la grandeur du champ est

$$E = \frac{kQ}{R^2}$$

on a

$$\frac{U_E}{Volume} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

En utilisant le symbole u_E pour représenter cette densité d'énergie, on a

Densité d'énergie du champ électrique

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

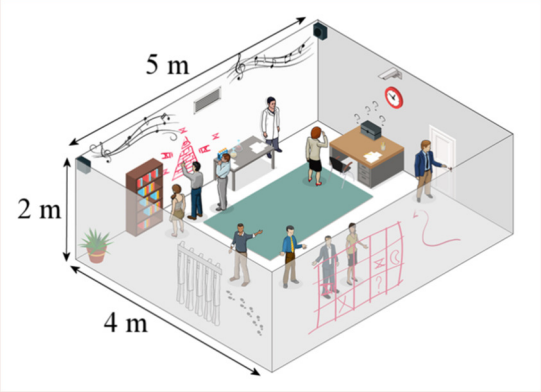
Ainsi, l'énergie dans le champ électrique est

Énergie du champ électrique

$$\begin{aligned}\text{Énergie du champ électrique} &= u_E \times volume \quad \left(\vec{E} \text{ uniforme}\right) \\ &= \int u_E dV \quad \left(\vec{E} \text{ non uniforme}\right)\end{aligned}$$

Exemple 4.11.1

Dans cette classe, il y a un champ électrique uniforme dont la grandeur est de 10^6 V/m. Combien y a-t-il d'énergie sous forme de champ électrique dans cette pièce ?



www.marketwatch.com/story/the-weird-new-world-of-escape-room-businesses-2015-07-20

La densité d'énergie de ce champ est

$$\begin{aligned} u_E &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 8,854\times 10^{-12}\,\tfrac{C^2}{Nm^2}\cdot\left(10^6\,\tfrac{V}{m}\right)^2 \\ &= 4,292\,\tfrac{J}{m^3} \end{aligned}$$

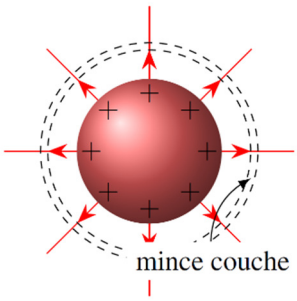
L'énergie dans la pièce est donc

$$\begin{aligned} \text{Énergie du champ électrique} &= u_E \times volume \\ &= 4,292\,\tfrac{J}{m^3}\cdot(5m\cdot 2m\cdot 4m) \\ &= 4,292\,\tfrac{J}{m^3}\cdot 40m^3 \\ &= 171,68J \end{aligned}$$

Cela signifie aussi qu'il faut 171,68 J pour créer ce champ électrique dans la pièce.

Interprétation de l'énergie du champ électrique

Pour comprendre un peu plus ce que signifie l'énergie du champ électrique, calculons l'énergie totale dans le champ autour d'une sphère chargée. Comme le champ diminue à mesure qu'on s'éloigne de la sphère, on doit séparer le volume en petit morceau. Ici, on va prendre des petites coquilles sphériques très minces autour de la sphère. Dans cette couche, le champ est



$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

La densité d'énergie est donc

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2$$

Comme le volume de cette petite coquille d'épaisseur dr est

$$\begin{aligned} Volume &= aire\cdot épaisseur \\ dV &= 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

L'énergie dans la couche est

$$\begin{aligned} dU_E &= u_E dV \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 \frac{k^2 Q^2}{r^4} r^2 dr \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{k} \frac{k^2 Q^2}{r^2} dr \\
&= \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{r^2} dr
\end{aligned}
$$

On obtient l'énergie totale du champ en sommant les énergies des couches de $r = R$ jusqu'à $r = \infty$.

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int_R^\infty \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{r^2} dr \\
&= \left[-\frac{1}{2} \frac{kQ^2}{r} \right]_R^\infty \\
&= \left[0 - -\frac{1}{2} \frac{kQ^2}{R} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{R}
\end{aligned}
$$

Or, l'énergie potentielle électrique de la sphère est

$$
\begin{aligned}
U_E &= \frac{1}{2} QV \\
&= \frac{1}{2} Q \frac{kQ}{R} \\
&= \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{R}
\end{aligned}
$$

On voit que ces deux énergies sont égales. Ce n'est pas un hasard. C'est qu'on peut faire l'interprétation suivante :

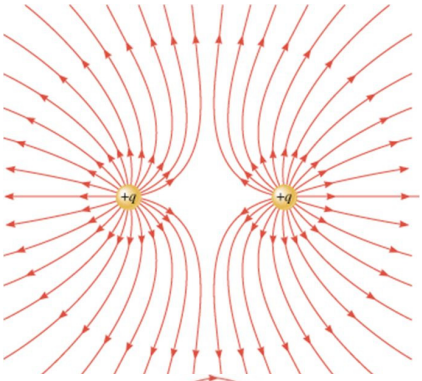
L'énergie potentielle électrique d'une configuration de charge est l'énergie dans le champ électrique**.**

Autrement dit, l'énergie potentielle électrique d'une configuration de charge est accumulée sous forme de champ électrique.

Il y a cependant une subtilité avec des charges ponctuelles. Comme la charge a une grosseur nulle, l'énergie totale dans le champ est infinie ! Dans ce cas, on va plutôt calculer les variations d'énergie pour obtenir l'énergie potentielle de la configuration de charge.

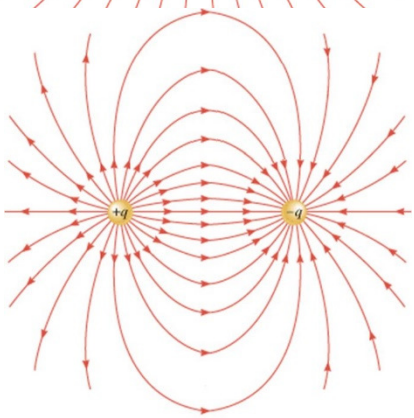
$$\Delta U_E = \Delta\left(\text{Énergie du champ électrique}\right)$$

Prenons deux exemples pour illustrer cela.



Quand on approche deux charges identiques de même signe l'une de l'autre, le champ des deux charges s'additionne et la grandeur du champ augmente.

L'augmentation de champ entraine l'augmentation de l'énergie du champ. L'augmentation de l'énergie est exactement égale à l'énergie électrique de cette configuration de charge, qui est $U_E = kQ / R^2$.



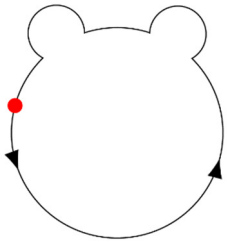
Quand on approche deux charges identiques de signe contraire l'une de l'autre, le champ des deux charges se soustrait en partie et la grandeur du champ diminue.

La diminution de champ entraine la diminution de l'énergie du champ. La diminution de l'énergie est exactement égale à l'énergie électrique de cette configuration de charge, qui est $U_E = -kQ^2 / R^2$.

demo.webassign.net/ebooks/cj6demo/pc/c18/read/main/c18x18_7.htm pour les 2 figures

4.12 LA DEUXIÈME ÉQUATION DE MAXWELL

Puisque la différence de potentiel est la même pour tous les trajets entre deux points, la somme des différences de potentiel sur une trajectoire fermée doit être nulle parce qu'on peut remplacer la trajectoire fermée par une trajectoire de longueur nulle. (La trajectoire va du point de départ au point final. Comme ces 2 points sont à la même place, la longueur de la trajectoire est nulle).



Puisqu'on peut remplacer la trajectoire par une trajectoire de longueur nulle, la différence de potentiel sur la trajectoire fermée doit aussi être nulle.

$$\Delta V = 0$$

Si la trajectoire fermée est séparée en morceaux et qu'on calcule la différence de potentiel sur chaque morceau et qu'on somme le tout pour refaire la trajectoire fermée, on aura alors

La somme des différences de potentiel sur une trajectoire fermée est toujours nulle

$$\sum \Delta V = 0$$

Sur une trajectoire fermée

C'est ce qui deviendra la loi des mailles de Kirchhoff dans notre étude des circuits.

Si on sépare la trajectoire en petits morceaux infinitésimaux et qu'on somme toutes les différences de potentiel qu'on a sur chaque petit morceau pour refaire la trajectoire fermée, la somme devient une intégrale. On a donc

$$\oint dV = 0$$

La différence de potentiel sur un petit morceau infinitésimal est

$$dV = -Eds\cos\theta = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

En utilisant ce résultat, on obtient alors la deuxième équation de Maxwell (mais incomplète, on verra ce qui manque à cette équation dans le chapitre sur l'induction).

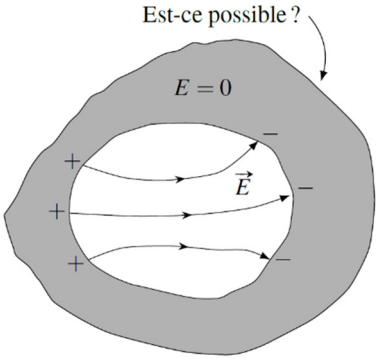
Deuxième équation de Maxwell (incomplète)

$$\oint \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = 0$$

(Les deux encadrés en vert qui précèdent sont des formulations équivalentes de la même idée.)

La cage de Faraday

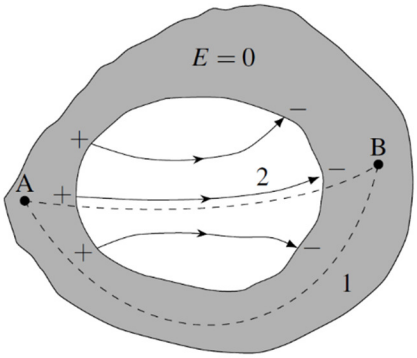
Cette équation nous permet de montrer qu'il ne peut pas y avoir de champ électrique dans une cavité dans un conducteur, s'il n'y a pas de charge dans la cavité.



On avait déjà montré que le champ dans un conducteur était nul, mais cela ne veut pas dire qu'il était impossible qu'il y ait un champ dans la cavité même s'il n'y a pas de charge dans cette dernière. En effet, on pourrait avoir une situation comme celle montrée sur la figure de droite.

On veut savoir si cette configuration est possible.

Cette situation respecte toutes les règles données précédemment pour les conducteurs : les charges sont en surface et le champ est perpendiculaire à la surface. Toutefois, cette configuration ne respecte pas l'équation



$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

En effet, prenons les deux trajectoires montrées sur la figure de gauche.

Le long de la trajectoire 1, le champ est toujours nul (parce qu'on est dans le conducteur), ce qui fait que la différence de potentiel entre A et B est nulle. Cela est en accord avec ce qu'on a dit sur les conducteurs : le

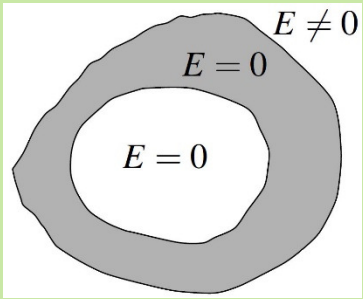
potentiel est le même partout dans un conducteur. Si on prend 2 points à l'intérieur du conducteur, c'est normal qu'on arrive à une différence de potentiel nulle.

Le long de la trajectoire 2, la différence de potentiel n'est pas nulle. Dès qu'on entre dans la cavité, il y a un champ. Comme on se déplace en suivant les lignes de champ, le potentiel diminue continuellement. On arrive donc au point B avec un ΔV négatif, ce qui n'est pas la même valeur que celle obtenue par le trajet 1. Il y a donc un problème.

Pour éviter cette contradiction, il n'y a qu'une seule possibilité : le champ dans la cavité doit être nul aussi. Tout ce raisonnement est valide, même s'il y a un champ à l'extérieur du conducteur. On doit donc avoir

Champ électrique dans une cavité dans un conducteur

Le champ électrique dans une cavité dans un conducteur est nul s'il n'y a pas de charge dans la cavité, peu importe s'il y a un champ à l'extérieur du conducteur.



C'est le principe de la cage de Faraday : en s'enfermant dans une cage de métal, on se protège des champs électriques externes. Ça marche même s'il y a des trous dans le conducteur, comme dans une cage (sous certaines conditions).
http://www.youtube.com/watch?v=Zi4kXgDBFhw
Les charges passent simplement sur la surface externe du conducteur et il n'y a jamais de champ à l'intérieur.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Énergie potentielle d'une charge *q* à une distance *r* du centre d'une sphère ayant une charge *Q* (ou à une distance *r* d'une charge ponctuelle *Q*)

$$U_E = \frac{kqQ}{r}$$

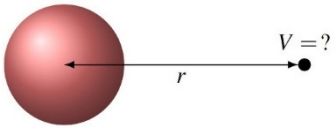
Définition du potentiel

$$U_E = qV$$

Potentiel à une distance *r* du centre d'une sphère ayant une charge *Q* (ou à une distance *r* d'une charge ponctuelle *Q*)

$$V = \frac{kQ}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

r est la distance du centre de la sphère.



Potentiel à un endroit fait par plusieurs sphères chargées (ou par des charges ponctuelles)

$$V = \sum \frac{kQ}{r}$$

Lien entre *V* et *E*

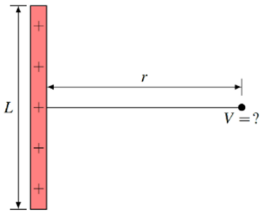
$$dV = -Eds\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad dV = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

Potentiel vis-à-vis du bout d'une tige uniformément chargée

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{r+L}{r}\right)$$

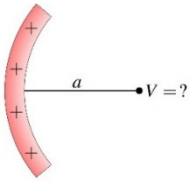
Potentiel vis-à-vis du milieu d'une tige uniformément chargée

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{L^2+4r^2}+L}{\sqrt{L^2+4r^2}-L}\right)$$



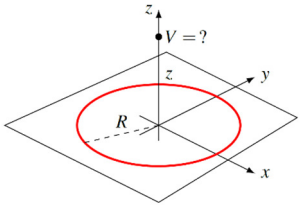
Potentiel au centre de courbure d'une tige uniformément chargée

$$V = \frac{kQ}{a}$$



Potentiel le long de l'axe d'un anneau

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

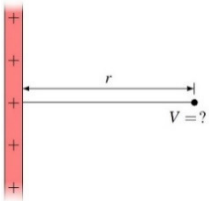


Potentiel à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée

$$V = \frac{kQ}{2R}\left(2 + \frac{1}{\kappa} - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Potentiel près d'une tige chargée infinie

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$



Potentiel dans un champ électrique uniforme (donc valide pour le potentiel d'une plaque infinie)

$$V = -E_x x - E_y y \qquad \text{Le } x = 0 \text{ et le } y = 0 \text{ sont arbitraires.}$$

Potentiel à un endroit

$$V = \sum V_{\text{de chaque objet}}$$

Énergie potentielle d'une tige chargée

$$U_E = \int V \lambda dx$$

Variation d'énergie électrique à partir de la variation de potentiel

$$\Delta U_E = q\Delta V$$

Différence de potentiel entre deux points dans un champ uniforme

$$\Delta V = -E\Delta s \cos\theta \qquad \text{ou} \qquad \Delta V = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\Delta s}$$

Différence de potentiel entre deux plaques parallèles ayant des charges opposées

$$\Delta V = Ed$$

Différence de potentiel entre deux points dans un champ non uniforme

$$\Delta V = -\sum E\Delta s \cos\theta \qquad \text{ou} \qquad \Delta V = -\sum \vec{E}\cdot\overrightarrow{\Delta s}$$

Si on peut séparer en parties où E et θ sont constants.

$$\Delta V = -\int E\cos\theta ds \qquad \text{ou} \qquad \Delta V = -\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds}$$

Si on ne peut pas séparer en parties où E et θ sont constants.

Différence de potentiel en une dimension entre deux points dans un champ non uniforme

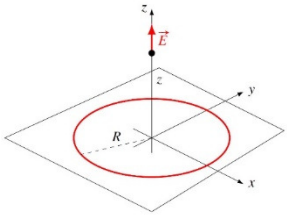
$$\Delta V = -\int E_x dx$$

Composantes du champ électrique à partir du potentiel

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Champ électrique le long de l'axe d'un anneau

$$E_x = 0 \qquad E_y = 0 \qquad E_z = \frac{k|Q|z}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



Énergie électrique d'un groupe de charges

$$U_E = \sum_{i<j} \frac{kq_i q_j}{r_{ij}}$$ On fait la somme sur toutes les paires de charges possibles.

Potentiel d'une sphère conductrice de rayon *R* chargée avec une charge *Q*

$$V = \frac{kQ}{R}$$

Énergie électrique d'un conducteur dont le potentiel est *V*

$$U_E = \frac{1}{2}QV$$

Densité d'énergie du champ électrique

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Énergie du champ électrique

$$\begin{aligned}\text{Énergie du champ électrique} &= u_E \times volume \quad \left(\vec{E} \text{ uniforme}\right)\\ &= \int u_E dV \quad \left(\vec{E} \text{ non uniforme}\right)\end{aligned}$$

La somme des différences de potentiel sur une trajectoire fermée est toujours nulle

$$\sum \Delta V = 0$$

Sur une trajectoire fermée

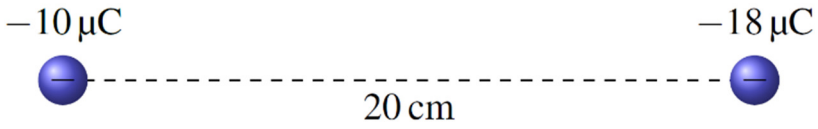
Deuxième équation de Maxwell (incomplète)

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

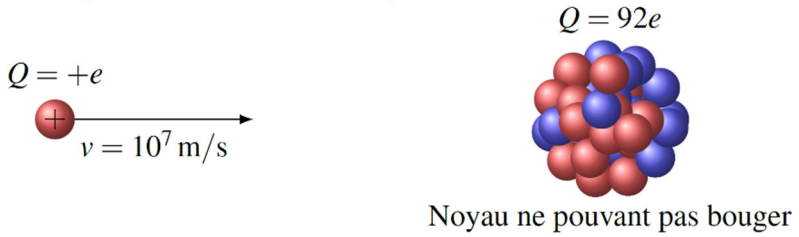
EXERCICES

4.1 L'énergie potentielle électrique

1. Ces deux charges ont des masses identiques de 200 g. Initialement, on maintient en place ces deux charges qui se repoussent. Quelle est l'énergie potentielle électrique de cette paire de charges ?

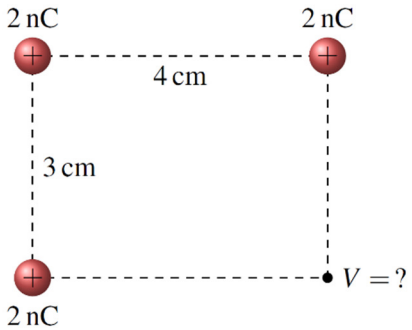


2. Un proton, dont la masse est de 1,67 x 10^{-27} kg, se dirige vers un noyau d'uranium dont la position est fixe. Initialement, le proton est tellement loin du noyau qu'on peut négliger l'énergie potentielle électrique du système. Selon les données montrées sur la figure, jusqu'à quelle distance du centre du noyau le proton va-t-il s'approcher avant de s'arrêter ? Sachant que le rayon du noyau est de 1,4 x 10^{-15} m, déterminez si le proton va toucher au noyau ?

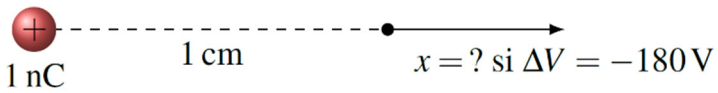


4.2 Le potentiel

3. Quel est le potentiel à l'endroit indiqué sur la figure ?

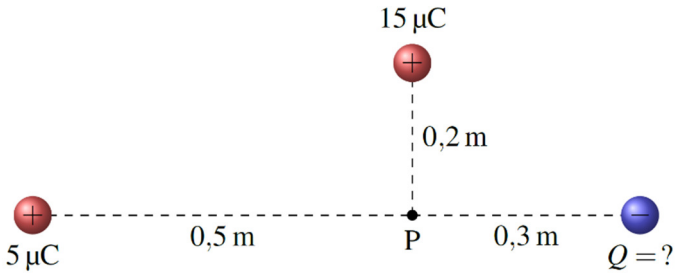


4. On est initialement à 1 cm d'une charge de 1 nC. De quelle distance x doit-on s'éloigner de la charge pour que le potentiel baisse de 180 V ?

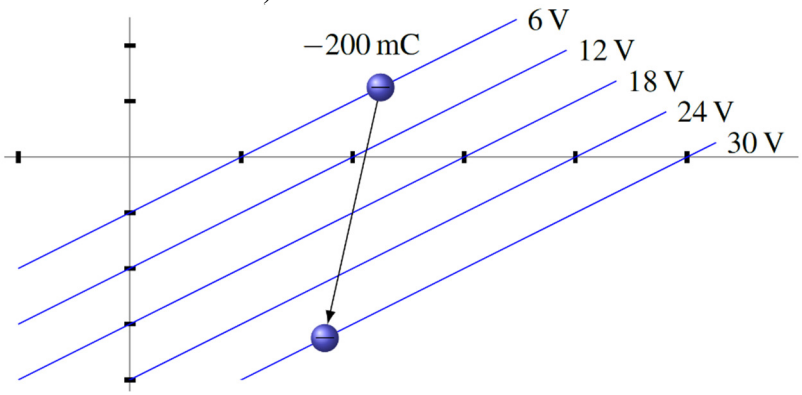


5. À une certaine distance r d'une charge ponctuelle de charge Q, le potentiel vaut 900 V et le champ électrique a une grandeur de 2000 N/C. Déterminer les valeurs de r et Q.

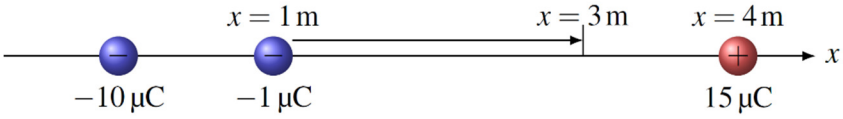
6. Dans la situation montrée sur la figure, quelle doit être la valeur de Q pour que le potentiel soit nul au point P ?



7. On prend une charge de 200 mC et on la déplace d'un endroit à un autre tel qu'illustré sur la figure. La vitesse de la charge est nulle au début et à la fin de son mouvement. Quelle énergie a-t-on donnée à la charge ou reçue de la charge avec ce déplacement ? (Autrement dit, on cherche le travail externe. Il n'y a pas de gravitation ni de force externe.)

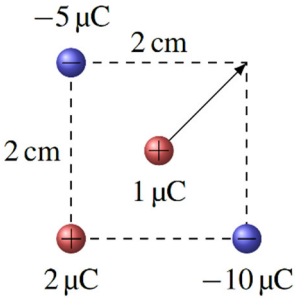


8. On déplace une charge de -1 µC de x = 1 m à x = 3 m tel qu'illustré sur la figure suivante.

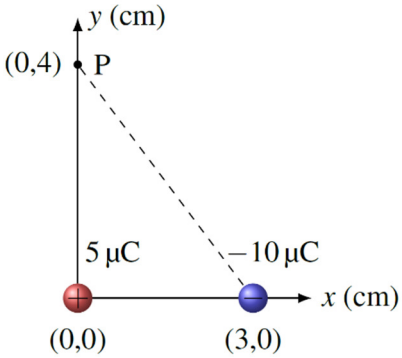


Quelle est la variation de l'énergie potentielle électrique de la charge de -1 µC quand elle passe de x = 1 à x = 3 m ?

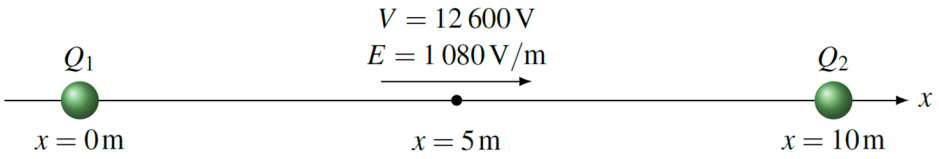
9. On déplace une charge de 1 µC d'un endroit à un autre tel qu'illustré sur la figure suivante. (Initialement, la charge est exactement au centre du carré.) Quel travail externe faut-il faire pour déplacer la charge si elle est immobile au début et à la fin de son déplacement ?



10. Quel travail faut-il faire pour amener une charge de -2 µC d'une distance infinie jusqu'au point P ? La charge est au repos au début et à la fin du mouvement.

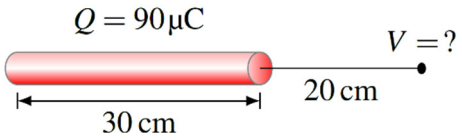


11. Exactement à mi-chemin entre 2 charges distantes de 10 m, le potentiel est de 12 600 V et le champ électrique est de 1080 N/C dans la direction indiquée sur la figure. Quelles sont les valeurs de Q_1 et de Q_2 ?

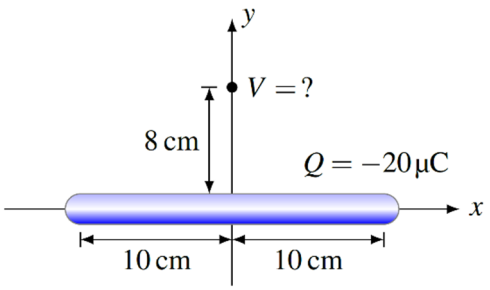


4.4 Le potentiel fait par un objet chargé

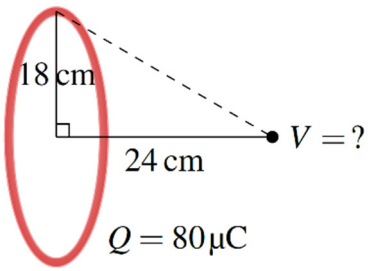
12. Quel est le potentiel à l'endroit montré sur la figure ?



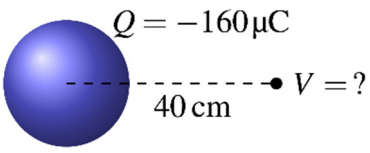
13. Quel est le potentiel à l'endroit montré sur la figure ?



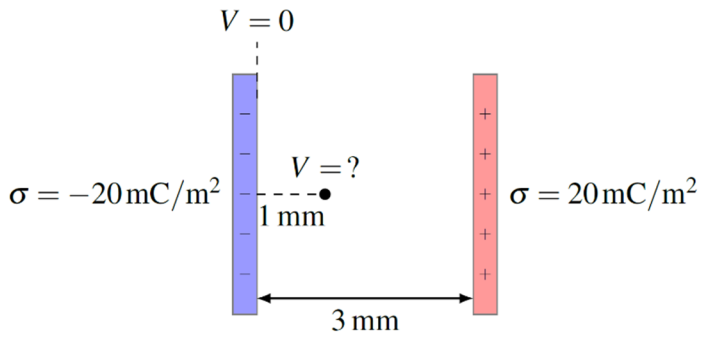
14. Quel est le potentiel à l'endroit montré sur la figure ?



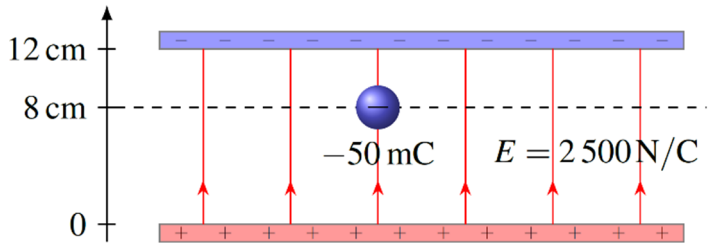
15. Une sphère ayant un rayon de 15 cm possède une charge de -160 µC. Quel est le potentiel à l'endroit montré sur la figure ?



16. Quel est le potentiel au point indiqué sur la figure si on choisit la plaque négative comme endroit où $V = 0$?



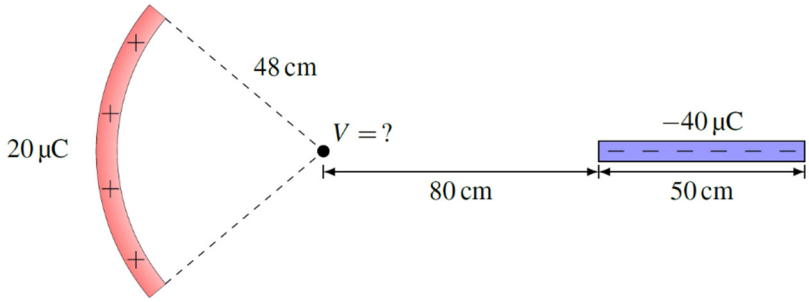
17. Une charge est entre deux plaques, à l'endroit montré sur la figure. Notre $y = 0$ est à l'endroit montré sur la figure. Le potentiel $V = 0$ est au même endroit que le $y = 0$.



a) Quel est le potentiel à l'endroit où est la charge ?
b) Quelle est l'énergie potentielle électrique de la charge à cet endroit ?

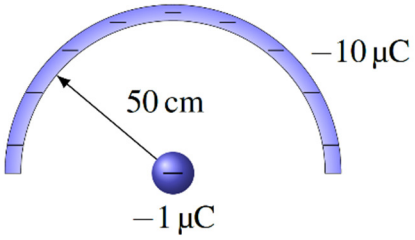
18. Une sphère ayant un rayon de 15 cm est uniformément chargée avec une charge de -160 µC. Quel est le potentiel au centre de la sphère si la permittivité relative de la substance qui compose la sphère est $\kappa = 2$?

19. Quel est le potentiel à l'endroit montré sur la figure ?

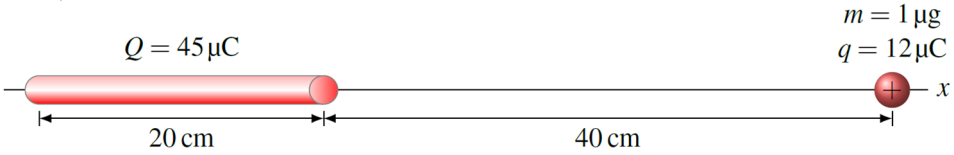


4.5 Utilisation des formules de potentiel pour résoudre des problèmes

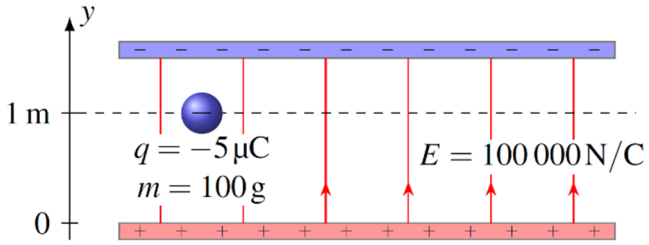
20. Dans la situation montrée sur la figure, la tige courbée ayant une charge de -10 µC ne peut pas bouger. On place une charge de -1 µC immobile à l'endroit montré sur la figure. La charge a une masse de 40 g. Quelle sera la vitesse de la charge quand elle sera très loin de la tige ? (Il n'y a pas de gravitation ni de force externe.)



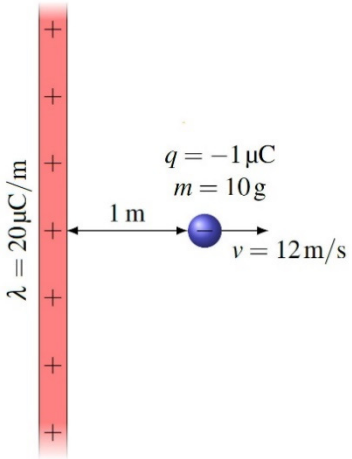
21. Dans la situation montrée sur la figure, la tige ne peut pas bouger. On place une charge q immobile à l'endroit montré sur la figure. Quelle sera la vitesse de la charge quand elle sera à 3 m de la tige ? (Il n'y a pas de gravitation ni de force externe.)



22. Une charge est initialement immobile à la position montrée sur la figure. On laisse partir la charge négative qui vient frapper la plaque positive. Quelle sera la vitesse de la charge quand elle frappera la plaque positive s'il y a de la gravitation ?

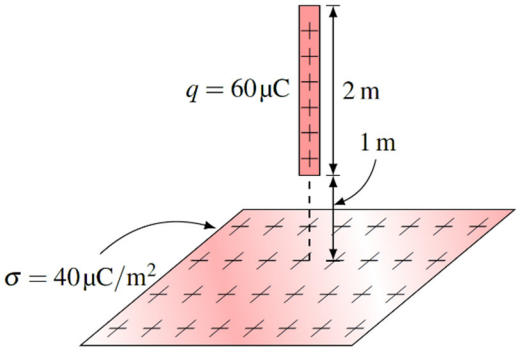


23. Une charge négative s'éloigne d'une tige infinie chargée positivement, telle qu'illustrée sur la figure. Quelle sera la distance entre la tige et la charge quand la vitesse de la charge sera nulle ?



4.6 Énergie potentielle d'un objet chargé dans un champ

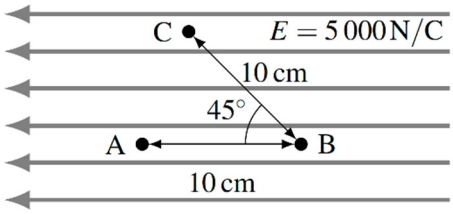
24. Une tige ayant une longueur de 2 m et une charge de 60 µC est à 1 m au-dessus d'une plaque infinie, tel qu'illustré sur la figure. La densité surfacique de charge de la plaque est de σ= 40 µC/m². Quelle est l'énergie potentielle de la tige si on place le y =0 à la plaque infinie ?



4.7 Différence de potentiel à partir du champ

25. Quelle est la différence de potentiel si on passe…

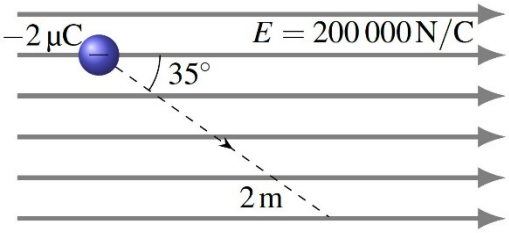
a) du point A au point B ?
b) du point B au point C ?



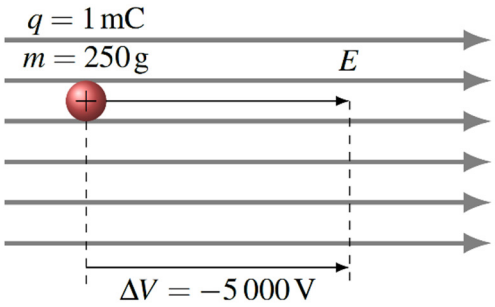
26. Quelle est la différence de potentiel si on passe du point x = 1 m, y = 2 m, z = 3 m au point x = -1 m, y = 8 m, z = -5 m dans un champ électrique uniforme de

$$\vec{E} = -2\tfrac{N}{C}\vec{i} + 5\tfrac{N}{C}\vec{j} - 3\tfrac{N}{C}\vec{k}$$

27. On déplace la charge de -2 µC sur une distance de 2 m dans un champ uniforme de 200 000 N/C tel qu'illustré sur la figure. Quelle est la variation d'énergie potentielle électrique de la charge ?



28. Une charge de 1 mC, initialement au repos, accélère et se déplace dans un champ électrique. Quelle est la vitesse de la charge quand elle est rendue à un endroit où le potentiel est 5000 V plus petit que le potentiel de son point de départ ? (Il n'y a pas de gravitation ni de forces externes.)

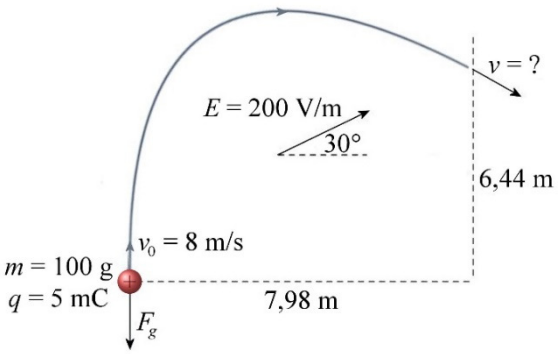


29. Une charge de 1 mC et ayant une masse de 100 g se déplace dans un champ électrique uniforme. On a

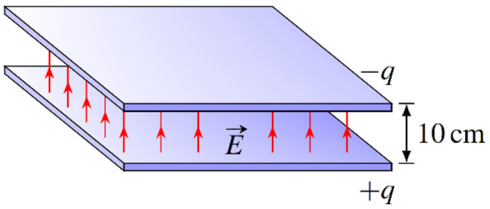
Position initiale : $V = 2000$ V, vitesse = 3 m/s
Position finale : $V = 8000$ V, vitesse = 5 m/s

Quel travail a-t-on fait sur la charge pour qu'elle passe ainsi de sa position initiale à sa position finale ?

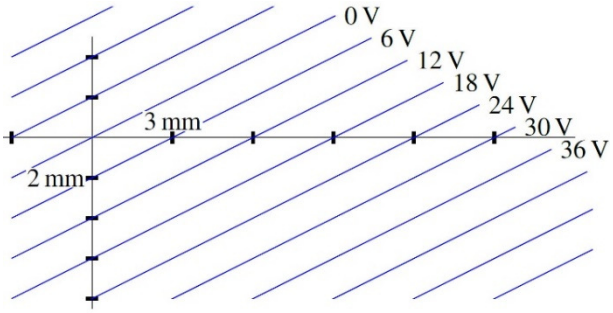
30. Cette particule est dans un champ gravitationnel vers le bas et un champ électrique uniforme dont la direction est montrée sur la figure. Quelle est la vitesse de la particule à l'endroit indiqué ?



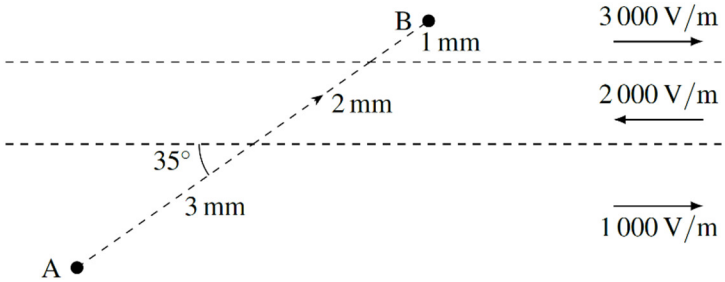
31. Quand on place une charge de 6 µC entre les deux plaques montrées sur la figure, elle subit une force de 3 N. Quelle est la différence de potentiel entre les plaques ?



32. Quelle est la grandeur du champ électrique associé à ce potentiel ?

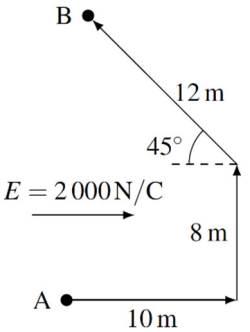


33. Un électron passe du point *A* au point *B* dans la situation montrée sur la figure.



a) De combien change le potentiel en passant du point *A* au point *B* ?
b) De combien change l'énergie électrique de l'électron quand il passe du point *A* au point *B* (en eV) ?

34. Une charge de 2 mC passe du point A au point B dans la situation montrée sur la figure.

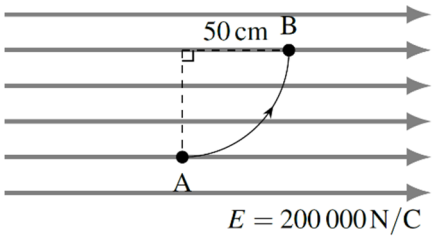


a) De combien change le potentiel en passant du point A au point B ?
b) De combien change l'énergie électrique de la charge quand elle passe du point A au point B ?

35. De combien change le potentiel si on passe d'un point situé à x = 0 m à un point situé à x = 10 m si le champ électrique varie avec la position selon la formule

$$E_x = 30\tfrac{V}{m} \cdot e^{-\frac{x}{5m}}$$

36. Quelle est la différence de potentiel si on passe du point A au point B en suivant la trajectoire en arc de cercle montrée sur la figure ?



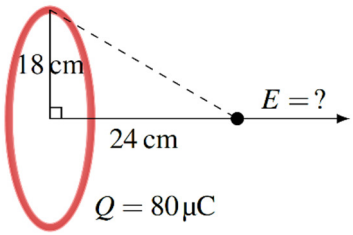
4.8 Le champ électrique à partir du potentiel

37. Le potentiel à la position (x, y, z) est donné par la formule.

$$V = 2\tfrac{V}{m^3} \cdot xyz - 2\tfrac{V}{m^3} \cdot x^2 y + 4\tfrac{V}{m^3} \cdot xz^2 - 12\tfrac{V}{m^3} \cdot y^2 z$$

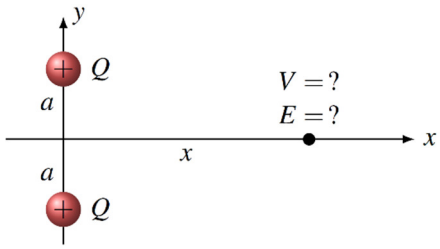
Quel est le champ électrique au point (2 m, -3 m, 1 m) ? Donnez votre réponse sous forme vectorielle.

38. Quelle est la grandeur du champ électrique à l'endroit montré sur la figure ?



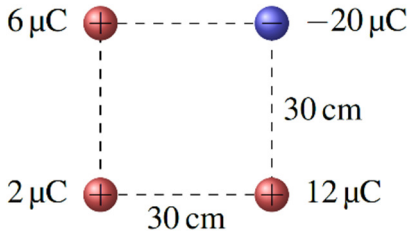
39. On va trouver ici le champ fait par les deux charges suivantes le long de l'axe des x.

a) Trouvez le potentiel au point (x, 0).
b) À partir de la formule du potentiel, déterminez le champ électrique le long de l'axe. (En fait, on trouve la composante en x du champ. Cette composante est égale au champ puisqu'il n'y a pas de composante en y du champ.)

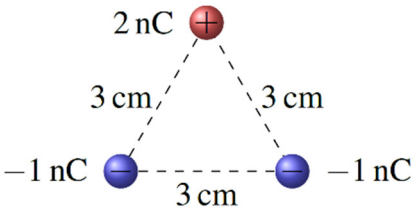


4.9 L'énergie d'un groupe de charges

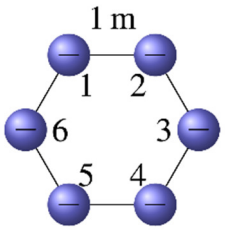
40. Quelle est l'énergie potentielle électrique de ce groupe de charges ?



41. Quelle énergie faudrait-il fournir pour amener ces charges au repos très loin les unes des autres ?



42. Voici un système de 6 charges négatives. Chacune de ces charges a une masse de 10 grammes et une charge de -2 µC.



a) On laisse alors partir la charge 1 en maintenant les 5 autres en place. Quelle sera la vitesse de cette charge quand elle sera loin des autres ?
b) On laisse alors partir les charges 1, 3 et 5 en maintenant les 3 autres en place. Quelle sera la vitesse de ces charges quand elles seront loin des autres ?
c) On laisse alors partir les 6 charges. Quelle sera la vitesse des charges quand elles seront loin les unes des autres ?

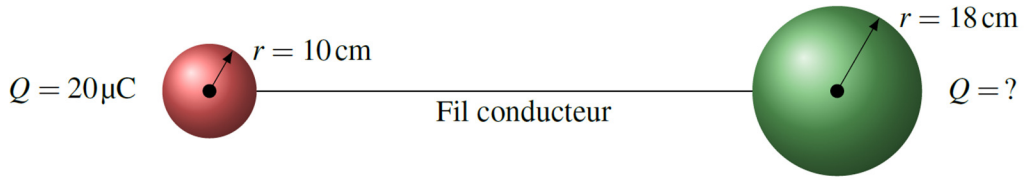
Rappel : les angles dans un hexagone sont de 120°.

4.10 Le potentiel d'un conducteur chargé

43. Le potentiel est de 450 V à la surface d'une sphère conductrice d'un rayon de 25 cm.

a) Quel est le potentiel au centre de la sphère ?
b) Combien d'électrons a-t-on enlevés à cette sphère pour lui donner ce potentiel ?
c) Quelle est la charge surfacique (σ) de la sphère ?
d) Quel est le champ électrique juste au-dessus de la surface de la sphère ?
e) Quelle est l'énergie potentielle électrique de la sphère ?

44. Les deux sphères de la figure sont reliées par un fil conducteur. Quelle est la charge de la sphère de droite ?



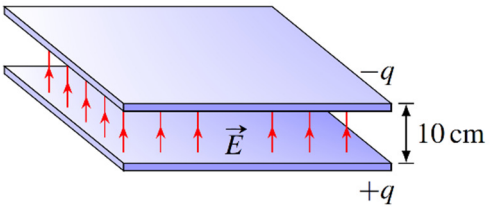
45. Une sphère conductrice ayant un rayon de 8 cm et une charge de 120 µC est reliée par un fil conducteur à une sphère conductrice ayant un rayon de 24 cm et une charge de –40 µC.

a) Quelles seront les charges des sphères après qu'on les ait reliées avec le fil conducteur ?
b) Quels seront les potentiels des sphères après qu'on les ait reliées avec le fil conducteur ?

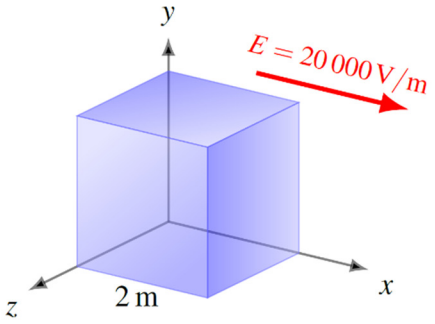
46. Deux gouttes de mercure identiques sont chargées de sorte qu'elles aient toutes les deux un potentiel de 30 V. On réunit alors ces deux gouttes pour former une goutte plus grosse. Quel est le potentiel de cette goutte plus grosse ?

4.11 La densité d'énergie du champ électrique

47. La différence de potentiel entre ces deux plaques est de 1000 V. Quelle est la densité d'énergie du champ entre les plaques ?



48. Dans ce cube, il y a un champ électrique uniforme de 20 000 V/m vers la droite. Combien y a-t-il d'énergie sous forme de champ électrique dans ce cube ?



RÉPONSES

4.1 L'énergie potentielle électrique

1. 8,1 J
2. 2,545 x 10^{-13} m. Il n'atteint pas le noyau.

4.2 Le potentiel

3. 1410 V
4. 0,25 cm
5. r = 45 cm Q = 45 nC
6. -25,5 µC
7. On reçoit 4,8 J
8. -0,15 J
9. 2,159 J
10. 1,35 J
11. Q_1 = 5 µC Q_2 = 2 µC

4.4 Le potentiel fait par un objet chargé

12. 2,474 x 10^6 V
13. -1,886 x 10^6 V
14. 2,4 x 10^6 V
15. -3,6 x 10^6 V
16. 2,259 x 10^6 V
17. a) -200 V b) 10 J
18. -1,2 x 10^7 V
19. 25 434 V

4.5 Utilisation des formules de potentiel pour résoudre des problèmes

20. 3 m/s
21. 1,287 x 10^5 m/s
22. 5,44 m/s
23. 7,409 6 m

4.6 Énergie potentielle d'un objet chargé dans un champ

24. -271,1 J

4.7 Différence de potentiel à partir du champ

25. a) 500 V b) -353,6 V
26. -58 V
27. 0,655 J
28. 6,325 m/s
29. 6,8 J
30. 11,85 m/s
31. 50 000 V
32. 3605,6 V/m
33. a) -1,638 V b) 1,638 eV
34. a) -3029 V b) -6,059 J
35. -129,7 V
36. -100 000 V

4.8 Le champ électrique à partir du potentiel

37. $\vec{E} = -22\frac{V}{m}\vec{i} - 68\frac{V}{m}\vec{j} + 104\frac{V}{m}\vec{k}$
38. $6{,}4 \times 10^{6}$ N/C
39. a) $V = \dfrac{2kQ}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ b) $E_x = \dfrac{2kQx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$

4.9 L'énergie d'un groupe de charges

40. -9,0412 J
41. 9×10^{-7} J
42. a) 5,13 m/s b) 4,71 m/s c) 3,63 m/s

4.10 Le potentiel d'un conducteur chargé

43. a) 450 V b) $7{,}802 \times 10^{10}$ c) $1{,}592 \times 10^{-8}$ C/m² d) 1797,5 N/C e) 2,812 5 µJ
44. 36 µC
45. a) Sphère de 8 cm : Q = 20 µC Sphère de 24 cm : Q = 60 µC b) 2 250 000 V
46. 47,62 V

4.11 La densité d'énergie du champ électrique

47. $4{,}427 \times 10^{-4}$ J/m³
48. 0,01417 J