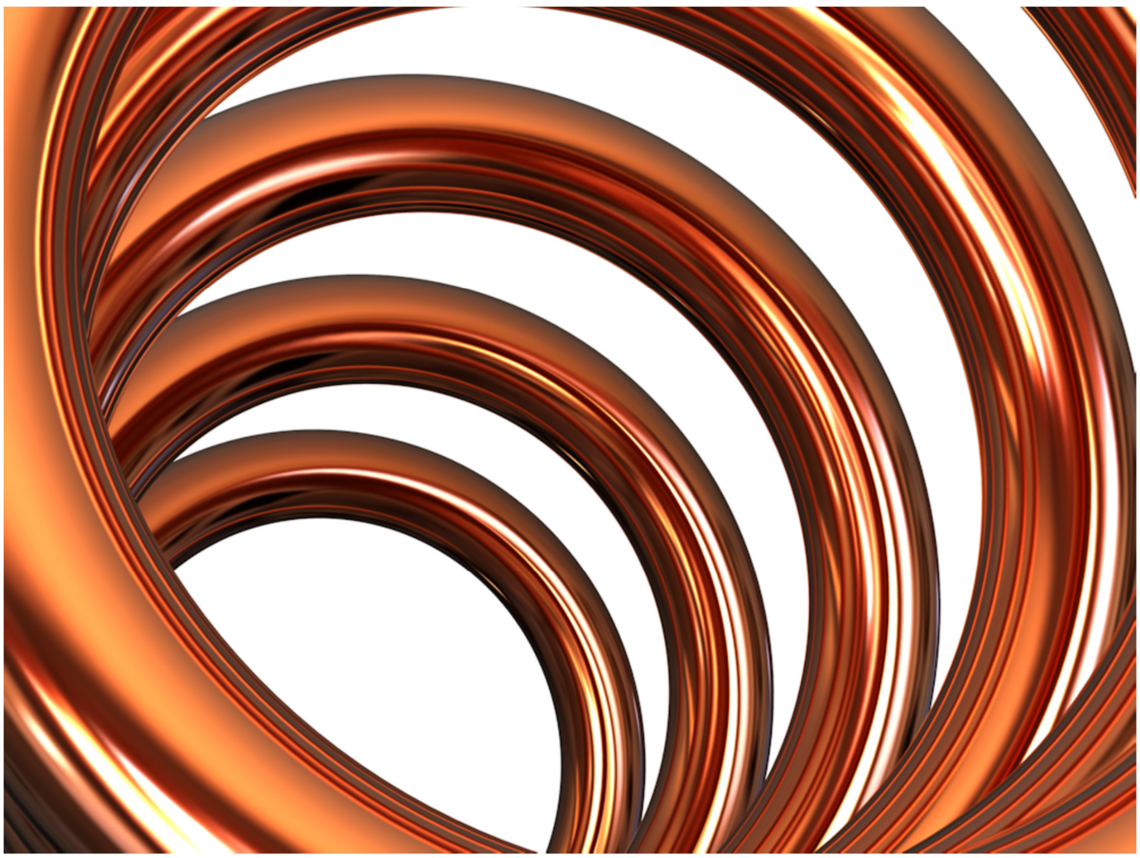
10 LES INDUCTEURS

Le solénoïde montré sur la figure a une inductance de 200 mH et est traversé par un courant de 100 A. Le fil qui forme le solénoïde a une résistance de 0,05 Ω. Quelle est la différence de potentiel entre les deux extrémités du solénoïde si le courant augmente au rythme de 50 A/s ?

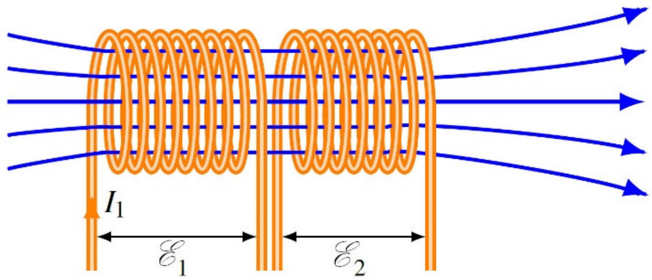


www.copperconsultancy.com/about-us/about-copper/

Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

10.1 L'AUTO-INDUCTION

Imaginons 2 solénoïdes placés bout à bout, comme sur la figure.

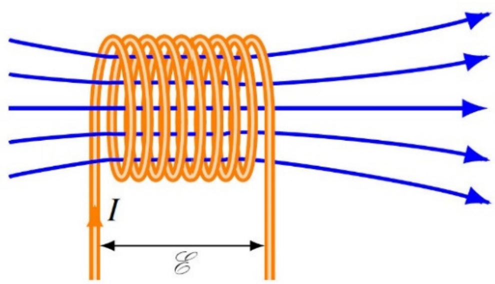


On pourrait alors faire apparaitre une différence de potentiel aux bornes de la bobine 2 (celle de droite) en faisant varier le courant dans la bobine 1 (celle de gauche). On y arrive avec la séquence suivante :

- Si le courant I_1 varie, alors le champ fait par le solénoïde 1 (B_1) varie.
- Si le champ B_1 varie, alors le flux fait dans le solénoïde 2 (ϕ_2) varie.
- Si le flux ϕ_2 varie, alors il y a une différence de potentiel induite aux bornes du solénoïde 2 ($\mathscr{E}_2$).

Il s'agit tout simplement d'un phénomène d'induction entre 2 bobines tel qu'on l'a vu au chapitre précédent.

Mais il y a plus que l'induction entre les 2 bobines. Laissons tomber la bobine 2 et imaginons maintenant qu'il n'y a qu'une seule bobine.



Quand le courant varie dans cette bobine, le champ magnétique fait par la bobine varie et il y a donc une variation de flux dans la bobine. Cette variation de flux va alors faire apparaitre une différence de potentiel aux bornes de la bobine. La variation de courant dans une bobine agit donc aussi sur elle-même pour créer une différence de potentiel à ses bornes. Ce phénomène, appelé *auto-induction,* fut découvert par Joseph Henry en 1832 (Faraday avait suspecté son existence l'année précédente, mais il n'est pas parvenu à le mettre en évidence).

L'auto-induction est très souvent négligeable, sauf quand il y a une bobine de fil.

10.2 L'INDUCTANCE

La définition de l'inductance

On a vu qu'une variation de courant dans une bobine fait apparaitre une différence de potentiel aux bornes de la bobine. On pourrait bien sûr trouver cette différence de potentiel en calculant les variations de flux magnétique, mais on va faire un raccourci ici pour pouvoir calculer la différence de potentiel directement à partir des variations de courant. Autrement dit, on veut trouver $\mathscr{E}$ directement à partir de *dI/dt*.

Premièrement, on sait, selon la loi de l'induction, que la différence de potentiel induite est

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt}$$

Comme le flux est proportionnel au champ magnétique

$$\phi \propto B$$

et que le champ est proportionnel au courant

$$B \propto I$$

on devrait avoir que

$$\phi \propto I$$

et donc que

$$\mathscr{E} \propto -\frac{dI}{dt}$$

Cela veut dire qu'on doit pouvoir aussi calculer la différence de potentiel induite avec la formule suivante.

Définition de l'inductance

$$\mathscr{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

Dans cette formule, L, appelée *l'inductance* (ou *l'auto-inductance*), est la constante de proportionnalité entre $\mathscr{E}$ et *dI/dt*.

Comme $\mathscr{E}$ est en volts et que *dI/dt* est en ampères par seconde, L doit être en Vs/A. On a donné le nom de *henry* à cette unité.

Le henry (H)

$$1H = 1\tfrac{Vs}{A}$$

Le calcul de l'inductance

La valeur de L dépend de la forme du circuit dans lequel passe le courant. Comme la différence de potentiel induite peut être calculée avec n'importe laquelle de ces deux formules

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi}{dt} \qquad \mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

on doit avoir

$$N\frac{d\phi}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

Puisque L et N sont des constantes, on peut écrire

$$\frac{d\left(N\phi\right)}{dt} = \frac{d\left(LI\right)}{dt}$$

En intégrant, on a

$$N\phi = LI$$

(La constante d'intégration est nulle, car le flux est nul si le courant est nul.) On arrive finalement à la formule suivante.

$$L = \frac{N\phi}{I}$$

L'inductance d'un solénoïde

Tous les circuits ont une inductance, mais elle est souvent négligeable. Elle peut cependant être importante quand il y a un solénoïde dans le circuit. On va donc uniquement s'intéresser à l'inductance des solénoïdes. Ce qui est super, c'est que c'est relativement facile de calculer l'inductance d'un solénoïde parce que le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde (ce qui facilite grandement le calcul du flux).

Pour trouver l'inductance d'un solénoïde avec

$$L = \frac{N\phi}{I}$$

on doit connaitre le flux. Pour connaitre le flux, on doit connaitre le champ magnétique dans le solénoïde. On sait que ce champ est uniforme et vaut

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

Le flux dans le solénoïde est facile à calculer puisque le champ est uniforme. Ce flux vaut

$$\begin{aligned}\phi &= BA \\ &= \frac{\mu_0 NI}{\ell}\pi r^2\end{aligned}$$

L'inductance est donc

$$\begin{aligned}L &= \frac{N\phi}{I} \\ &= \frac{N\frac{\mu_0 NI}{\ell}\pi r^2}{I}\end{aligned}$$

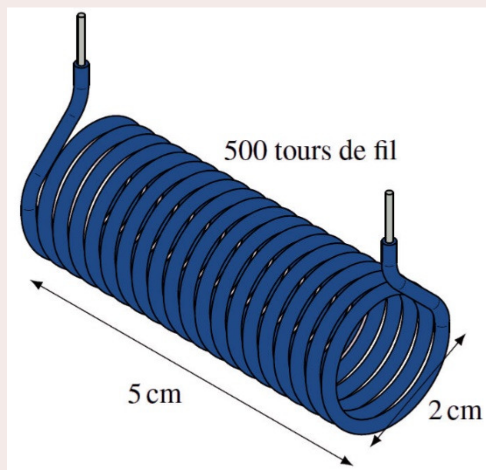
En simplifiant les I, on arrive à la formule suivante.

L'inductance d'un solénoïde

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell}$$

Exemple 10.2.1

Voici un solénoïde.



a) Quelle est l'inductance de ce solénoïde ?

L'inductance est

$$\begin{aligned}L &= \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} \\ &= \frac{4\pi\times 10^{-7}\,\frac{Tm}{A}\cdot(500)^2\cdot\pi\cdot(0,01m)^2}{0,05m} \\ &= 1,974\times 10^{-3}\,H \\ &= 1,974\,mH\end{aligned}$$

b) Quelle est la différence de potentiel induite aux bornes du solénoïde à t = 1 s si le courant dans le solénoïde est donné par la formule suivante ?

$$I = 100\,\tfrac{A}{s^2}\cdot t^2$$

La différence de potentiel se trouve avec

$$\mathscr{E} = \left| -L\frac{dI}{dt} \right|$$

(Puisqu'on s'intéresse uniquement à la valeur de la différence de potentiel, le signe de la différence de potentiel n'a pas d'importance. C'est pour cela qu'on fait la valeur absolue. On s'occupera du signe uniquement quand on demandera quel bout du fil a un potentiel plus élevé, ce qu'on fera plus loin avec les lois de Kirchhoff.)

Pour trouver la différence de potentiel, il nous faut le taux de variation du courant. Ce taux est

$$\frac{dI}{dt} = 200\tfrac{A}{s^2} \cdot t$$

À t = 1 s, ce taux de variation vaut

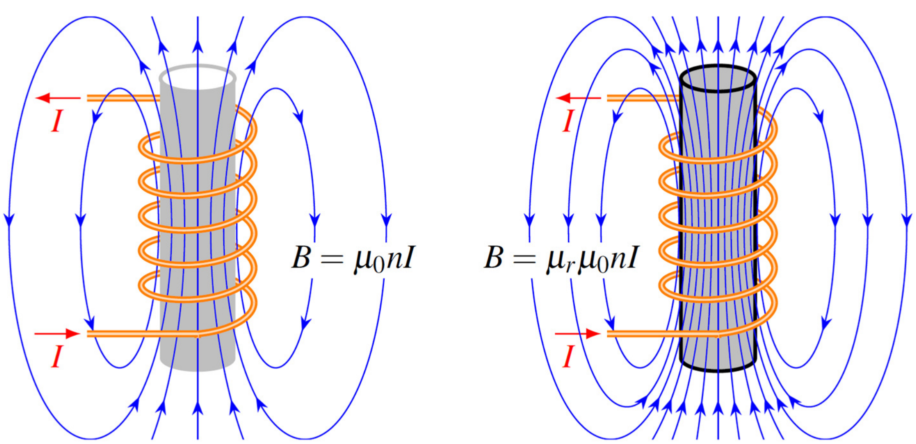
$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= 200\tfrac{A}{s^2} \cdot 1s \\ &= 200\tfrac{A}{s}\end{aligned}$$

La différence de potentiel induite est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \left| -L\frac{dI}{dt} \right| \\ &= \left| -1,974 \times 10^{-3} H \cdot 200\tfrac{A}{s} \right| \\ &= 0,3948V\end{aligned}$$

L'inductance avec une substance ferromagnétique

On augmente beaucoup l'inductance d'un solénoïde en plaçant une substance ferromagnétique à l'intérieur du solénoïde. Cette substance étant dans un champ magnétique, elle devient aussi une source de champ magnétique. Cela fait donc augmenter le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde puisque le champ de la substance s'ajoute à celui fait par le courant.



Sans substance ferromagnétique Avec une substance ferromagnétique

Avec la substance ferromagnétique, le champ devient μ_r fois plus grand (μ_r est la perméabilité relative de la substance). Voici la valeur approximative de la perméabilité relative typique pour quelques substances ferromagnétiques.

Substance	Perméabilité relative (μ_r)
Fer	200
Nickel	100
Permalloy (78,5 % nickel, 21,5 % fer)	8 000
Mu-métal (75 % nickel, 2 % chrome, 5 % cuivre, 18 % fer)	20 000

(Notez que la valeur de la perméabilité du fer change beaucoup selon la pureté et la structure cristalline du fer.)

Puisque le champ est multiplié par μ_r, le flux est aussi multiplié par μ_r. Puisque l'inductance est

$$L = \frac{N\phi}{I}$$

elle est aussi multipliée par μ_r. On a donc

Inductance avec une substance ferromagnétique

$$L_{\text{avec ferromagnétique}} = \mu_r L_{\text{avec vide}}$$

Le fait de mettre un cœur de fer dans un solénoïde multiplie donc par 200 l'inductance du solénoïde.

Autre unité pour μ_0

Puisque

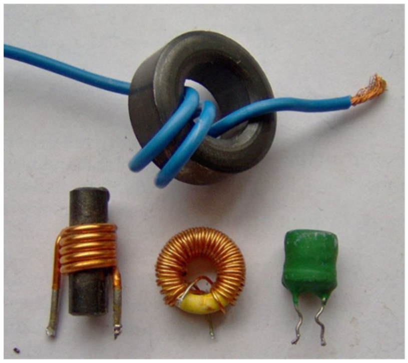
$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell}$$

donne des henrys, μ_0 doit être en H/m, car il n'y a pas d'unité pour les N alors que r et ℓ sont en mètres. On peut donc écrire

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

10.3 LES INDUCTEURS

Un objet ayant une inductance élevée placé dans un circuit est un inducteur. Comme on l'a dit, il s'agit généralement d'une bobine de fil. Voici quelques exemples d'inducteurs utilisés dans des circuits.



de.wikipedia.org/wiki/Spule_(Elektrotechnik)

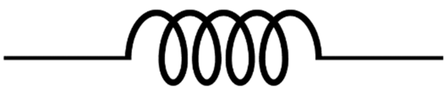
Parfois, ça ressemble un peu moins à une bobine, mais c'est parce qu'elle est simplement recouverte de céramique.

de.wikipedia.org/wiki/Spule_(Elektrotechnik)

Le symbole de l'inducteur

On utilise le symbole suivant pour représenter un inducteur dans un circuit.

On utilise aussi le symbole suivant.



Il semble que ce 2e symbole est en train de disparaitre lentement au profit du premier symbole.

Les lois de Kirchhoff avec les inducteurs

On pourra utiliser les lois de Kirchhoff dans les circuits comportant des inducteurs. Pour ce faire, on doit savoir ce qu'on doit faire avec les inducteurs avec la loi des mailles.

Quand un inducteur est dans un circuit, il est rare qu'on note la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur avec $\mathscr{E}$, car on réserve ce symbole pour les sources. On utilise simplement ΔV_L. On sait que la différence de potentiel (en valeur absolue) aux bornes de l'inducteur est

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Reste à trouver si le potentiel monte (ΔV positif) ou diminue (ΔV négatif) quand on traverse l'inducteur.

Quand le courant augmente dans un inducteur, alors le flux dans l'inducteur augmente, ce qui induit un champ magnétique dans la direction opposée au champ initial (loi de Lenz), ce qui signifie que le courant induit est dans la direction opposée au courant initial. Cela signifie que l'inducteur agit comme une source qui tente de faire un courant dans la direction opposée à la direction du courant dans le circuit.

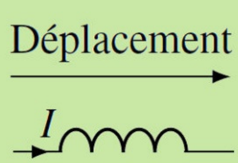
Quand le courant diminue dans un inducteur, alors le flux dans l'inducteur diminue, ce qui induit un champ magnétique dans la même direction que champ initial (loi de Lenz), ce qui signifie que le courant induit est dans le même sens que le courant initial. Cela signifie que l'inducteur agit comme une source qui tente de faire un courant dans la même direction que la direction du courant dans le circuit.

On pourrait ainsi croire qu'on peut facilement savoir si le potentiel monte ou diminue quand on passe à travers l'inducteur. Le problème, c'est qu'on ne sait pas toujours si le courant monte ou descend. On va donc supposer que le courant augmente pour faire nos équations.

Avec notre supposition, on aura toujours la situation suivante.

On voit alors que si on va dans le sens du courant, on va passer du potentiel le plus haut au potentiel le plus bas et le potentiel va baisser (et donc que ΔV est négatif). Si on va dans le sens contraire du courant, on va passer du potentiel le plus bas au potentiel le plus haut et le potentiel va monter (et donc que ΔV est positif).

Loi de Kirchhoff pour les inducteurs

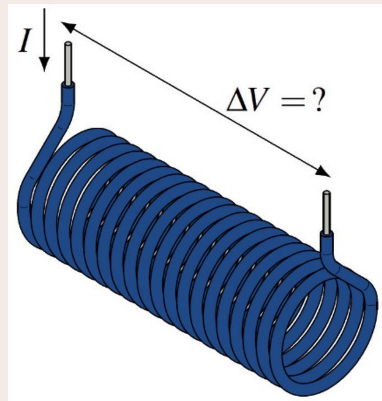


$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

En fait, même si on a supposé que le courant est en train de monter, ces équations sont bonnes dans toutes les situations. Si le courant descend, alors *dI/dt* est négatif et les signes de ΔV s'inversent comme on doit avoir quand le courant diminue.

Exemple 10.3.1



Le solénoïde montré sur la figure a une inductance de 200 mH et est traversé par un courant de 100 A. Le fil qui forme le solénoïde a une résistance de 0,05 Ω.

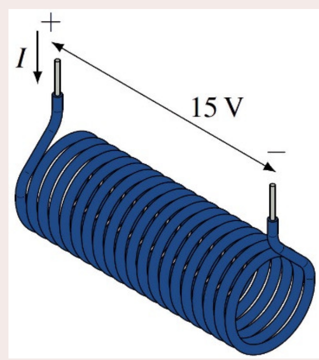
a) Quelle est la différence de potentiel entre les deux extrémités du solénoïde si le courant augmente au rythme de 50 A/s ?

En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est, selon les lois de Kirchhoff,

$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt} - RI$$

Puisque *dI/dt* vaut +50 A/s (positif quand le courant monte), on a

$$\begin{aligned}\Delta V &= -L\frac{dI}{dt} - RI \\ &= -0,2H \cdot 50\tfrac{A}{s} - 0,05\Omega \cdot 100A \\ &= -10V - 5V \\ &= -15V\end{aligned}$$



Puisque la réponse est négative, le potentiel diminue en allant dans le sens du courant. Le potentiel est donc plus élevé du côté où le courant arrive dans le solénoïde.

b) Quelle est la différence de potentiel entre les deux extrémités du solénoïde si le courant diminue au rythme de 50 A/s ?

En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est, selon les lois de Kirchhoff,

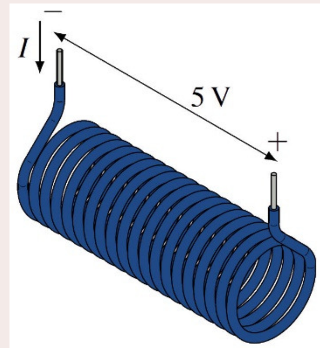
$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt} - RI$$

Puisque *dI/dt* vaut –50 A/s (négatif quand le courant diminue), on a

$$\begin{aligned}\Delta V &= -L\frac{dI}{dt} - RI \\ &= -0,2H \cdot \left(-50\tfrac{A}{s}\right) - 0,05\Omega \cdot 100A\end{aligned}$$

$$= 10V - 5V$$
$$= 5V$$

Puisque la réponse est positive, le potentiel augmente en allant dans le sens du courant. Le potentiel est donc plus élevé du côté où le courant sort du solénoïde.



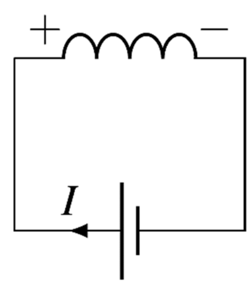
Quand le courant monte, la différence de potentiel induite s'oppose à l'augmentation, ce qui signifie que la différence de potentiel induite cherche à faire un courant qui s'oppose au changement de courant.

Quand le courant diminue, la différence de potentiel induite s'oppose à la diminution, ce qui signifie que la différence de potentiel induite cherche à faire un courant dans la même direction que le courant de départ.

C'est un peu comme si l'inducteur était un genre de vieux conservateur qui s'oppose à tout changement.

Un circuit avec une source et un inducteur

Branchons un inducteur à une source.



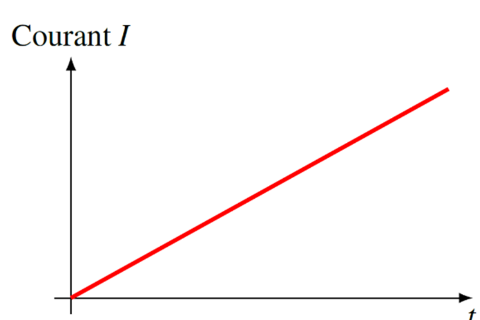
La loi des mailles de ce circuit est (en allant dans le sens du courant)

$$\mathscr{E} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

On arrive alors à

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L}$$

Puisque $\mathscr{E}$ et L sont des constantes, cette équation signifie que le courant monte à un rythme constant dans ce circuit. On a donc le graphique de droite pour le courant en fonction du temps.

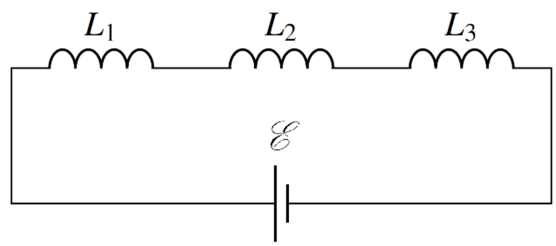


La pente de la droite dans ce graphique est $\mathscr{E}/L$.

Ici aussi, l'inducteur s'oppose au changement. Comme il n'y a pas de résistance, le courant dans ce circuit devrait être infini. L'opposition au changement de l'inducteur fait alors en sorte que le courant monte graduellement plutôt que de passer directement d'un courant nul à un courant infini. Le changement est plus lent avec un inducteur.

10.4 LES INDUCTEURS EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE

Les inducteurs en série



Supposons qu'on ait plusieurs inducteurs branchés en série tels qu'illustrés sur cette figure.

Puisque le courant doit toujours être le même dans tous ces inducteurs (puisqu'ils sont en série), le taux de variation du courant doit être le même dans les trois inducteurs.

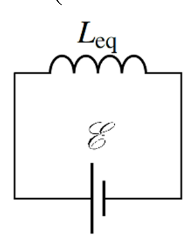
$$\frac{dI}{dt} \text{ est le même pour les trois inducteurs.}$$

La loi des mailles de ce circuit est donc

$$\mathscr{E} - L_1\frac{dI}{dt} - L_2\frac{dI}{dt} - L_3\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\mathscr{E} = L_1\frac{dI}{dt} + L_2\frac{dI}{dt} + L_3\frac{dI}{dt}$$

On veut trouver l'inducteur équivalent qui va nous donner le même courant (et donc le même taux de variation du courant). La loi des mailles de ce circuit est



$$\mathscr{E} - L_{eq}\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\mathscr{E} = L_{eq}\frac{dI}{dt}$$

Puisqu'on a la même source dans les deux cas, on peut égaler les $\mathscr{E}$ pour obtenir.

$$L_{eq}\frac{dI}{dt} = L_1\frac{dI}{dt} + L_2\frac{dI}{dt} + L_3\frac{dI}{dt}$$

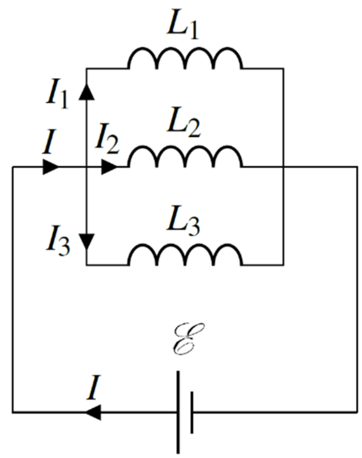
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$$

On peut facilement extrapoler à plusieurs inducteurs pour obtenir la formule suivante.

Inducteur équivalent : inducteurs en série

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 +$$

Les inducteurs en parallèle



Supposons qu'on ait plusieurs inducteurs branchés en parallèle tels qu'illustrés sur cette figure.

Dans ce cas, la différence de potentiel aux bornes des trois inducteurs est $\mathscr{E}$ (puisqu'ils sont en parallèle).

Selon la loi des nœuds, on doit avoir

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Ce qui signifie que

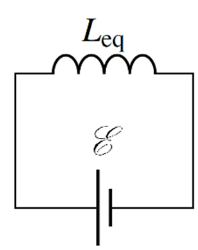
$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_3}{dt}$$

et donc que

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L_1} + \frac{\mathscr{E}}{L_2} + \frac{\mathscr{E}}{L_3}$$

puisqu'on doit avoir $\Delta V_L = \mathscr{E} = L\frac{dI}{dt}$ pour chaque inducteur.

On veut trouver l'inducteur équivalent qui va nous donner le même courant (et donc le même taux de variation du courant). La loi des mailles de ce circuit est



$$\mathscr{E} - L_{eq}\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\mathscr{E} = L_{eq}\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L_{eq}}$$

Puisqu'on doit avoir le même taux de variation du courant qu'avec les trois inducteurs, on a

$$\frac{\mathscr{E}}{L_{eq}} = \frac{\mathscr{E}}{L_1} + \frac{\mathscr{E}}{L_2} + \frac{\mathscr{E}}{L_3}$$

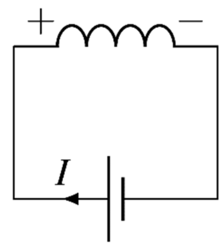
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

On peut facilement extrapoler à plusieurs inducteurs pour obtenir la formule suivante.

Inducteur équivalent : inducteurs en parallèle

$$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}+\frac{1}{L_4}+\dots$$

10.5 L'ÉNERGIE DANS UN INDUCTEUR



Quand une source fait un courant, elle fournit une énergie. Cela signifie que dans ce circuit simple, l'inducteur reçoit donc de l'énergie.

On trouve la puissance reçue par l'inducteur avec la formule suivante, valide pour tous les éléments d'un circuit.

$$P_L=\Delta V_L I$$

Avec la formule de la différence de potentiel aux bornes d'un inducteur, on obtient

$$P_L=L\frac{dI}{dt}I$$

Si le courant augmente, *dI/dt* est positive et l'inducteur reçoit de l'énergie. Si le courant diminue, *dI/dt* est négative et l'inducteur donne de l'énergie.

On trouve l'énergie totale accumulée dans l'inducteur traversé par un courant I en intégrant la puissance reçue en fonction du temps en partant d'un courant nul jusqu'au courant I (qu'on va appeler momentanément, pour faire l'intégrale, I_f pour le distinguer du courant au temps t).

$$U_L=\int_0^{t_f}L\frac{dI}{dt}Idt=\int_0^{I_f}LIdI=\left[\frac{1}{2}LI^2\right]_0^{I_f}=\frac{1}{2}LI_f^2$$

L'énergie accumulée dans l'inducteur est donc donnée par la formule suivante.

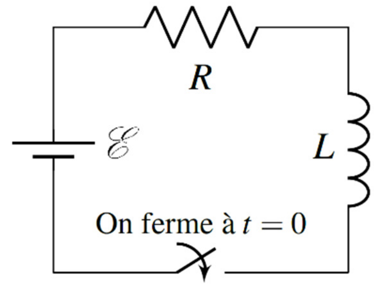
Énergie dans un inducteur traversé par un courant *I*

$$U_L=\frac{1}{2}LI^2$$

Notez que cette énergie est emmagasinée sous forme de champ magnétique (puisqu'il faut de l'énergie pour faire un tel champ). Plus le courant est grand, plus le champ fait par l'inducteur est grand et plus l'énergie est grande.

10.6 LES CIRCUITS RL

La montée du courant (circuit RL avec une source)



Le circuit RL est un circuit dans lequel il y a un résistor et un inducteur. Commençons par le circuit montré à droite. On veut savoir comment va changer le courant en fonction du temps quand on va fermer l'interrupteur.

Pour y arriver, on va faire les lois de Kirchhoff de ce circuit. En partant du coin inférieur gauche et en faisant le tour du circuit dans le sens des aiguilles d'une montre, on a

$$\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

On doit donc résoudre cette équation pour connaitre le courant en fonction du temps. Il s'agit d'une équation différentielle. Comme on n'est pas dans un cours d'équation différentielle, on va donner immédiatement la solution de cette équation. (Cliquez ici si vous voulez la voir http://physique.merici.ca/electricite/RL.pdf.) La solution de cette équation est

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (montée du courant)

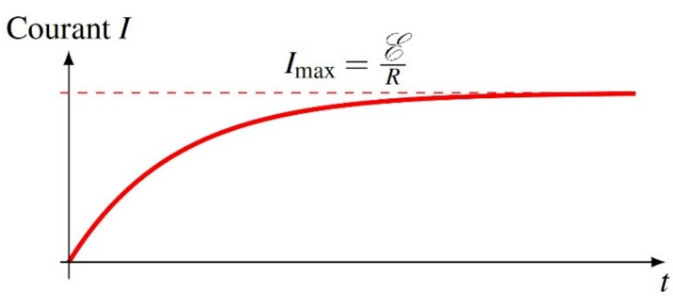
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

Dans l'exposant, on retrouve *L/R* dont la valeur est en seconde. On appelle souvent cette combinaison *la constante de temps* du circuit et elle est notée τ.

Constante de temps d'un circuit RL

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Le courant dans ce circuit est donc un courant qui monte en fonction du temps tel qu'illustré sur ce graphique.



Sans l'inducteur, le courant aurait monté instantanément à $\mathcal{E}/R$, la valeur du courant qu'on aurait avec seulement la source et la résistance. Avec l'inducteur, la montée du courant est graduelle. L'inducteur donne donc un genre d'inertie au courant qui empêche ce dernier de varier trop rapidement.

On ne peut donc pas répondre directement à la question « *Combien faut-il de temps pour que le courant atteigne sa valeur maximale ?* » puisque le courant n'atteint jamais, en théorie, la valeur maximale. On peut cependant se donner une idée du rythme de montée en définissant la demi-vie du circuit comme étant le temps qu'il faut pour le courant atteigne 50 % de la valeur maximale. On a alors

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt_{1/2}}{L}}\right)$$

En isolant $t_{½}$, on obtient la demi-vie suivante.

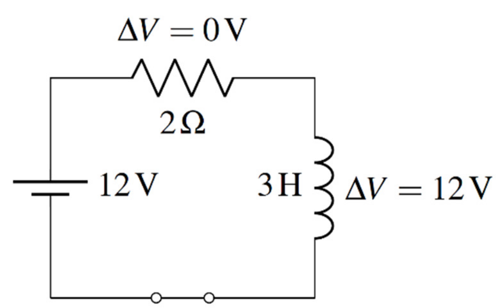
Demi-vie d'un circuit RL

$$t_{1/2} = \frac{L}{R}\ln 2$$

Examinons ce qui se passe dans un circuit RL pour mieux comprendre ces résultats.

<u>Le circuit à t = 0</u>

Immédiatement après la fermeture de l'interrupteur, le courant est nul et on a la situation montrée à droite.



(On a mis des valeurs uniquement pour simplifier l'explication.) À $t = 0$, toute la différence de potentiel de la source (12 V) se retrouve aux bornes de l'inducteur puisque le courant est nul, ce qui implique qu'il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes de la résistance. Puisque la grandeur de la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est de

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

et que toute la différence de potentiel de la source se retrouve aux bornes de l'inducteur, on a

$$\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt}$$

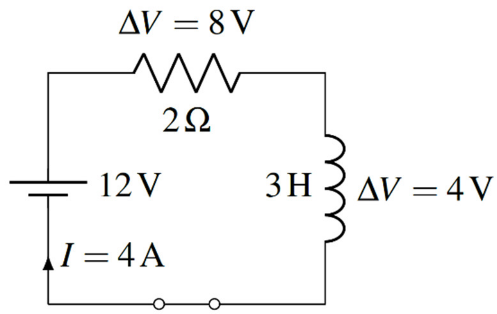
L'inducteur impose donc que le courant varie initialement au rythme donné par

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\mathcal{E}}{L}$$

(ce qui signifie dans notre exemple que le courant monte à un rythme de 4 A/s). Ceci doit être la pente du graphique du courant à t = 0. Plus l'inducteur aura une inductance élevée, plus la montée du courant se fera lentement.

Ainsi, à t = 0, les courants sur les fils où il y a des inducteurs sont initialement nuls et ils montent au rythme imposé par les inducteurs.

Le circuit pendant la montée du courant



Dans notre circuit, le courant maximal est de 6 A. Le courant monte donc lentement de 0 A à 6 A. Voici la situation quand le courant est de 4 A.

Avec un courant de 4 A, la différence de potentiel aux bornes de la résistance est maintenant de 8 V. Comme on a une source de 12 V, on doit avoir 4 V aux bornes de l'inducteur. À mesure que le courant monte, la différence de potentiel aux bornes de la résistance augmente alors que la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur diminue puisque la somme des deux différences de potentiel doit être égale à celle de la source.

Toutefois, puisque la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

on a que le rythme de variation du courant est

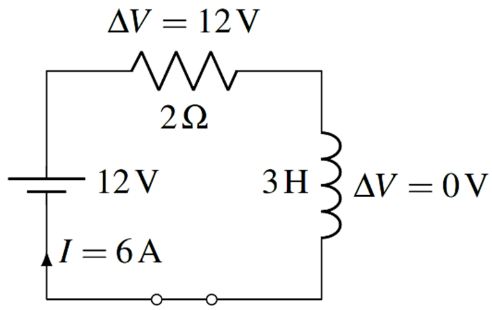
$$\frac{dI}{dt}=\frac{\Delta V_L}{L}$$

Dans notre exemple, le rythme de montée du courant n'est plus que de 1,333 A/s alors qu'il était de 4 A/s au départ.

Donc, à mesure que la différence de potentiel diminue aux bornes de l'inducteur, le rythme de montée du courant diminue. C'est pour ça que la pente diminue continuellement sur le graphique du courant en fonction du temps.

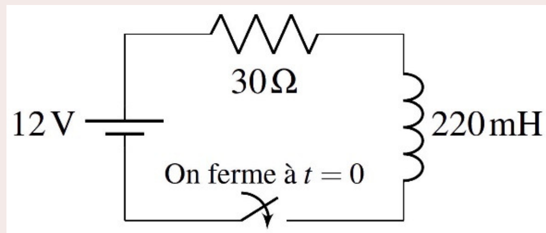
Le circuit au bout d'un temps très long

Au bout d'un temps très long, le courant dans le circuit atteint sa valeur maximale de 6 A.



La différence de potentiel aux bornes de la résistance est maintenant de 12 V, ce qui veut dire qu'elle est de 0 V pour l'inducteur. S'il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes d'un inducteur, c'est que le courant ne varie pas. Le courant est donc stable à sa valeur maximale. On a alors le courant qu'on doit avoir s'il n'y avait pas d'inducteur. Ce sera toujours le cas dans un circuit : au bout d'un temps très long, le circuit a atteint l'équilibre et les inducteurs n'ont plus aucun effet dans le circuit.

Exemple 10.6.1



Dans le circuit de droite, on ferme l'interrupteur à $t = 0$.

a) Combien faudra-t-il de temps pour que le courant atteigne le quart de sa valeur maximale ?

Comme le courant maximum est $\mathcal{E} / R$, on veut que le courant atteigne une valeur de

$$I = \frac{1}{4} I_{\max}$$
$$= \frac{1}{4} \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Le temps pour atteindre ce courant est

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$
$$\frac{1}{4}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$
$$\frac{1}{4} = \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$
$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{3}{4}$$
$$-\frac{Rt}{L} = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$t = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Le temps est donc

$$t = -\frac{0,22H}{30\Omega} \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$= 2,110ms$$

b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur et de la résistance à ce moment ?

La différence de potentiel aux bornes de la résistance est

$$\begin{aligned} \Delta V_R &= RI \\ &= R \cdot \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R} \\ &= \frac{\mathscr{E}}{4} \\ &= \frac{12V}{4} \\ &= 3V \end{aligned}$$

La différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est donc de 9 V (car la somme des deux différences de potentiel doit être égale à celle de la source).

c) À quel rythme varie le courant à ce moment ?

Puisque

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\Delta V_L}{L} \\ &= \frac{9V}{0,22H} \\ &= 40,91\tfrac{A}{s} \end{aligned}$$

d) Quelle est la puissance reçue par chaque élément du circuit à ce moment ?

La puissance fournie par la pile à ce moment est

$$\begin{aligned} P_S &= I\Delta V \\ &= \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R} \cdot \mathscr{E} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{12V}{30\Omega} \cdot 12V \\
&= 1,2W
\end{aligned}
$$

La puissance dissipée dans la résistance est

$$
\begin{aligned}
P_R &= I\Delta V_R \\
&= \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R} \cdot 3V \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{12V}{30\Omega} \cdot 3V \\
&= 0,3W
\end{aligned}
$$

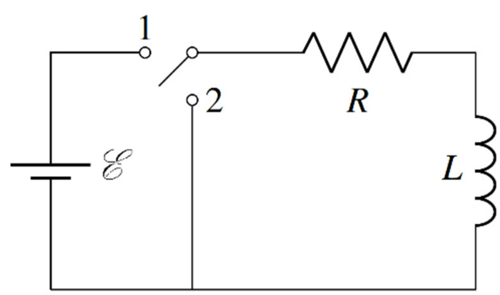
La puissance reçue par l'inducteur est

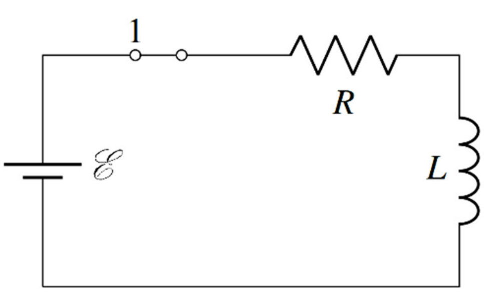
$$
\begin{aligned}
P_L &= I\Delta V_V \\
&= \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R} \cdot 9V \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{12V}{30\Omega} \cdot 9V \\
&= 0,9W
\end{aligned}
$$

On remarque que la somme des puissances reçues par l'inducteur et la résistance est égale à la puissance fournie par la pile. Ceci doit toujours être vrai. L'énergie reçue par l'inducteur est utilisée pour faire un champ magnétique de plus en plus grand.

La baisse du courant (circuit RL sans source)

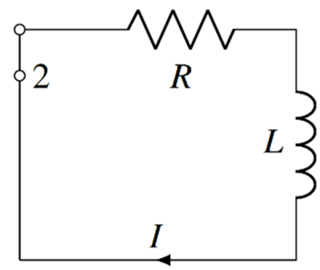
Il peut arriver qu'un courant circule dans un inducteur et qu'il n'y ait plus de source. Par exemple, on peut y arriver avec le circuit de droite.





Initialement, on place l'interrupteur à la position 1. Le fil central devient inutile et on a le circuit de gauche. Le courant à travers l'inducteur va alors monter lentement tel que vu à la section précédente.

Puis soudainement, pendant qu'il y a un courant dans l'inducteur, on place l'interrupteur à la position 2, ce qui élimine le fil où il y a la source. On a alors le circuit de droite.



On pourrait penser que le courant va cesser immédiatement parce qu'il n'y a plus de source, mais ce n'est pas ce qui va arriver. Voyons ce que nous disent les lois de Kirchhoff.

Au moment où on place l'interrupteur en position 2, on a un courant dans ce circuit, qu'on va appeler le courant initial I_0. La loi de Kirchhoff de ce circuit est

$$-RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

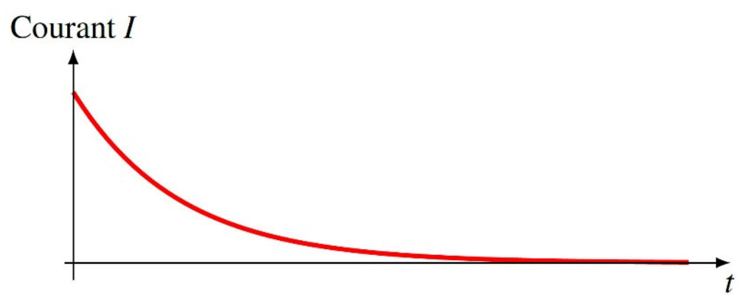
La solution de cette équation différentielle est, en utilisant la condition initiale que $I = I_0$ à $t = 0$, la suivante.

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (baisse du courant)

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}$$

(Cliquez ici si vous voulez voir la solution de l'équation http://physique.merici.ca/electricite/RL2.pdf.)

Voici le graphique pour le courant dans le circuit en fonction du temps.



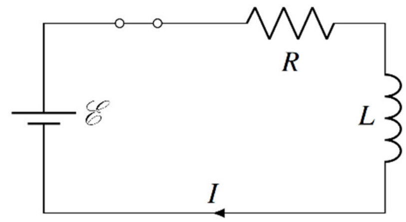
Même s'il n'y a plus de source dans ce circuit, on voit que le courant continue à circuler. C'est alors l'inducteur qui joue le rôle de source. On remarque encore une fois que l'inducteur donne une certaine inertie au courant et que celui-ci ne peut pas tomber à 0 immédiatement quand on débranche la source.

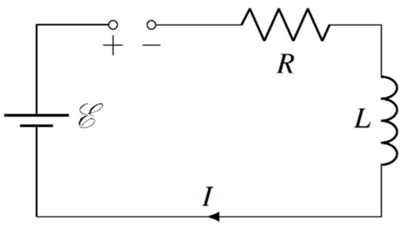
La baisse du courant se fait à un rythme tel que la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est toujours égale à la différence de potentiel aux bornes de la résistance.

$$RI = L\frac{dI}{dt}$$

À mesure que le courant baisse, la dérivée du courant doit aussi baisser. C'est pour ça que la pente du graphique diminue à mesure que le courant diminue.

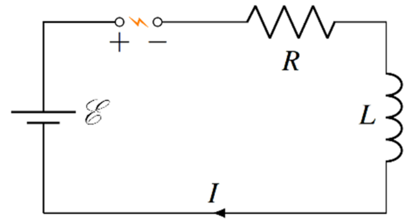
Ce courant qui continue peut être assez dangereux si l'inductance est élevée. Prenons le circuit de droite, dans lequel il y a un courant, pour illustrer la situation.





Si on ouvre l'interrupteur (qui est en haut à gauche), le courant ne peut pas immédiatement tomber à une valeur nulle et il va continuer à circuler pendant un certain temps. Mais comme le circuit est ouvert, il va s'accumuler des charges aux extrémités du fil, de chaque côté de l'interrupteur.

Cette accumulation de charge va créer un champ électrique entre les deux côtés de l'interrupteur. Si l'inductance est très grande, le courant sera difficile à arrêter et il y aura beaucoup de charges qui vont s'accumuler. Le champ peut alors devenir tellement grand qu'il va dépasser la rigidité électrique de l'air et il y aura une étincelle entre les deux côtés de l'interrupteur.



On peut d'ailleurs voir de telles étincelles dans ce vidéo.
http://www.youtube.com/watch?v=aSmMFog10D0

Soyez donc sur vos gardes si vous coupez le courant dans un circuit ayant beaucoup d'inductance.

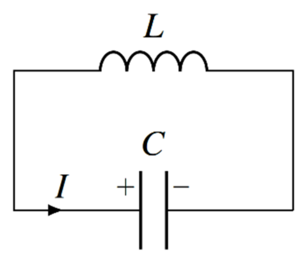
10.7 LES CIRCUITS LC

La décharge du condensateur (circuit LC sans source)

La charge et le courant

Dans un premier cas, on va étudier un circuit LC formé d'un condensateur initialement chargé avec une charge Q_0 et d'un inducteur.

La figure nous montre le sens positif pour le courant et la charge. (En fait, la seule convention utilisée est que le courant positif arrive sur la plaque positive du condensateur.) Ce n'est pas nécessairement le véritable sens du courant. On verra plus loin si on obtient une valeur positive ou négative.



La loi des mailles de ce circuit est (en allant dans le sens du courant en partant du coin inférieur gauche)

$$-\frac{Q}{C}-L\frac{dI}{dt}=0$$

La solution de cette équation différentielle est
(Cliquez ici si vous voulez la voir http://physique.merici.ca/electricite/LC.pdf.)

Charge du condensateur en fonction du temps pour un circuit LC sans source

$$Q=Q_0\cos\omega_0 t$$

$$\text{où } \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(On verra au chapitre suivant pourquoi il y a un indice 0 à ω.)

Le courant dans le circuit est la dérivée de la charge du condensateur. Il est donc

Courant en fonction du temps dans un circuit LC sans source

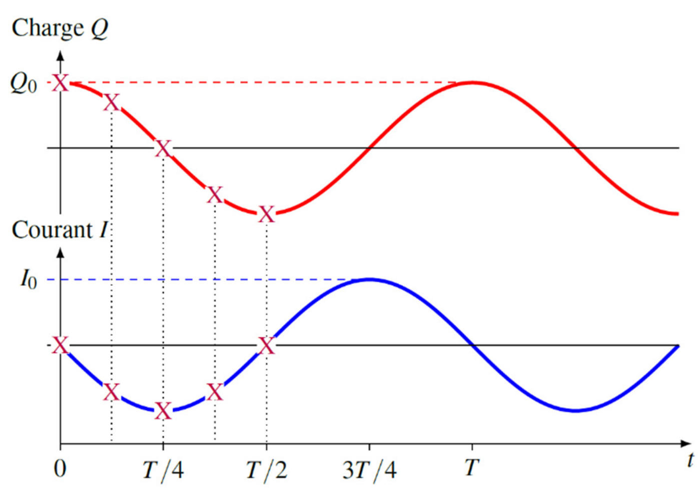
$$I=-Q_0\omega_0\sin\left(\omega_0 t\right)$$

Le courant varie donc aussi de façon sinusoïdale. En avant du sinus, on retrouve l'amplitude.

Amplitude du courant dans un circuit LC sans source

$$I_0=Q_0\omega_0=\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

Voici les graphiques de la charge et du courant dans ce circuit. (Les X sont là pour l'explication du circuit qu'on va maintenant donner.)

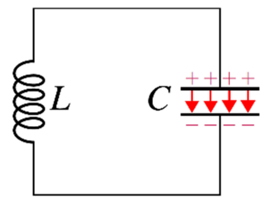


Examinons le circuit pendant son évolution pour comprendre un peu plus pourquoi il y a ces oscillations.

Le circuit à t = 0

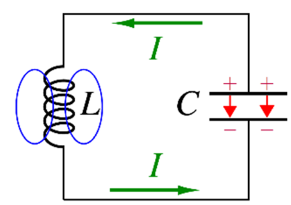
À ce moment, le condensateur est plein et il n'y a pas de courant dans le circuit. Le courant commence à monter, mais pas à n'importe quel rythme. Le rythme de montée du courant doit faire en sorte que la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur doit être égale à celle aux bornes du condensateur. Cela nous permet de déterminer la grandeur du taux de variation du courant.

$$0 = -\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt}$$
$$L\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{C}$$
$$\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{LC}$$



Cela montre que le rythme de changement du courant est proportionnel à la charge du condensateur. Plus la charge est grande, plus le courant change vite. Le courant change donc très rapidement au début puisque le condensateur est plein.

Le circuit à t = *T*/8

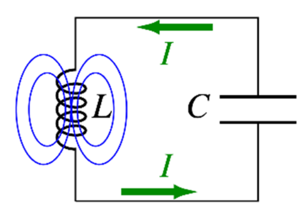


Le courant circule maintenant dans le circuit et la charge du condensateur a diminué puisque le courant est fait par la décharge du condensateur. Le courant est négatif, tout simplement parce qu'il est dans le sens contraire de la convention donnée avec les lois de Kirchhoff (ce qui se produit toujours quand un condensateur se vide). Selon notre équation

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{LC}$$

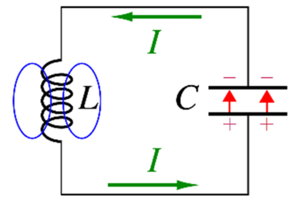
le courant change moins rapidement, car la charge du condensateur a diminué. On remarque d'ailleurs que la grandeur de la pente a diminué sur le graphique du courant. Remarquez aussi que le courant est de plus en plus grand, car *dI/dt* est toujours du même signe tant que la charge du condensateur ne change pas de signe.

Le circuit à t = *T*/4



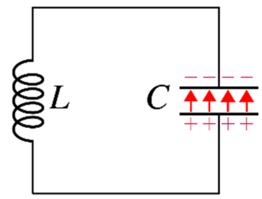
Le condensateur est maintenant vide, ce qui veut dire qu'à ce moment *dI/dt* est maintenant nul, car la charge est nulle. Le courant cesse donc d'augmenter (en valeur absolue) alors qu'il avait augmenté continuellement lors de la décharge. Conséquemment, c'est à ce moment qu'on a le courant maximum dans le circuit. On peut voir sur le graphique que le courant est maximum quand la charge du condensateur est nulle. Cependant, le courant ne pourra pas tomber immédiatement à 0 à cause de l'inducteur et il va continuer à circuler dans le circuit, ce qui va charger le condensateur dans le sens contraire de sa charge initiale.

Le circuit à t = 3*T*/8



Avec la charge du condensateur qui s'inverse, *dI/dt* s'inverse également. Le courant dans le circuit commence alors à diminuer. Plus le temps avance, plus la charge du condensateur augmente et plus le courant diminue rapidement. Pendant tout ce temps, le condensateur augmente sa charge.

Le circuit à t = T/2



À ce moment, le courant a fini par s'arrêter, mais le condensateur est à nouveau chargé, mais avec une polarité inversée par rapport à sa charge initiale. Le condensateur va alors recommencer à se vider et le cycle recommencera sans fin.

<u>*L'énergie*</u>

L'énergie dans le condensateur est

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C}$$

et l'énergie dans l'inducteur est

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

L'énergie totale du circuit est donc

$$\begin{aligned} U &= U_C + U_L \\ &= \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C} + \frac{1}{2}LQ_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Mais puisque

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

on a

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C} + \frac{1}{2}LQ_0^2 \frac{1}{LC}\sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{Q_0^2}{2C}\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} \end{aligned}$$

On voit que l'énergie totale ne varie pas en fonction du temps. Il ne se perd donc pas d'énergie dans un circuit LC. La valeur obtenue est simplement l'énergie initiale du condensateur. De plus, puisque

$$I_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

L'énergie totale est aussi

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{LCI_0^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_0^2$$

C'est aussi l'énergie de l'inducteur quand le courant est maximal, donc quand toute l'énergie du circuit est dans l'inducteur. On a donc

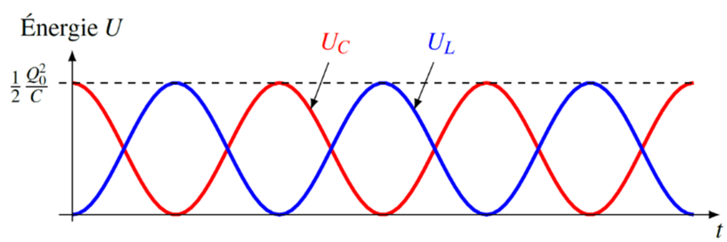
Énergie dans un circuit LC sans source

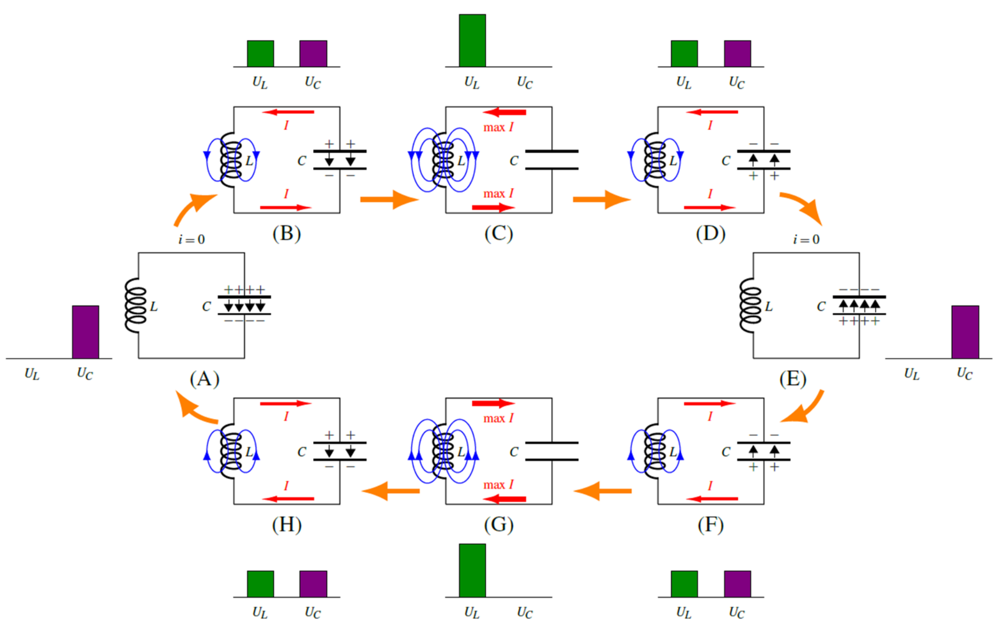
$$U_C = \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C}$$

$$U_L = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

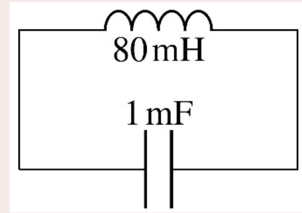
$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Ce qui nous donne les graphiques de droite. Il y a donc un échange continuel d'énergie entre le condensateur et l'inducteur, mais la somme des 2 énergies reste constante.





Exemple 10.7.1



Dans le circuit de droite, le courant initial est nul et la différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur est de 50 V.

a) Quelle est la période des oscillations du courant dans le circuit ?

Comme pour n'importe quel phénomène d'oscillation, la période est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On doit donc trouver la fréquence angulaire. La fréquence angulaire est

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0,08H \cdot 0,001F}} \\ &= 111,8 \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\ &= \frac{2\pi}{111,8 \tfrac{rad}{s}} \\ &= 0,0562s = 56,2ms\end{aligned}$$

b) Quel est le courant maximum dans ce circuit ?

L'amplitude du courant est

$$I_0 = Q_0\omega_0$$

Pour trouver l'amplitude, on a besoin de la charge initiale du condensateur. Cette charge est

$$\begin{aligned}Q_0 &= C\Delta V_0 \\ &= 10^{-3} F \cdot 50V \\ &= 0,05C\end{aligned}$$

L'amplitude du courant est donc

$$\begin{aligned}I_0 &= Q_0\omega_0 \\ &= 0,05C \cdot 111,8 \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

$$= 5,59A$$

c) Quelle est l'énergie totale dans ce circuit ?

L'énergie totale est

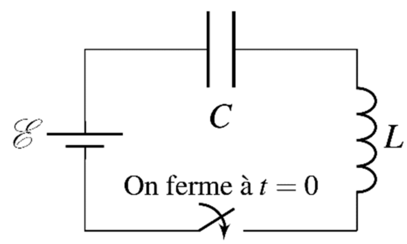
$$\begin{aligned} U &= \frac{Q_0^2}{2C} \\ &= \frac{(0,05C)^2}{2 \cdot 0,001F} \\ &= 1,25J \end{aligned}$$

Notez qu'on aurait pu y arriver aussi avec

$$U = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} 80mH \cdot (5,59A)^2 = 1,25J$$

La charge du condensateur (circuit LC avec une source)

La solution n'est pas très différente s'il y a une source que l'on branche à un condensateur déchargé et à un inducteur. La loi des mailles de Kirchhoff donne alors l'équation suivante.



$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

La solution de cette équation nous permet d'obtenir les formules suivantes.
(Cliquez ici si vous voulez voir la solution http://physique.merici.ca/electricite/LC2.pdf.)

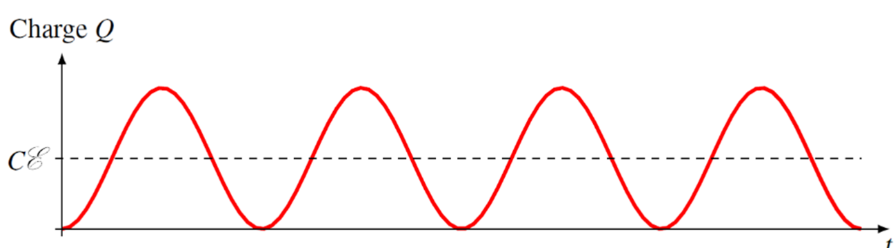
Charge et courant en fonction du temps pour un circuit LC avec une source

$$Q = C\mathscr{E}(1 - \cos \omega_0 t)$$

$$I = C\mathscr{E}\omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$\text{où } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Le graphique de la charge en fonction du temps est alors le suivant.



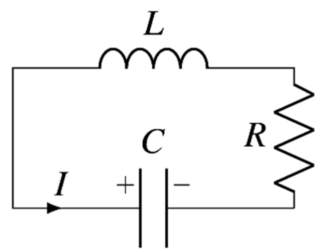
On a encore des oscillations et la fréquence est exactement la même que quand il n'y a pas de source. L'oscillation se fait autour de la charge qu'aurait le condensateur s'il n'y avait pas d'inducteur, de sorte que l'amplitude des oscillations est $C\mathscr{E}$.

10.8 LES CIRCUITS RLC

La décharge du condensateur (circuit RLC sans source)

La charge du condensateur

Dans ce circuit RLC, il y a un inducteur, une résistance et un condensateur initialement chargé avec une charge initiale Q_0.



La figure nous montre le sens positif pour le courant et la charge. (En fait, la seule convention utilisée est que le courant positif arrive sur la plaque positive du condensateur.) Ce n'est pas nécessairement le véritable sens du courant. On verra plus loin si on obtient une valeur positive ou négative.

La loi des mailles de ce circuit est (en allant dans le sens du courant en partant du coin supérieur gauche)

$$-\frac{Q}{C} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

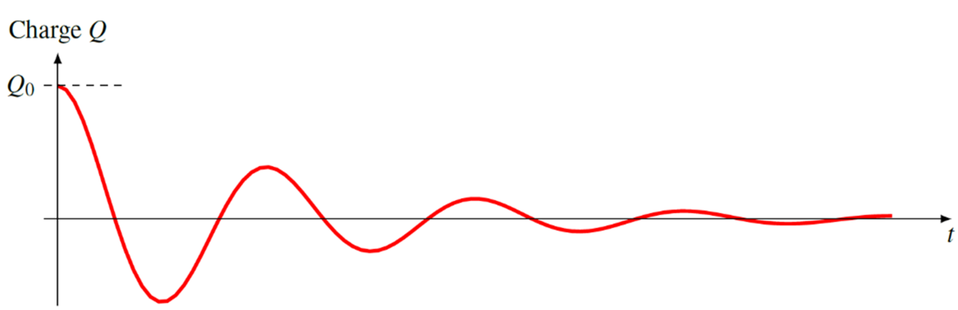
La solution de cette équation différentielle est
(Cliquez ici si vous voulez la voir http://physique.merici.ca/electricite/RLC.pdf.)

Charge du condensateur en fonction du temps pour un circuit RLC sans source

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right) \qquad \left(\text{si } \frac{1}{LC} > \alpha^2\right)$$

$$\text{où} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Le graphique de la charge en fonction du temps ressemble donc à ceci.



En gros, on retrouve nos oscillations du circuit LC, mais l'amplitude des oscillations diminue parce que de l'énergie se perd en chaleur dans la résistance. Il en reste donc de moins en moins pour charger le condensateur ou pour faire le champ magnétique dans l'inducteur.

Le courant

Pour obtenir le courant, on n'a qu'à dériver la charge par rapport au temps. Au premier coup d'œil, on peut s'attendre à une formule assez complexe puisqu'il y a trois *t* dans la formule de la charge, mais le résultat est quand même assez simple.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{dQ}{dt} \\
&= \frac{d\left(Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right)}{dt} \\
&= Q_0\left(-\alpha\right)e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right) + Q_0 e^{-\alpha t}\left(-\omega'\sin\omega' t + \alpha\cos\omega' t\right) \\
&= -Q_0\alpha e^{-\alpha t}\cos\omega' t - Q_0 e^{-\alpha t}\frac{\alpha^2}{\omega'}\sin\omega' t - Q_0\omega' e^{-\alpha t}\sin\omega' t + Q_0\alpha e^{-\alpha t}\cos\omega' t
\end{aligned}$$

Le premier et le quatrième terme s'annulent et il reste

$$I = -Q_0\left(\frac{\alpha^2}{\omega'} + \omega'\right)e^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

Mais le terme entre parenthèses est

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2}{\omega'} + \omega' &= \frac{1}{\omega'}\left(\alpha^2 + \omega'^2\right) \\
&= \frac{1}{\omega'}\left(\alpha^2 + \left(\frac{1}{LC} - \alpha^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{\omega' LC}
\end{aligned}$$

Le courant est donc

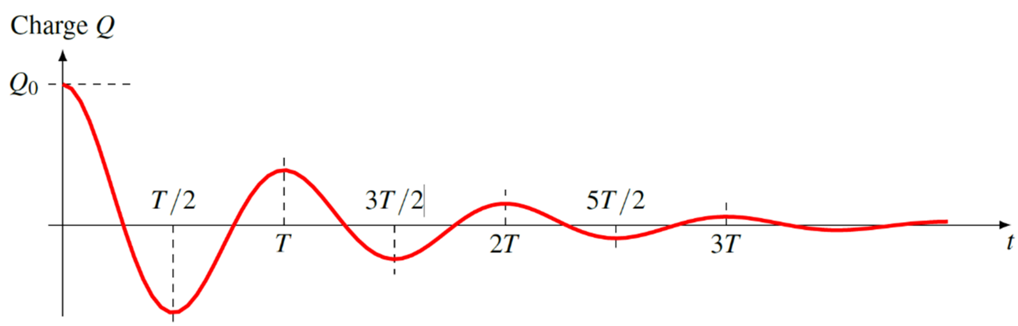
Courant en fonction du temps pour un circuit RLC sans source

$$I = -\frac{Q_0}{\omega' LC}e^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

Cette forme assez simple permet de constater que le courant devient nul quand le sinus est nul, donc quand

$$t = \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, 2T, ...$$

Donc le courant est nul à chaque demi-période. Ces instants correspondent aussi aux moments où on a un maximum relatif de la charge du condensateur.

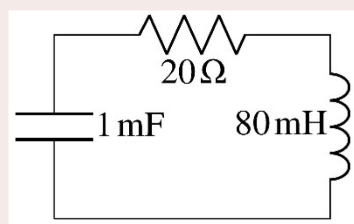


Autres solutions

Les solutions sont complètement différentes si $1/LC < \alpha^2$ ou si $1/LC = \alpha^2$. Ce sont des situations où l'effet de la résistance est plus grand que l'effet de l'inducteur. Dans ce cas, le circuit ressemble davantage à un circuit RC qu'à un circuit LC. Il n'y a pas d'oscillations et le condensateur se vide simplement à travers la résistance et sa charge diminue graduellement. Au pire, le condensateur se recharge un peu dans le sens contraire, puis se vide à nouveau, mais c'est tout. Nous n'étudierons pas plus que ça ces solutions.

Exemple 10.8.1

Dans le circuit de droite, le courant initial est nul et la différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur est de 50 V. Quelle est la période des oscillations du courant dans le circuit ?



La période est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il nous faut donc la fréquence angulaire. La fréquence angulaire est

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Commençons par calculer la valeur de α.

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$= \frac{20\Omega}{2 \cdot 0,08H}$$
$$= 125 s^{-1}$$

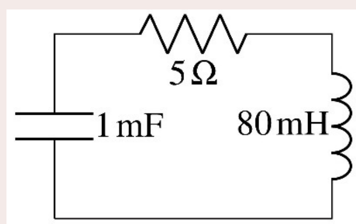
La fréquence angulaire est donc

$$\begin{aligned} \omega' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{0,08H \cdot 0,001F} - \left(125 s^{-1}\right)^2} \\ &= \sqrt{12500 \tfrac{rad^2}{s^2} - 15625 \tfrac{rad^2}{s^2}} \\ &= \sqrt{-3125 \tfrac{rad^2}{s^2}} \end{aligned}$$

Si on arrive à une racine d'un nombre négatif, c'est parce que $1/LC < \alpha^2$. Dans ce cas, il n'y a pas d'oscillations et donc pas de fréquence.

Dans cet exemple, la résistance est trop grande pour qu'il y ait des oscillations. Même avec une petite résistance, on peut arriver à ce genre de solution avec des condensateurs de grande capacité. Dans ce cas, le condensateur prend beaucoup de temps à se vider et le courant ne varie pas autant que ce qu'on aurait avec une capacité plus petite. Quand le courant ne varie pas beaucoup, l'effet de l'inducteur est peu important et l'effet de la résistance domine.

Exemple 10.8.2



Dans le circuit de droite, le courant initial est nul et la différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur est de 50 V.

a) Quelle est la période des oscillations du courant dans le circuit ?

La période est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il nous faut donc la fréquence angulaire. La fréquence angulaire est

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Commençons par calculer la valeur de α.

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$= \frac{5\Omega}{2 \cdot 0,08H}$$
$$= 31,25s^{-1}$$

La fréquence angulaire est donc

$$\begin{aligned}\omega' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{0,08H \cdot 0,001F} - \left(31,25s^{-1}\right)^2} \\ &= \sqrt{12500\tfrac{rad^2}{s^2} - 976,6\tfrac{rad^2}{s^2}} \\ &= 107,35\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega'} \\ &= \frac{2\pi}{107,35\tfrac{rad}{s}} \\ &= 0,05853s = 58,53ms\end{aligned}$$

Remarquez comme la période est plus longue par rapport à ce qu'on avait quand la résistance était nulle (56,2 ms). L'oscillation est un peu plus lente parce que le condensateur a un peu plus de difficulté à se décharger à travers un inducteur et une résistance qu'à travers un inducteur seul.

b) Quelle sera la charge du condensateur au bout d'un cycle ?

La charge du condensateur en fonction du temps est donnée par

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos \omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin \omega' t\right)$$

Au bout d'un cycle, il s'est écoulé une période qui vaut $2\pi/\omega'$. On a donc

$$\begin{aligned}Q &= Q_0 e^{-\alpha T}\left(\cos \omega' \frac{2\pi}{\omega'} + \frac{\alpha}{\omega'}\sin \omega' \frac{2\pi}{\omega'}\right) \\ &= Q_0 e^{-\alpha T}\left(\cos 2\pi + \frac{\alpha}{\omega'}\sin 2\pi\right) \\ &= Q_0 e^{-\alpha T}\left(1 + \frac{\alpha}{\omega'}\cdot 0\right) \\ &= Q_0 e^{-\alpha T}\end{aligned}$$

Pour la calculer, il nous faut la charge initiale du condensateur. Cette charge est

$$\begin{aligned} Q_0 &= C\Delta V_0 \\ &= 0{,}001F \cdot 50V \\ &= 0{,}05C \end{aligned}$$

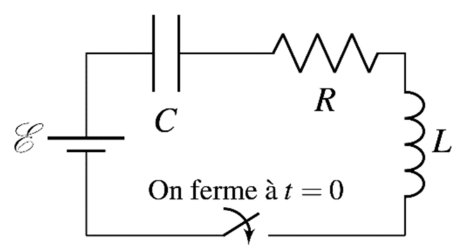
Ainsi, au bout d'un cycle, la charge est

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 e^{-\alpha T} \\ &= 0{,}05C \cdot e^{-31{,}25s^{-1} \cdot 0{,}05853s} \\ &= 0{,}00803C \end{aligned}$$

Notez finalement que la résistance et l'inducteur peuvent en fait venir du même objet. Un solénoïde est à la fois une résistance (résistance du fil) et un inducteur. Même si R et L viennent du même objet, la solution se fait de la même façon que ce qu'on a fait au dernier exemple.

La charge du condensateur (circuit RLC avec une source)

La solution n'est pas très différente s'il y a une source que l'on branche à un condensateur déchargé, à un inducteur et à une résistance. La loi des mailles de Kirchhoff donne alors l'équation suivante.



$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

La solution de cette équation différentielle donne les formules suivantes.
(Cliquez ici si vous voulez voir la solution http://physique.merici.ca/electricite/RLC2.pdf.)

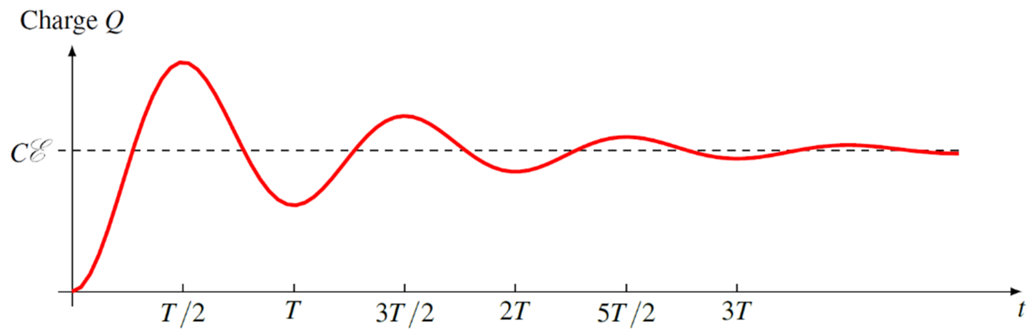
Charge et courant en fonction du temps pour un circuit RLC avec une source

$$Q = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\alpha t}\left(\cos \omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin \omega' t\right)\right)$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\omega' L} e^{-\alpha t} \sin \omega' t \qquad \left(\text{si } \frac{1}{LC} > \alpha^2\right)$$

$$\text{où} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Le graphique de la charge en fonction du temps est alors le suivant.



On a encore des oscillations (si $1/LC > \alpha^2$) et la fréquence des oscillations est exactement la même que quand il n'y a pas de source. L'oscillation se fait autour de la charge qu'aurait le condensateur s'il n'y avait pas d'inducteur et de résistance. Les maximums relatifs de la charge se produisent toujours à toutes les demi-périodes. Au bout d'un temps très long, la charge du condensateur se stabilise à $C\mathscr{E}$.

10.9 AUTRES CIRCUITS AVEC DES INDUCTEURS

Il est possible de résoudre des circuits plus complexes avec les lois de Kirchhoff, mais cela demande une bonne connaissance des équations différentielles. Toutefois, on peut trouver assez facilement la valeur des courants au départ et des courants au bout d'un temps très long dans des circuits comportant des sources, des résistances, des inducteurs et des condensateurs initialement vides.

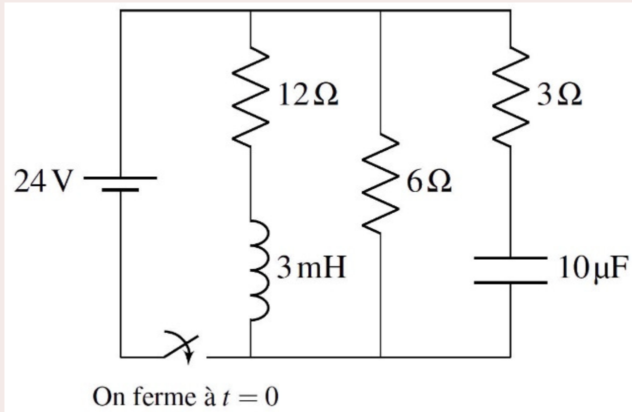
Pour y arriver, résumons ce qu'on a découvert au sujet des condensateurs et des inducteurs. Entre parenthèses, on donne les règles qu'il faut employer pour résoudre le circuit. Ces règles s'inspirent de ce qu'on avait trouvé avec les condensateurs.

Courant à $t = 0$ et $t = \infty$ avec des condensateurs et des inducteurs

	$t = 0$	$t = \infty$
Inducteur	Courant nul (On enlève le fil.)	Aucun effet (On remplace l'inducteur par un fil.)
Condensateur	Aucun effet (On remplace le condensateur par un fil.)	Courant nul (On enlève le fil.)

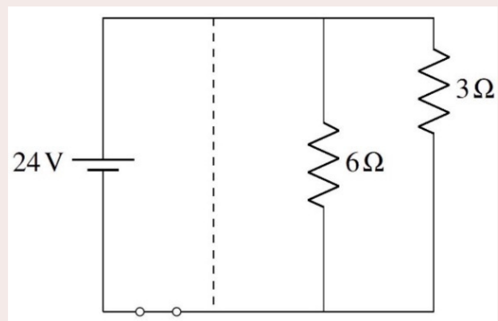
Exemple 10.9.1

Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à $t = 0$.



a) Quel est le courant fourni par la pile immédiatement après la fermeture de l'interrupteur (donc à $t = 0$) ?

À $t = 0$, les condensateurs n'ont aucun effet et les inducteurs bloquent le courant. On remplace donc les condensateurs par des fils et on enlève les branches avec des inducteurs. On a alors le circuit de droite.



La résistance équivalente de ce circuit est

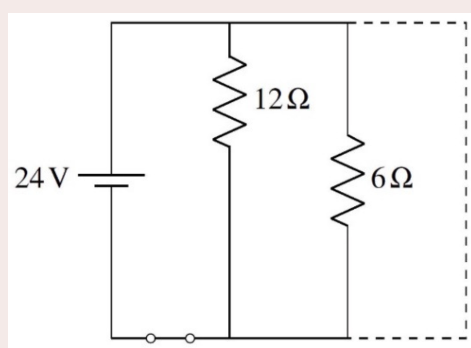
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{6\Omega}$$
$$R_{eq} = 2\Omega$$

et le courant fourni par la pile est donc

$$I = \frac{24V}{2\Omega} = 12A$$

b) Quel est le courant fourni par la pile longtemps après la fermeture de l'interrupteur (donc à $t = \infty$) ?

À $t = \infty$, les inducteurs n'ont aucun effet et les condensateurs bloquent le courant. On remplace donc les inducteurs par des fils et on enlève les branches avec des condensateurs. On a alors le circuit de droite.



La résistance équivalente de ce circuit est

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{12\Omega} + \frac{1}{6\Omega}$$

$$R_{eq} = 4\Omega$$

et le courant fourni par la pile est donc

$$I = \frac{24V}{4\Omega}$$
$$= 6A$$

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Définition de l'inductance

$$\mathscr{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

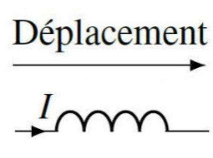
L'inductance d'un solénoïde

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell}$$

Inductance avec une substance ferromagnétique

$$L_{\text{avec ferromagnétique}} = \mu_r L_{\text{avec vide}}$$

Loi de Kirchhoff pour les inducteurs



$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Inducteur équivalent : inducteurs en série

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 +$$

Inducteur équivalent : inducteurs en parallèle

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} + \dots$$

Énergie dans un inducteur traversé par un courant *I*

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2$$

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (montée du courant)

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

Constante de temps d'un circuit RL

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Demi-vie d'un circuit RL

$$t_{1/2} = \frac{L}{R}\ln 2$$

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (baisse du courant)

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}$$

Charge du condensateur en fonction du temps pour un circuit LC sans source

$$Q = Q_0 \cos \omega_0 t \qquad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Courant en fonction du temps dans un circuit LC sans source

$$I = -Q_0 \omega_0 \sin\left(\omega_0 t\right)$$

Amplitude du courant dans un circuit LC sans source

$$I_0 = Q_0 \omega_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

Énergie dans un circuit LC sans source

$$U_C = \frac{Q_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t\right)}{2C}$$

$$U_L = \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t\right)$$

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Charge et courant en fonction du temps pour un circuit LC avec une source

$$Q = C\mathscr{E}\left(1-\cos\omega_0 t\right) \qquad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$I = C\mathscr{E}\omega_0 \sin\omega_0 t$$

Charge et courant en fonction du temps pour un circuit RLC sans source

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)$$
$$I = -\frac{Q_0}{\omega' LC}e^{-\alpha t}\sin\omega' t \qquad (\text{si } \frac{1}{LC} > \alpha^2)$$
$$\text{où } \alpha = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}$$

Charge et courant en fonction du temps pour un circuit RLC avec une source

$$Q = C\mathscr{E}\left(1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right) \qquad (\text{si } \frac{1}{LC} > \alpha^2)$$
$$I = \frac{\mathscr{E}}{\omega' L}e^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

EXERCICES

10.2 L'inductance

1. Ce solénoïde à un diamètre de 2 cm et une longueur de 3 cm.

www.p-wholesale.com/subcat/5/119/passive-component-p11.html

   a) Quelle est son inductance s'il y a 13 tours de fil ?
   b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de ce solénoïde s'il est parcouru par un courant qui varie au rythme de 50 A/s ? (Si on néglige la résistance du fil.)

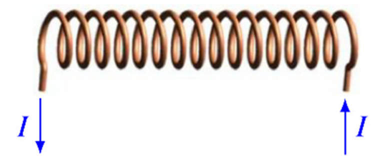
2. Cette petite bobine a un diamètre de 6 mm et une longueur de 4 cm. Le fil est entouré autour d'un cœur de fer, dont la perméabilité relative est de 200. À un certain moment, le courant dans la bobine est de 50 mA, la différence de potentiel aux bornes de la bobine est de 0,86 mV et le courant varie au rythme de 10 A/s. On va négliger la résistance du fil.

www.ottawalife.com/2013/07/putting-the-science-in-science-fiction-in-praise-of-electromagnets/

   a) Combien y a-t-il de tours de fil sur cette bobine ?
   b) Quelle est la grandeur du champ magnétique dans la bobine ? (N'oubliez pas l'effet du cœur de mu-métal.)

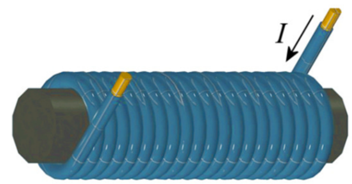
10.3 Les inducteurs

3. Dans ce solénoïde, il y a une différence de potentiel de 5 V entre les deux extrémités du fil formant le solénoïde quand le courant varie au rythme de 10 A/s, même si le fil n'a pas de résistance. C'est l'extrémité de droite qui a le potentiel le plus élevé.



   a) Est-ce que le courant augmente ou diminue ?
   b) Quelle est l'inductance de ce solénoïde ?

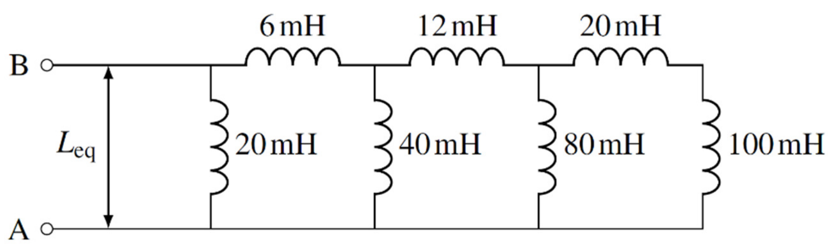
4. Ce solénoïde a un rayon de 6 cm et une longueur de 30 cm. Il y a 300 tours de fil et le fil est enroulé autour d'un noyau de fer dont la perméabilité relative est de 200. Il y a un courant de 100 A dans le solénoïde dans la direction montrée sur la figure. Toutefois, ce courant diminue au rythme de 50 A/s. Le fil a une résistance de 0,12 Ω. Déterminez la différence de potentiel entre les bornes du solénoïde et laquelle des extrémités du fil a le potentiel le plus élevé.



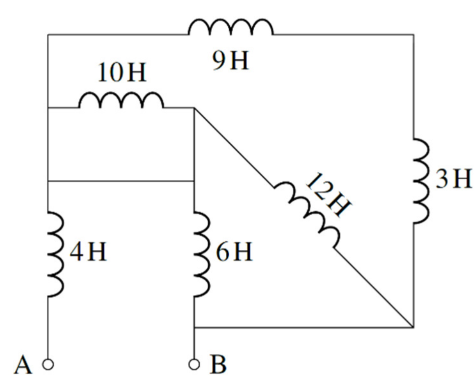
en.wikipedia.org/wiki/Electromagnet

10.4 Les inducteurs en série et en parallèle

5. Quelle est l'inductance équivalente de ce circuit ?



6. Quelle est l'inductance équivalente de ce circuit ?



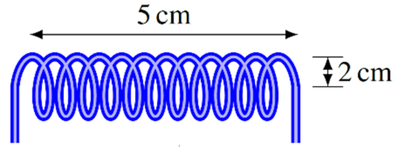
10.5 L'énergie dans un inducteur

7. Il y a un courant de 5 A dans un inducteur de 50 mH.

   a) Quelle est l'énergie emmagasinée dans l'inducteur ?
   b) Quelle est la puissance de l'inducteur si ce courant diminue au rythme de 2 A/s ? Spécifiez si l'inducteur accumule ou donne de l'énergie.

8. Un inducteur est formé d'un fil faisant 3000 tours autour d'un cœur de fer dont la perméabilité relative est de 200. L'inducteur a une longueur de 5 cm et un diamètre de 4 mm. Quelle est l'énergie dans cet inducteur quand il est parcouru par un courant de 10 A ?

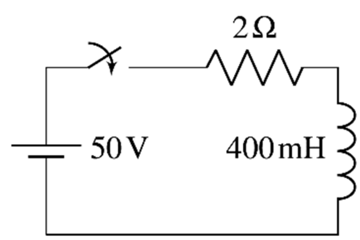
9. Quel doit être le courant dans ce solénoïde pour que l'énergie emmagasinée soit de 0,1 J ?



Le solénoïde a 500 tours de fil

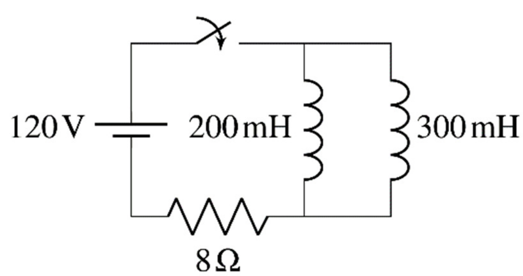
10.6 Les circuits RL

10. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à t = 0 s.



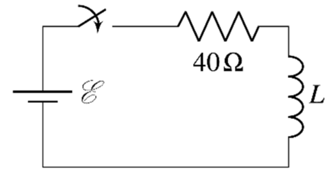
   a) Quel est le courant à t = 0,4 s ?
   b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur à ce moment ?
   c) À quel rythme augmente le courant à ce moment ? (On cherche donc *dI/dt*)
   d) Combien faudra-t-il de temps pour que le courant atteigne 90 % de sa valeur maximale ?

11. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à t = 0 s.

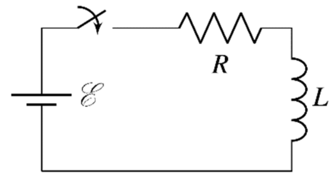


   a) Quel est le courant maximal ?
   b) Quel est le courant à t = 0,02 s ?
   c) Quelle est la puissance fournie par la pile à ce moment ?
   d) Quelle est la puissance dissipée en chaleur par la résistance à ce moment ?
   e) Quelle est la puissance des inducteurs à ce moment ? (On ne veut pas la puissance de chaque inducteur, mais la puissance totale des inducteurs.)

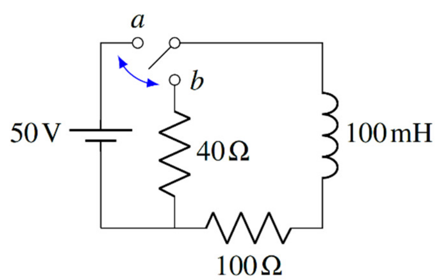
12. Dans le circuit de droite, on ferme l'interrupteur à $t = 0$ s. Quelle est la valeur de l'inductance si le courant atteint 40 % de sa valeur maximale en 1 seconde ?



13. Dans ce circuit, le courant atteint 10 % de sa valeur maximale 4 secondes après la fermeture de l'interrupteur. Combien faudra-t-il de temps pour que le courant atteigne 95 % de sa valeur maximale ?

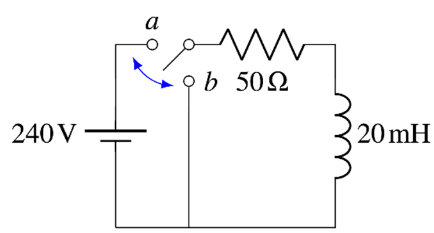


14. Dans le circuit suivant, on a placé l'interrupteur à la position *a* pendant très longtemps, de sorte qu'on peut dire que le courant dans le circuit a atteint sa valeur maximale. Quand on a ainsi atteint le courant maximum, on met l'interrupteur à la position *b*.



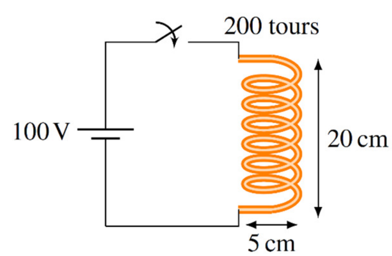
a) Quel est le courant dans l'inducteur 0,5 ms après qu'on ait mis l'interrupteur à la position *b* ?
b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur 0,5 ms après qu'on ait mis l'interrupteur à la position *b* ?
c) Combien faudra-t-il de temps pour que le courant baisse à 0,1 A ?

15. Dans le circuit suivant, on a placé l'interrupteur à la position 1 à $t = 0$ s. Ensuite, on a placé l'interrupteur à la position 2 à $t = 1$ ms.



a) Quel est le courant dans l'inducteur à $t = 1{,}5$ ms ?
b) Combien d'énergie a été dissipée en chaleur par la résistance entre $t = 1$ ms et $t = 1{,}5$ ms ?

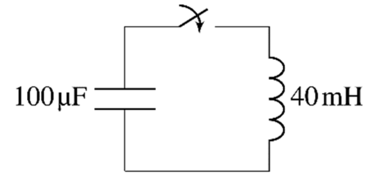
16. On branche un solénoïde aux bornes d'une batterie, tel qu'illustré sur la figure. Le solénoïde est fait d'un fil de cuivre, dont la résistivité est $1{,}678 \times 10^{-8}$ Ωm, ayant un diamètre de 2 mm. Les autres fils du circuit ont une résistance négligeable.



a) Quel sera le champ magnétique dans le solénoïde 1 ms après la fermeture de l'interrupteur ?
b) Quelle sera la différence de potentiel aux bornes du solénoïde 1 ms après la fermeture de l'interrupteur ?

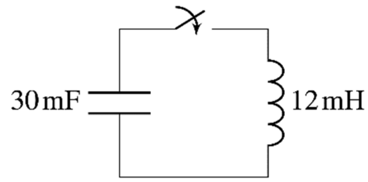
10.7 Les circuits LC

17. Dans le circuit LC suivant, le condensateur a une charge initiale de 20 µC. On ferme l'interrupteur à t = 0 s.



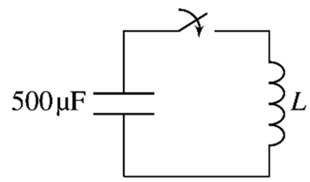
a) Quelle est la fréquence des oscillations ?
b) Quel est le courant maximal ?
c) Quel est le courant 1 ms après la fermeture de l'interrupteur ?

18. Dans le circuit LC suivant, la différence de potentiel aux bornes du condensateur est initialement de 100 V. On ferme l'interrupteur à t = 0 s.

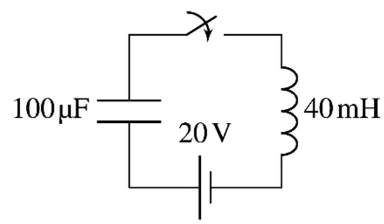


a) Quelle est l'énergie dans ce circuit ?
b) Quand, pour la première fois, l'énergie dans le condensateur sera-t-elle égale à l'énergie dans l'inducteur ?

19. Dans ce circuit LC, la charge du condensateur atteint, pour la première fois, une valeur nulle 0,001 s après la fermeture de l'interrupteur. Quelle est la valeur de l'inductance ?



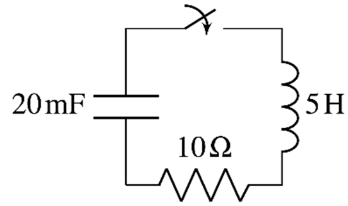
20. Dans le circuit LC suivant, le condensateur a une charge initiale nulle. On ferme l'interrupteur à t = 0 s.



a) Quelle est la fréquence des oscillations ?
b) Quelle est la charge maximale du condensateur ?
c) Quelle est la charge du condensateur 10 ms après la fermeture de l'interrupteur ?
d) Quel est le courant maximal ?

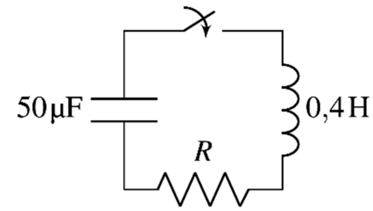
10.8 Les circuits RLC

21. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à t = 0 s. Initialement, la charge du condensateur est de 0,4 C.

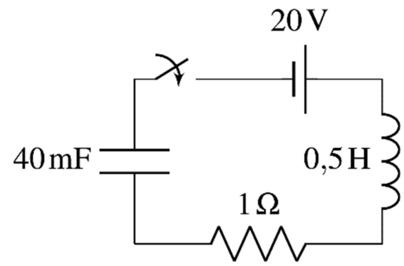


a) Quelle est la période des oscillations ?
b) Quelle est la charge du condensateur à t = 3 s ?
c) Quel est le courant à t = 3 s ?

22. Si on veut qu'il y ait des oscillations dans ce circuit, quelle est la valeur maximale que la résistance peut avoir ?



23. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à t = 0 s. Initialement, la charge du condensateur est nulle.

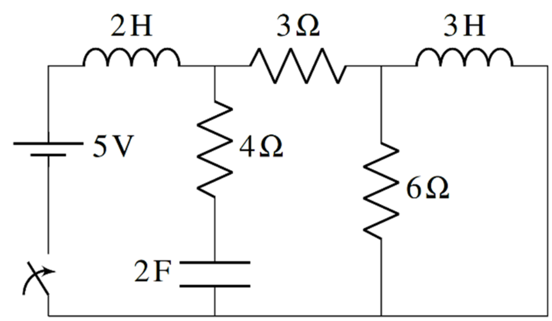


a) Quelle est la période des oscillations ?
b) Quelle est la charge du condensateur 0,2 s après la fermeture de l'interrupteur ?
c) Quelle sera la charge du condensateur au bout d'un temps très long ?
d) Quelle sera la charge maximale du condensateur ?
e) À quel moment le courant sera-t-il à son maximum ?
f) Quel sera le courant maximum dans ce circuit ?

10.9 Autres circuits avec des inducteurs

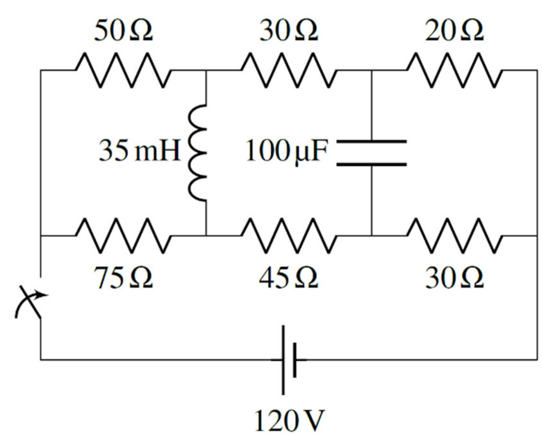
24. Dans le circuit suivant, quel est le courant fourni par la pile…

a) immédiatement après la fermeture de l'interrupteur (t = 0 s) ?
b) longtemps après la fermeture de l'interrupteur ($t = \infty$) ?



25. Dans ce circuit, quel est le courant fourni par la pile…

a) immédiatement après la fermeture de l'interrupteur (t = 0 s) ?
b) longtemps après la fermeture de l'interrupteur ($t = \infty$) ?



RÉPONSES

10.2 L'inductance

1. a) 2,224 µH b) 0,1112 mV
2. a) 22 tours de fil b) 6,912 mT

10.3 Les inducteurs

3. a) Le courant monte b) 0,5 H
4. 30,64 V. Le potentiel est plus élevé du côté gauche du solénoïde.

10.4 Les inducteurs en série et en parallèle

5. 12 mH
6. 7 H

10.5 L'énergie dans un inducteur

7. a) 0,625 J b) 0,5 W L'inducteur donne de l'énergie (fournit de la puissance)
8. 28,42 J
9. 5,003 A

10.6 Les circuits RL

10. a) 21,62 A b) 6,77 V c) 16,92 A/s d) 0,4605 s
11. a) 15 A b) 11,05 A c) 1325,5 W d) 976,1 W e) 349,4 W
12. 78,3 H
13. 113,7 s
14. a) 0,2483 A b) 34,76 V c) 1,15 ms
15. a) 1,262 A b) 0,1782 J
16. a) 0,2159 T b) 100 V

10.7 Les circuits LC

17. a) 79,58 Hz b) 10 mA c) 4,794 mA
18. a) 150 J b) t = 14,9 ms
19. 810,6 µH
20. a) 79,58 Hz b) 4 mC c) 1,43 mC d) 1 A

10.8 Les circuits RLC

21. a) 2,094 s b) -15,41 mC c) 27,36 mA
22. 178,9 Ω
23. a) 0,8976 s b) 0,5965 C c) 0,8 C d) 1,311 A e) 0,20413 s f) 4,612 A

10.10 Autres circuits avec des inducteurs

24. a) 0 A b) 1,667 A
25. a) 2 A b) 2 A