6. Les équations différentielles

1. Concepts de base

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Une équation différentielle est simplement une équation dans laquelle il y a une fonction et ses dérivées. Beaucoup de lois de la nature sont en fait des équations différentielles. Par exemple, l'équation des forces sur un objet en chute libre, en tenant compte de la friction de l'air (qu'on notera kv^2 ici), est

$$mg - kv^2 = ma$$

Or, comme la vitesse est la dérivée de la position et que l'accélération est la 2e dérivée de la position, cette équation est

$$mg - k\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

C'est une équation dans laquelle on retrouve des dérivées. C'est donc une équation différentielle. On doit résoudre cette équation pour trouver la position de l'objet en fonction du temps.

Ici, on veut apprendre à résoudre ce genre d'équations. On a affaire ici à des *équations différentielles ordinaires* qui sont des équations dont la solution est une fonction d'une seule variable. Si la solution était une fonction de plusieurs variables, on retrouverait des dérivées partielles dans l'équation.

Cela signifie que les seules choses qu'on doit retrouver dans une équation différentielle ordinaire sont la variable x, la fonction y (si on travaille avec x et y) et les dérivées de la fonction (d^ny/dx^n)

Voici quelques exemples d'équations différentielles ordinaires.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^{28}y}{dx^{28}} + 2e^x = x$$

$$y'' + 4y = 0$$

$$x^2 y''' y' + 2e^x y'' = \left(x^2 + 2\right) y^2$$

$$(3x+2)dx+\sin y dy=0$$

Cette dernière forme peut sembler étrange, mais elle est équivalente à une équation avec un dérivé puisqu'on a une équation avec dy/dx si on divise par dx.

Vous voyez également qu'on utilisera parfois dy/dx ou y' pour représenter les dérivées.

L'ordre d'une équation différentielle

L'ordre d'une équation différentielle est simplement la plus grande valeur de n dans $d^n y/dx^n$ que l'on retrouve dans l'équation. Voici l'ordre de nos équations qui ont servi d'exemple.

$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$	Ordre 1
$\dfrac{d^{28}y}{dx^{28}}+2e^x=x$	Ordre 28
$y''+4y=0$	Ordre 2
$x^2y'''y'+2e^xy''=(x^2+2)y^2$	Ordre 3
$(3x+2)dx+\sin y dy=0$	Ordre 1

Le degré d'une équation différentielle

Le degré est l'exposant de la dérivée d'ordre le plus élevé. Voici le degré de quelques équations.

$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$	Degré 1
$\dfrac{d^{28}y}{dx^{28}}+2e^x=x$	Degré 1
$(y'')^2+4y'=0$	Degré 2
$(y'')^2+4(y')^3=0$	Degré 2
$x^2(y''')^3(y')^5+2e^x(y'')^4=y^2$	Degré 3

Pour trouver le degré correctement, l'équation doit être écrite sous la forme d'un polynôme. Par exemple, pour trouver le degré de l'équation suivante

$$\frac{(y')^2+1}{yy''+5}=x(y'')^3$$

on doit l'écrire sous la forme d'un polynôme.

$$\begin{gathered}\frac{(y')^2+1}{yy''+5}=x(y'')^3\\(y')^2+1=x(y'')^3(yy''+5)\\(y')^2+1=xy(y'')^4+5x(y'')^3\\xy(y'')^4+5x(y'')^3-(y')^2-1=0\end{gathered}$$

On voit alors que le degré est 4.

Parfois, le degré n'est pas défini, comme dans cette équation.

$$e^{y''}+y=0$$

Comme on ne peut pas écrire cette équation sous forme de polynôme, il n'y a pas de degré.

La solution d'une équation différentielle

La solution de l'équation est la fonction y (si on travaille avec x et y) qui va satisfaire l'équation.

Par exemple, on va vérifier si $y=x^2$ est une solution de l'équation $xy'=2y$.

La dérivée de la solution est $y'=2x$. Si on remplace y et y' dans l'équation, on a

$$\begin{gathered}xy'=2y\\x(2x)=2(x^2)\\2x^2=2x^2\end{gathered}$$

Comme les deux côtés sont égaux, $y=x^2$ satisfait l'équation et est donc une solution de l'équation différentielle. Toutefois, ce n'est peut-être pas la seule solution de cette équation différentielle. On va donc maintenant vérifier si $y=x^2+1$ est aussi une solution de l'équation $xy'=2y$.

La dérivée de la solution est $y' = 2x$. Si on remplace y et y' dans l'équation, on a

$$xy' = 2y$$
$$x(2x) = 2(x^2 + 1)$$
$$2x^2 = 2x^2 + 2$$

Comme les deux côtés ne sont pas égaux, $y = x^2 + 1$ ne satisfait pas l'équation et n'est donc pas une solution de l'équation différentielle.

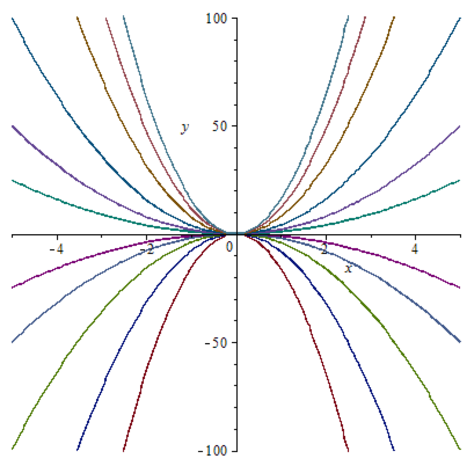
Finalement, on va vérifier si $y = Ax^2$ est aussi une solution de l'équation $xy' = 2y$.

La dérivée de la solution est $y' = 2Ax$. Si on remplace y et y' dans l'équation, on a

$$xy' = 2y$$
$$x(2Ax) = 2(Ax^2)$$
$$2Ax^2 = 2Ax^2$$

Comme les deux côtés sont égaux, $y = Ax^2$ satisfait l'équation et est donc une solution de l'équation différentielle.

En fait, on vient de tomber sur la solution générale de cette équation différentielle. Cela signifie qu'il n'y a pas qu'une seule solution. Ici, on obtient toute une famille de fonctions qui sont toutes une solution de l'équation différentielle. Ce sera toujours ainsi : la solution d'une équation différentielle est toujours une famille de fonctions.



À droite, on peut voir les graphiques de quelques-unes des fonctions de cette famille.

On pourrait alors se demander s'il y a encore d'autres fonctions qui sont la solution de $xy' = 2y$. La réponse à cette question est non. On a déjà toutes les solutions possibles.

En fait, la règle est simple : le nombre de paramètres (le A dans notre solution) est égal à l'ordre de l'équation. Comme on avait une équation d'ordre 1, il ne peut y avoir qu'un seul paramètre (A dans ce cas) dans notre solution. On a donc épuisé toutes les possibilités. (Parfois, il y a aussi d'autres solutions, appelées les solutions singulières. Toutefois, ces solutions sont rarement celles qu'on cherche.)

La solution avec le paramètre ($y = Ax^2$) est appelée la *solution générale* de l'équation différentielle.

Si on donne une valeur spécifique au paramètre (par exemple $y = 3x^2$), on a une *solution particulière* de l'équation différentielle.

Pour obtenir une solution particulière, on doit avoir quelques informations concernant la solution. Ces informations s'appellent *les conditions initiales.*

Par exemple, on pourrait demander la solution de l'équation différentielle $y' = 2x$ pour laquelle y = 1 quand x = 2. On a déjà vérifié que la solution générale est $y = Ax^2$. Pour trouver la valeur de A, on utilise le fait que y = 1 quand x = 2. On a alors

$$y = Ax^2$$
$$1 = A(2)^2$$
$$A = \frac{1}{4}$$

La solution particulière est donc $y = \frac{1}{4}x^2$.

Exemple

Vérifier que $y = \ln(x) + \frac{A}{x} + B$ est une solution de $x^2 y'' + 2xy' = 1$ et trouver la solution particulière pour laquelle $y = 4$ et $y' = 3$ quand $x = 1$.

Les dérivées sont

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{A}{x^2}$$
$$y'' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2A}{x^3}$$

Si on remplace dans l'équation, on a

$$\begin{aligned} x^2 y'' + 2xy' &= x^2\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2A}{x^3}\right) + 2x\left(\frac{1}{x} - \frac{A}{x^2}\right) \\ &= -1 + \frac{2A}{x} + 2 - \frac{2A}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

C'est donc la solution de notre équation.

On trouve ensuite la solution particulière avec 2 équations. La première se trouve avec $y = 4$ quand $x = 1$.

$$y = \ln(x) + \frac{A}{x} + B$$
$$4 = A + B$$

On trouve la deuxième équation avec la condition y' = 3 quand $x = 1$.

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{A}{x^2}$$
$$3 = 1 - A$$

Cette deuxième équation nous donne A = -2. Avec cette valeur, on trouve, avec la première équation, $B = 6$. La solution particulière est donc

$$y = \ln(x) - \frac{2}{x} + 6$$

Jusqu'ici, la solution était donnée et on a simplement vérifié que cette solution était la bonne. Toutefois, le véritable défi des équations différentielles est de trouver cette solution générale.

On doit donc développer des techniques pour résoudre les équations différentielles. La méthode variera selon l'ordre et le degré de l'équation.

SÉRIE D'EXERCICES 1

Trouver l'ordre et le degré des équations suivantes.

1. $\frac{dy}{dx} + \cos x - y = 0$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dy} + y = 5x^2$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 3y = \sin x$

4. $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + 3\frac{dy}{dx} = e^x y$

5. $\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx}} = x^2 + 5x + 1$

6. $\ln\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x\frac{dy}{dx}=2x$

7. $\frac{y'+1}{xy''+2}=y''-1$

8. Vérifiez que $y=3/x$ est une solution de $x\frac{dy}{dx}+y=0$.

9. Vérifiez que $y=4e^{3x}\sin x$ est une solution de $\frac{dy}{dx}=3y+4e^{3x}\cos x$.

10. Vérifiez que $y=\tan x+\sec x$ est une solution de $\frac{dy}{dx}-y\sec x=0$.

11. Vérifiez que $y=x^{-3/2}$ est une solution de $4x^2y''+12xy'+3y=0$.

12. Vérifiez que $y=2x^{-1/2}$ est une solution de $4x^2y''+12xy'+3y=0$.

13. Vérifier que $y=Ax^{-1/2}+Bx^{-3/2}$ est une solution de $4x^2y''+12xy'+3y=0$ et trouver la solution particulière pour laquelle $y=5$ et $y'=-1/2$ quand $x=1$.

2. *Les équations d'ordre 1 et de degré 1*

Les équations à variables séparables

La solution est très simple si on peut séparer les variables, c'est-à-dire si on peut mettre tous les y (incluant le dy) d'un côté de l'équation et tous les x (incluant le dx) de l'autre côté de l'équation. Si cela est possible, on obtient alors une équation de la forme suivante.

Équation différentielle à variables séparables

$$P(y)\,dy=Q(x)\,dx$$

Pour trouver la solution, il ne reste qu'à intégrer de chaque côté

$$\int P(y)\,dy=\int Q(x)\,dx$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante

$$9yy' + 4x = 0$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} 9y\frac{dy}{dx} + 4x &= 0 \\ 9y\frac{dy}{dx} &= -4x \\ 9ydy &= -4xdx \end{aligned}$$

C'est donc une équation à variable séparable. La solution est

$$\begin{aligned} \int 9ydy &= -\int 4xdx \\ \frac{9y^2}{2} &= -2x^2 + C \end{aligned}$$

Remarquez qu'il n'y a qu'une seule constante d'intégration. Il est inutile d'en mettre deux puisqu'on peut ensuite définir une nouvelle constante d'intégration qui serait la soustraction de ces deux constantes.

Cette solution peut s'écrire sous la forme suivante.

$$y^2 = -\frac{4}{9}x^2 + C$$

Remarquez que la constante n'est pas multipliée par 2. On a simplement redéfini la constante pour que le 2 soit inclus dans la constante. Cela ne change rien puisque cette constante peut prendre n'importe quelle valeur. En fait, n'importe quelle fonction de la constante d'intégration peut être redéfinie comme une nouvelle variable.

La solution

$$y^2 = -\frac{4}{9}x^2 + C$$

est une solution implicite de l'équation (y n'est pas isolé dans une solution implicite). La solution explicite est

$$y = \pm\sqrt{C - \frac{4}{9}x^2}$$

(y est isolé dans une solution explicite.) Parfois, il est impossible d'obtenir la solution explicite.

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante

$$y' = 1 + y^2$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$
$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

C'est donc une équation à variable séparable. La solution est

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$
$$\arctan y = x + C$$
$$y = \tan\left(x + C\right)$$

Parfois, il y a une condition initiale qui permet de trouver une solution particulière.

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante si $y = 1$ quand $x = 0$.

$$\left(1+x^2\right) y' + y^2 + 1 = 0$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\left(1+x^2\right) y' = -y^2 - 1$$
$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = -y^2 - 1$$
$$-\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

C'est donc une équation à variable séparable. La solution est

$$-\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$-\arctan y = \arctan x + C$$

On peut écrire cette solution sous la forme.

$$\arctan x + \arctan y = C$$

Ça semble bien, mais on peut faire mieux. Si on fait la tangente de chaque côté, on arrive à

$$\tan\left(\arctan x + \arctan y\right) = C$$

(La constante n'a pas changé puisqu'on peut redéfinir la tangente de la constante comme une nouvelle constante.) On peut alors simplifier en utilisant

$$\tan\left(A+B\right) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

On a alors

$$\tan\left(\arctan x + \arctan y\right) = C$$
$$\frac{\tan\left(\arctan x\right) + \tan\left(\arctan y\right)}{1 - \tan\left(\arctan x\right)\tan\left(\arctan y\right)} = C$$
$$\frac{x+y}{1-xy} = C$$

Trouvons maintenant la valeur de C en utilisant la condition initiale.

$$\frac{0+1}{1-0\cdot 1} = C$$
$$C = 1$$

La solution particulière est donc

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1$$

On peut finalement obtenir la solution sous forme explicite.

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1$$
$$x + y = 1 - xy$$
$$y + xy = 1 - x$$
$$y\left(1+x\right) = 1 - x$$

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

SÉRIE D'EXERCICES 2

Trouvez la solution des équations différentielles suivantes.

1. $\frac{dy}{dx} = 6y^2x$ si y (1) = 1/5

2. $y' = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4}$ si y (1) = 3

3. $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ si y (0) = -1

4. $y' = e^{-y}(2x-4)$ si y (5) = 0

5. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$ si r (1) = 2

6. $\frac{dy}{dt} = e^{y-t}\sec(y)(1+t^2)$ si y (0) = 0

Changement de variables pour arriver à une équation à variables séparables

Parfois, l'équation n'est pas à variable séparable, mais on peut la transformer en équation à variable séparable avec un changement de variables.

Il n'y a pas vraiment de truc pour savoir si on peut faire un changement qui permettra d'y arriver. On y arrive souvent par tâtons. C'est parfois très difficile de deviner le changement qui permettra de séparer les variables.

Toutefois, il y a quelques cas où on peut donner une règle. En voici 2.

Les équations homogènes

Commençons par définir ce qu'est une équation. Une équation est homogène si on peut écrire sous la forme suivante.

Équation homogène

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^{n}f\left(x,y\right)$$

n est appelé le degré.

Prenons quelques exemples pour illustrer.

La fonction $f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}$ est homogène de degré 2 puisqu'on a

$$\begin{aligned}f\left(\lambda x,\lambda y\right)&=\left(\lambda x\right)^{2}+\left(\lambda y\right)^{2}\\&=\lambda^{2}x^{2}+\lambda^{2}y^{2}\\&=\lambda^{2}\left(x^{2}+y^{2}\right)\\&=\lambda^{2}f\left(x,y\right)\end{aligned}$$

La fonction $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^{2}+3y^{2}}$ est homogène de degré 1 puisqu'on a

$$\begin{aligned}f\left(\lambda x,\lambda y\right)&=\sqrt{\left(\lambda x\right)^{2}+3\left(\lambda y\right)^{2}}\\&=\sqrt{\lambda^{2}x^{2}+3\lambda^{2}y^{2}}\\&=\sqrt{\lambda^{2}\left(x^{2}+3y^{2}\right)}\\&=\lambda\sqrt{\left(x^{2}+3y^{2}\right)}\\&=\lambda f\left(x,y\right)\end{aligned}$$

La fonction $f\left(x,y\right)=\dfrac{x+y}{x-y}$ est homogène de degré 0 puisqu'on a

$$\begin{aligned}f\left(\lambda x,\lambda y\right)&=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}\\&=\frac{\lambda\left(x+y\right)}{\lambda\left(x-y\right)}\\&=\frac{x+y}{x-y}\\&=\lambda^{0}f\left(x,y\right)\end{aligned}$$

La fonction $f\left(x,y\right)=x^{2}+y$ n'est pas homogène puisqu'on a

$$\begin{aligned}f\left(\lambda x,\lambda y\right)&=\left(\lambda x\right)^{2}+\left(\lambda y\right)\\&=\lambda^{2}x^{2}+\lambda y\end{aligned}$$

Comme il n'y a pas moyen de mettre une puissance de λ en évidence devant la fonction, elle n'est pas homogène.

Maintenant, voyons comment faire si on a une équation différentielle homogène. Une équation différentielle homogène à la forme suivante.

Équation différentielle homogène

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

où $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont homogènes de même degré.

Dans ce cas, on peut transformer en équation à variable séparable si on pose le changement de variable suivant.

$$y = ux$$

La différentielle de y est

$$dy = xdu + udx$$

La dérivée de y en divisant cette différentielle par dx pour obtenir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$$

Le changement de variable à faire est donc

Changement de variables à faire pour transformer une équation homogène en équation à variables séparables

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

Cette équation

$$\left(-y^2 + x^2\right)dx + \left(2xy\right)dy = 0$$

n'est pas une équation à variable séparable, mais c'est une équation différentielle homogène puisque M et N sont homogène de degré 2. On peut donc la transformer en équation à variables séparables avec le changement de variable $y = ux$.

L'équation devient alors

$$2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x^2 = 0$$
$$2xux\left(\frac{du}{dx}x + u\right) - u^2x^2 + x^2 = 0$$
$$2\frac{du}{dx}x^3u + 2x^2u^2 - u^2x^2 + x^2 = 0$$
$$2\frac{du}{dx}x^3u + x^2u^2 + x^2 = 0$$
$$2\frac{du}{dx}xu + u^2 + 1 = 0$$
$$2\frac{du}{dx}xu = -\left(u^2 + 1\right)$$
$$\frac{2udu}{u^2+1} = -\frac{dx}{x}$$

Et voilà, on a pu séparer les variables. Il ne reste qu'à intégrer.

$$\int \frac{2u}{u^2+1}du = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln\left(1+u^2\right) = -\ln|x| + C$$
$$\ln\left(1+u^2\right) = -\ln|x| + \ln C'$$
$$\ln\left(1+u^2\right) = \ln\left(\frac{C'}{x}\right)$$
$$1+u^2 = \frac{C'}{x}$$

Si on défait le changement de variable, on a

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C'}{x}$$
$$x^2 + y^2 = C'x$$

SÉRIE D'EXERCICES 3

Déterminez si les fonctions suivantes sont homogènes.

1. $f = 3x^2 + 8xy - 9y^2 + 1$

2. $f = y^4 - 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4$

3. $f = \sqrt{x^2 + 4y^2} - x$

4. $f = x\cos\left(\frac{x}{y}\right) + y\sin\left(\frac{x}{y}\right)$

5. $f = x\cosh(x) + y\sinh(y)$

Trouvez la solution des équations différentielles homogènes suivantes.

6. $x\sinh\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sinh\left(\frac{y}{x}\right) - x$

7. $xyy' + 4x^2 + y^2 = 0$

8. $xy' = y(\ln x - \ln y)$

9. $\left(x^2 + 8xy - 9y^2\right)y' + \left(3x^2 + 2xy + 4y^2\right) = 0$

10. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

Équations toujours formées de la même combinaison linéaire $Ax+By$

Parfois, on remarque qu'une certaine combinaison revient plusieurs fois dans l'équation. Par exemple, on remarque que dans cette équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y + 3}{3x + 9y + 5}$$

On retrouve deux fois la combinaison $x + 3y$. Dans ce cas, il faut poser que la nouvelle variable est égale à cette combinaison linéaire.

Changement de variables à faire pour transformer une équation toujours formée de la combinaison $Ax + By$ en équation à variables séparables

$$u = Ax + By$$

En faisant la différentielle de u et en divisant ensuite par dx, on peut trouver dy/dx.

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$(2x-4y+5)\,y' + x - 2y + 3 = 0$$

On remarque que dans cette équation, on a toujours la combinaison $x - 2y$. On doit donc faire le changement de variable suivant.

$$u = x - 2y$$

On trouve ensuite dy/dx avec la différentielle de u.

$$du = dx - 2dy$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

L'équation devient alors

$$(2x-4y+5)\frac{dy}{dx} + x - 2y + 3 = 0$$

$$(2u+5)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{du}{dx}\right) + u + 3 = 0$$

$$(2u+5)\left(1 - \frac{du}{dx}\right) + 2u + 6 = 0$$

$$2u + 5 - (2u+5)\frac{du}{dx} + 2u + 6 = 0$$

$$4u + 11 = (2u+5)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u+11}{2u+5}$$

La solution est

$$\frac{2u+5}{4u+11}du = dx$$

$$\int \frac{2u+5}{4u+11}du = \int dx$$

$$\int \frac{4u+10}{4u+11}du = \int 2dx$$

$$\int \frac{4u+11-1}{4u+11}du = \int 2dx$$

$$\int \left(\frac{4u+11}{4u+11} - \frac{1}{4u+11} \right) du = \int 2dx$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{4u+11} \right) du = \int 2dx$$

$$u - \frac{1}{4}\ln\left|4u+11\right| = 2x + C$$

Si on défait notre changement de variable, on a finalement la solution de l'équation.

$$(x-2y) - \frac{1}{4}\ln\left|4(x-2y)+11\right| = 2x + C$$

SÉRIE D'EXERCICES 4

Trouvez la solution des équations différentielles suivantes.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 3(x+y-1)$

2. $\dfrac{dy}{dx} = (4y+x)^2$

3. $(4y-2x)\dfrac{dy}{dx} = e^{2y-x} + 2y - x$ si $y(0) = 0$

4. Résoudre $(1+xy)\,y' - y^2 = 0$ en posant $u = xy$

Les équations linéaires

Une équation linéaire est une équation de la forme suivante.

Équation linéaire

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$$

Par exemple, l'équation suivante est linéaire.

$$\frac{dy}{dx}+(\cos x\tan x)\,y=e^{x}$$

L'équation suivante est aussi linéaire.

$$x^2dy+\left(\tan x^2+y\cosh x\right)dx=0$$

puisque

$$\begin{gathered}x^2dy+\left(\tan x^2+y\cosh x\right)dx=0\\ x^2\frac{dy}{dx}+\tan x^2+y\cosh x=0\\ x^2\frac{dy}{dx}+y\cosh x=-\tan x^2\\ \frac{dy}{dx}+\frac{\cosh x}{x^2}y=-\frac{\tan x^2}{x^2}\end{gathered}$$

Par contre, l'équation suivante n'est pas linéaire (parce que y est au carré).

$$\frac{dy}{dx}+x^2y^2=\cos x$$

On dit que l'équation linéaire

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$$

est homogène si $Q(x)=0$. Dans ce cas, l'équation se résout simplement puisqu'elle est déjà à variable séparable.

Si $Q(x)\neq 0$, alors on dit que l'équation linéaire est non-homogène. Dans ce cas, elle n'est pas à variable séparable. Toutefois, on peut la résoudre en multipliant l'équation par

$$e^{\int P(x)dx}$$

Ce terme porte le nom de *facteur intégrant.* Voici ce qu'on obtiendra alors

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)\,y=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)\,ydx = e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

Ça semble compliquer les choses. Toutefois, on a

$$\begin{aligned} d\left(e^{\int P(x)dx}y\right) &= \frac{\partial\left(e^{\int P(x)dx}y\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial\left(e^{\int P(x)dx}y\right)}{\partial x}dx \\ &= e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)\cdot y\cdot dx \end{aligned}$$

Or, c'est exactement ce qu'on avait du côté gauche de l'équation. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)\,ydx &= e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx \\ d\left(e^{\int P(x)dx}y\right) &= e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx \end{aligned}$$

On peut alors résoudre en intégrant de chaque côté. On a alors

$$\int d\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

Ce qui donne

Solution d'une équation linéaire non homogène

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$y' - y = e^{2x}$$

Cette équation est une équation linéaire non homogène avec $P(x) = -1$ et $Q(x) = e^{2x}$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx} &= e^{\int(-1)dx} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

(Quand on fait cette intégrale, il n'est pas nécessaire de mettre la constante d'intégration.) L'équation différentielle devient alors

$$\begin{aligned} e^{-x}y' - e^{-x}y &= e^{-x}e^{2x} \\ e^{-x}y' - e^{-x}y &= e^{x} \end{aligned}$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx}-e^{-x}y=e^{x}$$
$$e^{-x}dy-e^{-x}ydx=e^{x}dx$$

Or, on a

$$\begin{aligned} d\left(e^{-x}y\right) &= \frac{\partial\left(e^{-x}y\right)}{\partial y}dy+\frac{\partial\left(e^{-x}y\right)}{\partial x}dx \\ &= e^{-x}dy-e^{-x}ydx \end{aligned}$$

On peut donc écrire l'équation différentielle sous cette forme.

$$d\left(e^{-x}y\right)=e^{x}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(e^{-x}y\right)=\int e^{x}dx$$
$$e^{-x}y=e^{x}+C$$

La solution est donc

$$y=e^{2x}+Ce^{x}$$

Exemple

Trouver la solution particulière de l'équation différentielle suivante si on a $y\ (0) = 1$.

$$y'+\left(\tan x\right)y=\sin 2x$$

Cette équation est une équation linéaire non homogène avec $P\ (x)$ = $\tan\ x$ et $Q\ (x) = \sin\ 2x$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx} &= e^{\int \tan x dx} \\ &= e^{-\ln|\cos x|} \\ &= e^{\ln|\sec x|} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

L'équation devient alors

$$\left(\sec x\right)y'+\left(\sec x\tan x\right)y=\sec x\sin 2x$$

$$(\sec x)\frac{dy}{dx}+(\sec x\tan x)\,y=\sec x\sin 2x$$
$$(\sec x)\,dy+(\sec x\tan x)\,ydx=\sec x\sin 2xdx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(y\cdot\sec x\right)=\sec x\sin 2xdx$$

(Le terme entre parenthèses est toujours identique au terme dans lequel il y a dy, mais on remplace le dy par y.)

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(y\cdot\sec x\right)=\int\sec x\sin 2xdx$$
$$y\cdot\sec x=\int\sec x\sin 2xdx$$

L'intégrale de droite demande un peu plus de travail. En utilisant $\sin 2x=2\sin x\cos x$ on a

$$\begin{aligned}\int\sec x\sin 2xdx&=\int\sec x\left(2\sin x\cos x\right)dx\\&=\int\frac{1}{\cos x}\left(2\sin x\cos x\right)dx\\&=\int 2\sin xdx\\&=-2\cos x+C\end{aligned}$$

Notre solution est donc

$$y\cdot\sec x=-2\cos x+C$$
$$y=-2\cos^2 x+C\cos x$$

On va maintenant utiliser notre condition initiale $y\ (0) = 1$ pour trouver la valeur de la constante. En prenant les valeurs $x = 0$ et $y = 1$, on a

$$\begin{aligned}1&=-2\cos^2 0+C\cos 0\\1&=-2+C\\C&=3\end{aligned}$$

La solution est donc

$$y=-2\cos^2 x+3\cos x$$

En théorie, la méthode est toujours valide, mais les intégrales de $P\ (x)$ et de $Q\ (x)$ peuvent être difficiles à faire (ou même parfois impossible…).

SÉRIE D'EXERCICES 5

Trouvez la solution des équations différentielles linéaires suivantes.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x$

2. $xy' + 2y = 4x^2$

3. $(\cos x)\, y' + (\sin x)\, y = 2\cos^3 x \sin x - 1$

4. $ty' + 2y = t^2 - t + 1$ si $y(1) = ½$

5. $ty' - 2y = t^3 \sin(2t) - 2t^4 + 3t^5$

6. $2y' - y = 4\sin(3x)$ si $y(0) = 0$

7. $(e^{-y} + 2x)\, dy + dx = 0$

Les équations de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation de la forme suivante.

Équation de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$$

où n peut être n'importe quel nombre. La seule différente avec l'équation linéaire est la présence de ce y^n dans le terme de droite.

La méthode pour résoudre l'équation de Bernoulli fut découverte par… Leibniz en 1696. Prenons un exemple pour illustrer cette méthode. Supposons qu'on ait l'équation de Bernoulli suivante.

$$y' + 3xy\cos x = e^x y^2$$

On peut alors transformer l'équation de Bernoulli en équation linéaire avec un changement de variable.

On commence par diviser par y^n.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)\,y^{1-n}=Q(x)$$

Ensuite, on pose $z = y^{1-n}$. On a alors

$$dz=(1-n)\,y^{-n}dy$$

L'équation devient donc

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)\,z=Q(x)$$
$$\frac{dz}{dx}+(1-n)\,P(x)\,z=(1-n)\,Q(x)$$

Cette équation est une équation linéaire, qu'on peut résoudre avec la méthode vue à la section précédente.

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$2y'+y=(1-2x)\,y^4$$

Cette équation est une équation de Bernoulli avec $n = 4$. On va donc diviser par y^4 pour obtenir

$$2y^{-4}\frac{dy}{dx}+y^{-3}=(1-2x)$$

et ensuite poser que $z=y^{-3}$. On a alors $dz=-3y^{-4}dy$. Cela nous amène à

$$-\frac{2}{3}\frac{dz}{dx}+z=(1-2x)$$
$$\frac{dz}{dx}-\frac{3}{2}z=-\frac{3}{2}(1-2x)$$

On a alors une équation linéaire avec $P(x) = -3/2$ et $Q(x) = -3(1-2x)/2$. On peut la résoudre en multipliant par le facteur intégrant. Ce facteur est

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\int -\frac{3}{2}dx}$$
$$=e^{-\frac{3}{2}x}$$

Si on multiplie notre équation par ce facteur, on obtient

$$e^{-\frac{3}{2}x}\frac{dz}{dx}-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}z=-\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}$$
$$e^{-\frac{3}{2}x}dz-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}zdx=-\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$d\left(e^{-\frac{3}{2}x}z\right)=-\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$

Il ne reste qu'à intégrer

$$\int d\left(e^{-\frac{3}{2}x}z\right)=-\int\frac{3}{2}(1-2x)e^{-\frac{3}{2}x}dx$$
$$e^{-\frac{3}{2}x}z=-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}x}(1+6x)+C$$

Notre solution est donc

$$z=-\frac{1}{3}(1+6x)+Ce^{\frac{3}{2}x}$$
$$y^{-3}=-\frac{1}{3}(1+6x)+Ce^{\frac{3}{2}x}$$
$$y=\left(Ce^{\frac{3}{2}x}-\frac{1}{3}(1+6x)\right)^{-\frac{1}{3}}$$

SÉRIE D'EXERCICES 6

Trouvez la solution des équations différentielles de Bernoulli suivantes.

1. $\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y=x^2y^2$

2. $y'-5y=e^{-2x}y^{-2}$

3. $x\frac{dy}{dx}+2y=-x^3y^2\cos x$

4. $xy'+y=y^2x^2\ln(x)$

5. $6y' - 2y = xy^4$ si $y(0) = -2$

6. $y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0$ si $y(1) = 0$

Les équations exactes

Voici ce qu'est une équation exacte.

Équation exacte

Une équation de la forme $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ est exacte s'il existe une fonction $f(x,y) = 0$ pour laquelle

$$df = Mdx + Ndy$$

Par exemple, l'équation différentielle

$$(2x+4)dx + 2dy = 0$$

est exacte puisque la fonction suivante

$$f = x^2 + 4x + 2y = 0$$

nous donne

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$
$$0 = (2x+4)dx + 2dy$$

qui est notre équation de départ.

Si cette fonction f existe alors on a

$$Mdx + Ndy = 0$$
$$d(f) = 0$$

Si on intègre de chaque côté, on arrive à la solution.

Solution d'une équation exacte

$$f = C$$

Ainsi, la solution de

$$0 = (2x+4)\,dx + 2dy$$

est

$$x^2 + 4x + 2y = C$$

Ici c'était facile parce qu'on a donné la fonction f. Toutefois, on ne sait même pas si une telle fonction existe et, si elle existe, on ne sait pas ce qu'elle vaut. Commençons par déterminer si la fonction existe.

Si elle existe, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

et cette équation doit être identique à $Mdx + Ndy = 0$. Cela signifie qu'on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

On a alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Comme ces deuxièmes dérivées de f doivent être égales, on a

Condition pour que f existe.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Cette condition est nécessaire et suffisante.

Une fois qu'on a vérifié que f existe, on sait alors que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

On va alors trouver la fonction avec des intégrales partielles.

Comment trouver la fonction f

$$f = \int Mdx \qquad\qquad f = \int Ndy$$

Vous vous dites peut-être que ce n'est pas nécessaire de faire les deux intégrales. On n'en fait qu'une et on a f ! L'autre intégrale va tout simplement redonner la même fonction.

Toutefois, ce n'est pas le cas. Quand on fait l'intégrale partielle par rapport à x, les parties de la fonction qui ne dépendent que de y seront absentes. Elles seront en fait camouflées dans la constante d'intégration puisque y est considéré comme une constante quand on intègre par rapport à x. Quand on fait l'intégrale partielle par rapport à y, les parties de la fonction qui ne dépendent que de x seront absentes. Elles seront en fait camouflées dans la constante d'intégration puisque x est considéré comme une constante quand on intègre par rapport à y.

On doit donc faire les deux intégrales. Les parties qui dépendent à la fois de x et y seront identiques dans les deux intégrales. Les parties qui ne dépendent que de x seront présentes dans l'intégrale par rapport à x et les parties qui ne dépendent que de y seront présentes dans l'intégrale par rapport à y. On combine ces trois éléments pour faire f.

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$(x+2)\,y' + y + 4 = 0$$

Bien que cette équation soit aussi à variables séparables, on va la résoudre en employant la méthode de l'équation exacte. Vérifions premièrement si elle est exacte. L'équation est

$$(x+2)\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$
$$(x+2)\,dy + (y+4)\,dx = 0$$

On a donc

$$M = y+4 \qquad\qquad N = x+2$$

Si on fait les dérivées partielles, on arrive à

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

Puisque ces deux dérivées partielles sont égales, on a une équation exacte, ce qui signifie que la fonction f existe. Trouvons maintenant la valeur de f.

$$f = \int M dx = \int (y+4)\,dx = xy + 4x + K_1$$

$$f = \int N dy = \int (x+2)\,dy = xy + 2y + K_2$$

(Les K sont les constantes d'intégrations.) Avec ces deux réponses, on peut reconstruire la fonction f. La partie qui dépend de x et y (xy ici) se retrouve dans la solution des deux intégrales. (Si les deux ne sont pas identiques, c'est que la fonction n'était pas exacte.) La partie qui ne dépend que de x ($4x$ ici) se retrouve uniquement dans la première intégrale et la partie qui ne dépend que de y ($2y$ ici) se retrouve uniquement dans la deuxième intégrale. En combinant ces trois éléments, on arrive à

$$f = xy + 4x + 2y$$

(On pourrait aussi ajouter une constante, mais cette constante ne serait d'aucune utilité puisqu'elle serait absorbée par une autre constante.)

La solution de l'équation différentielle est donc

$$xy + 4x + 2y = C$$

On peut aussi écrire cette solution sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (x+2)\,y + 4x &= C \\ (x+2)\,y &= C - 4x \\ y &= \frac{C-4x}{x+2} \end{aligned}$$

Exemple

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante.

$$(2x\sin 3y)\,dx + (3x^2\cos 3y + 2y)\,dy = 0$$

Vérifions premièrement si elle est exacte. On a

$$M = 2x\sin 3y \qquad\qquad N = 3x^2\cos 3y + 2y$$

Si on fait les dérivées partielles, on arrive à

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x\cdot\cos 3y \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x\cdot\cos 3y$$

Puisque ces deux dérivées partielles sont égales, on a une équation exacte, ce qui signifie que la fonction f existe. Trouvons maintenant la valeur de f.

$$f = \int M dx = \int (2x\sin 3y)\,dx = x^2\sin 3y + K_1$$

$$f = \int N dy = \int (3x^2\cos 3y + 2y)\,dy = x^2\sin 3y + y^2 + K_2$$

Avec ces deux réponses, on peut reconstruire la fonction f. La partie qui dépend de x et y ($x^2 \sin 3y$ ici) se retrouve dans la solution des deux intégrales. Il n'y a pas de partie qui ne dépend que de x puisqu'il n'y en a pas dans la première intégrale. La partie qui ne dépend que de y (y^2 ici) se retrouve uniquement dans la deuxième intégrale. En combinant ces trois éléments, on arrive à

$$f = x^2 \sin 3y + y^2$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$x^2 \sin 3y + y^2 = C$$

Exemple

Trouver la solution particulière de l'équation différentielle suivante si $y(0) = 0$.

$$(\cos x \sinh y)\, y' = (\sin x \cosh y)$$

Vérifions premièrement si elle est exacte. Cette équation est

$$\begin{gathered}(\cos x \sinh y)\frac{dy}{dx} = (\sin x \cosh y)\\ (\cos x \sinh y)\,dy = (\sin x \cosh y)\,dx\\ (\sin x \cosh y)\,dx - (\cos x \sinh y)\,dy = 0\end{gathered}$$

On a donc

$$M = \sin x \cosh y \qquad\qquad N = -\cos x \sinh y$$

Si on fait les dérivées partielles, on arrive à

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin x \sinh y \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \sin x \sinh y$$

Puisque ces deux dérivées partielles sont égales, on a une équation exacte, ce qui signifie que la fonction f existe. Trouvons maintenant la valeur de f.

$$f = \int M dx = \int (\sin x \cosh y)\,dx = -\cos x \cosh y + K_1$$

$$f = \int N dy = \int (-\cos x \sinh y)\,dy = -\cos x \cosh y + K_2$$

Avec ces deux réponses, on peut reconstruire la fonction f. La partie qui dépend de x et y ($-\cos x \cosh y$ ici) se retrouve dans la solution des deux intégrales. Il n'y a pas de partie qui ne dépend que de x puisqu'il n'y en a pas dans la première intégrale et il n'y a pas de partie qui ne dépend que de y puisqu'il n'y en a pas dans la deuxième intégrale. En combinant ces trois éléments, on arrive à

$$f = -\cos x \cosh y$$

La solution de l'équation différentielle est donc

$$-\cos x \cosh y = C$$

On peut maintenant trouver la valeur de la constante puisqu'on sait que $y = 0$ quand $x = 0$.

$$-\cos 0 \cosh 0 = C$$
$$-1 = C$$

La solution est donc

$$\cos x \cosh y = 1$$

____

SÉRIE D'EXERCICES 7

Vérifiez que les équations différentielles suivantes sont exactes et trouvez ensuite la solution.

1. $2xy - 9x^2 + \left(2y + x^2 + 1\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

2. $2xy^2 + 4 = 2\left(3 - x^2 y\right) y'$.

3. $\dfrac{2ty}{t^2+1} - 2t - \left(2 - \ln\left(t^2+1\right)\right) y' = 0$ si $y(5) = 0$

4. $3y^3 e^{3xy} - 1 + \left(2ye^{3xy} + 3xy^2 e^{3xy}\right) y' = 0$ si $y(0) = 1$

Méthode de résolution pour des équations d'ordre 1 et de degré 1

Nous avons vu plusieurs méthodes pour résoudre des équations d'ordre 1 et de degré 1. Quand on tombe sur une de ces équations, on suggère de vérifier les différentes méthodes possibles en suivant cette liste.

1) L'équation est-elle à variables séparables ?
2) L'équation est-elle exacte ?

3) L'équation est-elle linéaire ?
4) L'équation est-elle une équation de Bernoulli ?
5) Essayez finalement des changements de variables pour arriver à une des formes précédentes.

SÉRIE D'EXERCICES 8

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $\left(x^3+y\right)dx+xdy=0$

2. $y'=\dfrac{x^2-y^2}{5xy}$

3. $\cos x dy=\left(y\sin x+e^x\right)dx$

4. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}$

5. $x\left(\tan y\right)y'=-1$

6. $y'+\dfrac{2y}{x}-\dfrac{y^2}{x}=0$

7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3-2y}{2x+y+1}$

8. $\dfrac{y'-1}{x^2}=1$

9. $xy'-y=x^2\sin x$

10. $xy'-2y+y^3x^4=0$

11. $\dfrac{dy}{dt}+3y=e^{-3t}$

12. $(2t+2y-2)\dfrac{dy}{dt}+\left(t+y+1\right)=0$

13. $xy' = y + xe^{y/x}$

14. $\dfrac{dx}{dy} = -x\left(\dfrac{2x^2y + \cos y}{3x^2y^2 + \sin y}\right)$

15. $(1+2p)\,dq + (2-q)\,dp = 0$ (Trouvez q en fonction de p)

16. $\dfrac{du}{dv} = e^{2u+3v}$ (Trouvez u en fonction de v)

3. Applications pour des équations d'ordre 1 et de degré 1

Voici quelques exemples d'application des équations d'ordre 1 et de degré 1.

Des cas où l'équation différentielle est donnée

La loi du refroidissement de Newton

La loi du refroidissement de Newton dit que le taux de refroidissement d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu environnant.

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_0\right)$$

Même si la loi porte le nom de loi du refroidissement, elle est également valide si un objet froid se réchauffe quand on le place dans un milieu plus chaud.

Exemple

Un objet a une température de 100 °C dans une pièce à 20 °C. Au bout de 5 minutes, la température de l'objet est de 80 °C. Combien faudra-t-il de temps pour la température atteigne 40 °C si le taux de refroidissement de l'objet est donné par la loi du refroidissement de Newton ?

Selon la loi du refroidissement de Newton, on a

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - 20°C\right)$$

Il s'agit simplement d'une équation à variable séparable. La solution est donc

$$\begin{gathered}\frac{dT}{dt}=-k\left(T-20°C\right)\\ \frac{dT}{k\left(T-20°C\right)}=-dt\\ \int\frac{dT}{\left(T-20°C\right)}=-\int kdt\\ \ln\left(T-20°C\right)=-kt+C\end{gathered}$$

Trouvons maintenant la constante d'intégration. On sait que la température de l'objet à $t=0$ est de 100 °C. On a donc

$$\begin{gathered}\ln\left(100°C-20°C\right)=-k\cdot 0+C\\ C=\ln\left(80°C\right)\end{gathered}$$

L'équation est donc

$$\begin{gathered}\ln\left(T-20°C\right)=-kt+\ln\left(80°C\right)\\ \ln\left(\frac{T-20°C}{80°C}\right)=-kt\end{gathered}$$

On sait ensuite que la température est de 80 °C au bout de 5 minutes. Cette information nous permettra de trouver la valeur de k.

$$\begin{gathered}\ln\left(\frac{80°C-20°C}{80°C}\right)=-k\cdot 5\min\\ k=\frac{-\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{5\min}\\ k=0,057536\min^{-1}\end{gathered}$$

On a donc

$$\begin{gathered}\ln\left(\frac{T-20°C}{80°C}\right)=-0,057536\min^{-1}\cdot t\\ \frac{T-20°C}{80°C}=e^{-0,057536\min^{-1}\cdot t}\\ T=80°C\cdot e^{-0,057536\min^{-1}\cdot t}+20°C\end{gathered}$$

Si la température est de 40 °C, on a

$$\begin{gathered}40°C=80°C\cdot e^{-0,057536\min^{-1}\cdot t}+20°C\\ 20°C=80°C\cdot e^{-0,057536\min^{-1}\cdot t}\end{gathered}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0,057536\,\text{min}^{-1}\cdot t$$

$$t = \frac{-\ln\left(\tfrac{1}{4}\right)}{0,057536\,\text{min}^{-1}}$$

$$t = 24,0942\,\text{min}$$

____

La température ambiante pourrait même changer. Dans ce cas, on remplace T_0 par la formule donnant la température du milieu ambiant en fonction du temps. On obtient alors presque toujours une équation linéaire.

Exemple

Un objet a une température initiale de 50 °C. On le place dans une pièce, mais cette fois-ci la température de la pièce varie. La température dans la pièce est donnée par

$$T_0 = 20°C + 2\tfrac{°C}{h}\cdot t$$

(Ce qui signifie que la température de la pièce augmente de 2 °C par heure.) On place donc notre objet dans la pièce à 9 h (qui est notre t = 0). Supposons que la valeur de k dans l'équation du refroidissement est de 0,2 h^{-1}.

a) Quelle sera sa température à midi ?
b) Quelle sera la température minimale atteinte et à quelle heure l'objet atteint-il cette température minimale ?

Si on utilise la formule de T_0 dans la loi du refroidissement de Newton, on a

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - 20°C - 2\tfrac{°C}{h}\cdot t\right)$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\frac{dT}{dt} + kT = k\cdot\left(20°C + 2\tfrac{°C}{h}\cdot t\right)$$

Il s'agit d'une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$e^{\int k dt} = e^{kt}$$

On a donc

$$\begin{aligned} e^{kt}\frac{dT}{dt}+e^{kt}kT &= e^{kt}k\cdot\left(20°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot t\right) \\ e^{kt}dT+e^{kt}kTdt &= e^{kt}k\cdot\left(20°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot t\right)dt \\ d\left(e^{kt}T\right) &= e^{kt}k\cdot\left(20°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot t\right)dt \end{aligned}$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\begin{aligned} \int d\left(e^{kt}T\right) &= \int e^{kt}k\cdot\left(20°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot t\right)dt \\ e^{kt}T &= e^{kt}\cdot\left(20°C-\frac{2\frac{°C}{h}}{k}+2\tfrac{°C}{h}\cdot t\right)+C \\ T &= 20°C-\frac{2\frac{°C}{h}}{k}+2\tfrac{°C}{h}\cdot t+Ce^{-kt} \end{aligned}$$

Puisque k = 0,2 h^{-1}, on obtient

$$\begin{aligned} T &= 20°C-\frac{2\frac{°C}{h}}{0{,}2\frac{1}{h}}+2\tfrac{°C}{h}\cdot t+Ce^{-0{,}2h^{-1}\cdot t} \\ &= 20°C-10°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot t+Ce^{-0{,}2h^{-1}\cdot t} \\ &= 10°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot t+Ce^{-0{,}2h^{-1}\cdot t} \end{aligned}$$

Trouvons maintenant la constante d'intégration. On sait que la température de l'objet à $t = 0$ est de 50 °C. On a donc

$$\begin{aligned} 50°C &= 10°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot 0+Ce^{-0{,}2h^{-1}\cdot 0} \\ 50°C &= 10°C+C \\ C &= 40°C \end{aligned}$$

L'équation de la température de l'objet en fonction du temps est donc

$$T = 10°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot t+40°C\cdot e^{-0{,}2h^{-1}\cdot t}$$

À midi, on est à t = 3 h. La température est donc de

$$\begin{aligned} T &= 10°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot 3h+40°C\cdot e^{-0{,}2h^{-1}\cdot 3h} \\ &= 10°C+6°C+40°C\cdot e^{-0{,}6} \\ &= 37{,}95°C \end{aligned}$$

On peut ensuite trouver la température minimale atteinte par l'objet. Au minimum, la dérivée de la température de l'objet par rapport au temps doit être nulle.

$$\frac{dT}{dt}=0$$

En utilisant la formule de la température de l'objet, on arrive à

$$\frac{dT}{dt}=0$$

$$\frac{d\left(10°C+2\frac{°C}{h}\cdot t+40°C\cdot e^{-0,2h^{-1}\cdot t}\right)}{dt}=0$$

$$2\tfrac{°C}{h}-40°C\cdot 0,2\tfrac{1}{h}\cdot e^{-0,2h^{-1}\cdot t}=0$$

$$2\tfrac{°C}{h}-8\tfrac{°C}{h}\cdot e^{-0,2h^{-1}\cdot t}=0$$

Si on isole t, on arrive à

$$8\tfrac{°C}{h}\cdot e^{-0,2h^{-1}\cdot t}=2\tfrac{°C}{h}$$

$$e^{-0,2h^{-1}\cdot t}=0,25$$

$$-0,2\tfrac{1}{h}\cdot t=\ln 0,25$$

$$t=-5h\cdot\ln 0,25$$

$$t=6,93h$$

À ce moment, la température sera de

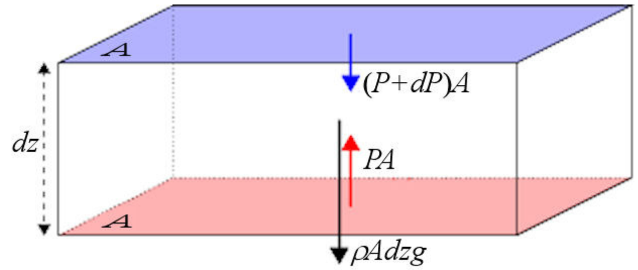
$$\begin{aligned}T&=10°C+2\tfrac{°C}{h}\cdot 6,93h+40°C\cdot e^{-0,2h^{-1}\cdot 6,93h}\\&=33,86°C\end{aligned}$$

____

__Le changement de pression avec l’altitude__

Le gaz dans l’atmosphère est en équilibre hydrostatique. Cela signifie que le poids de l’air est compensé par la force de pression.

Prenons une couche d’air d’épaisseur *dz* dans l’atmosphère pour illustrer ce que cela signifie.



sesp.esep.pro/fr/pages_fluide-temperature/isotherm.html

Le poids de l’air est donné par

$$\begin{aligned}mg&=\rho\cdot volume\cdot g\\&=\rho\cdot Adz\cdot g\end{aligned}$$

Cette force est représentée par le vecteur noir dirigé vers le bas.

Il y a une force vers le haut faite par la pression du gaz situé en dessous de la couche. Cette pression est

$$\begin{aligned} F &= Pression \cdot aire \\ &= PA \end{aligned}$$

Cette force est représentée par le vecteur rouge dirigé vers le haut.

Finalement, il y a une force vers le bas fait par la pression du gaz situé au-dessus de la couche. Cette pression est

$$\begin{aligned} F &= Pression \cdot aire \\ &= (P + dP)A \end{aligned}$$

Cette force est représentée par le vecteur bleu dirigé vers le bas.

L'équation des forces est

$$PA - \rho Adzg - (P + dP)A = 0$$

Cette équation nous amène à

$$\begin{gathered} PA - \rho Adzg - PA - dPA = 0 \\ -\rho dzg - dP = 0 \\ dP = -\rho gdz \end{gathered}$$

Trouvons la densité du gaz en fonction de la pression. Selon la loi des gaz, on a

$$n = \frac{PV}{RT}$$

Ceci est le nombre de moles. Si on veut la masse du gaz, il faut multiplier le nombre de moles par la masse molaire moyenne (μ). La masse est donc

$$m = \frac{PV}{RT}\mu$$

Pour avoir la densité, il faut diviser par le volume.

$$\rho = \frac{P}{RT}\mu$$

L'équation de l'équilibre hydrostatique devient alors

$$\begin{gathered} dP = -\rho gdz \\ dP = -\frac{P}{RT}\mu gdz \\ \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}dz \end{gathered}$$

Pour la Terre, on va simplifier un peu en disant que l'atmosphère est composée de 78,1 % d'azote, de 21,0 % d'oxygène et de 0,9 % d'argon. La masse molaire moyenne est donc de

$$\begin{aligned}\mu &= 0,781\cdot 28\tfrac{g}{mol} + 0,210\cdot 32\tfrac{g}{mol} + 0,009\cdot 40\tfrac{g}{mol}\\ &= 28,95\tfrac{g}{mol}\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\frac{dP}{P} &= -\frac{0,02895\tfrac{kg}{mol}\cdot 9,81\tfrac{N}{kg}}{8,31\tfrac{K}{molK}\cdot T}dz\\ \frac{dP}{P} &= -\frac{0,03418\tfrac{K}{m}}{T}dz\\ \frac{dP}{P} &= -\frac{34,18\tfrac{K}{km}}{T}dz\end{aligned}$$

C'est notre équation différentielle qui peut nous permettre d'obtenir la pression de l'air en fonction de l'altitude. Toutefois, pour obtenir la solution, il faut savoir comment change la température de l'air avec l'altitude. Selon la façon dont la température change, on obtiendra des solutions différentes. On obtient alors une équation à variables séparables.

On va aussi simplifier en disant que la pression au niveau du sol est de P_0 = 101,3 kPa.

Exemple

Quelle serait la pression de l'atmosphère terrestre à une altitude de 5 km si on suppose qu'elle a une température constante de 15 °C ?

Dans ce cas, notre équation différentielle est une simple équation à variable séparable. En intégrant de chaque côté, on a

$$\begin{aligned}\int\frac{dP}{P} &= -\int\frac{34,18\tfrac{K}{km}}{288K}dz\\ \int\frac{dP}{P} &= -\int 0,1187\tfrac{1}{km}dz\\ \ln(P) &= -0,1187\tfrac{1}{km}\cdot z + C\end{aligned}$$

La constante se trouve en sachant que la pression au sol (z = 0) est égale à P_0.

$$\ln(P_0) = 0 + C$$

L'équation devient alors

$$\ln(P) = -0{,}1187\,\tfrac{1}{km}\cdot z + \ln(P_0)$$

On peut finalement isoler P pour obtenir la formule de la pression en fonction de l'altitude.

$$\ln(P) - \ln(P_0) = -0{,}1187\,\tfrac{1}{km}\cdot z$$
$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -0{,}1187\,\tfrac{1}{km}\cdot z$$
$$\frac{P}{P_0} = e^{-0{,}1187\frac{1}{km}\cdot z}$$
$$P = P_0 e^{-0{,}1187\frac{1}{km}\cdot z}$$
$$P = 101{,}3kPa e^{-0{,}1187\frac{1}{km}\cdot z}$$

En utilisant les valeurs données, la pression à une altitude de 5 km est

$$\begin{aligned} P &= 101{,}3kPa e^{-0{,}1187\frac{1}{km}\cdot 5km} \\ &= 55{,}96kPa \end{aligned}$$

Notez que dans ce modèle, l'atmosphère de la Terre ne se termine jamais puisque la pression ne devient jamais nulle.

____

Exemple

Quelle serait la pression de l'atmosphère terrestre à une altitude de 5 km si on suppose que la température diminue avec l'altitude selon la formule suivante ?

$$T = 288K - 6\,\tfrac{K}{km}\cdot z$$

Dans ce cas, l'équation différentielle est

$$\frac{dP}{P} = -\frac{34{,}18\,\frac{K}{km}}{288K - 6\,\frac{K}{km}\cdot z}dz$$

C'est encore une équation à variable séparable. En intégrant de chaque côté, on a

$$\ln(P) = \tfrac{34{,}18\frac{K}{km}}{6\frac{K}{km}}\ln\left(288K - 6\,\tfrac{K}{km}\cdot z\right) + \ln(C)$$
$$\ln(P) = 5{,}697\cdot\ln\left(288K - 6\,\tfrac{K}{km}\cdot z\right) + \ln(C)$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\ln(P) = \ln\left(288K - 6\,\tfrac{K}{km}\cdot z\right)^{5{,}697} + \ln(C)$$

$$\ln(P) = \ln\left(C\left(288K - 6\tfrac{K}{km}\cdot z\right)^{5,697}\right)$$
$$P = C\left(288K - 6\tfrac{K}{km}\cdot z\right)^{5,697}$$

La constante se trouve en sachant que la pression au sol (z = 0) est égale à P_0.

$$P_0 = C\left(288K - 6\tfrac{K}{km}\cdot 0\right)^{5,697}$$
$$C = \frac{P_0}{288K^{5,967}}$$

L'équation devient alors

$$P = \frac{P_0}{288K^{5,967}}\left(288K - 6\tfrac{K}{km}\cdot z\right)^{5,697}$$
$$P = P_0\left(\frac{288K - 6\tfrac{K}{km}\cdot z}{288K}\right)^{5,697}$$
$$P = P_0\left(1 - \frac{z}{48km}\right)^{5,697}$$

En utilisant les valeurs données, la pression à une altitude de 5 km est

$$P = 101,3kPa\left(1 - \frac{5km}{48km}\right)^{5,697}$$
$$= 54,13kPa$$

Notez que dans ce modèle, l'atmosphère s'arrête à une altitude de 48 km. Cela n'est pas très surprenant puisque la température devenait nulle à cette altitude.

____

__La pollution dans un lac__

L'exemple du lac dans lequel on ajoute une substance (polluante ou non, mais on va dire ici que c'est un polluant) est aussi très intéressant. Toutefois, le lac, comme tous les lacs, se vide par une rivière, ce qui permet d'éliminer un peu de polluant. On veut donc connaitre la concentration de polluant dans le lac en fonction du temps.

Commençons par la quantité de polluant qui quitte le lac en examinant le rythme auquel on perd du polluant par la rivière. Durant un certain temps, un certain volume quitte le lac (par exemple, 7500 m³ en 1 seconde). Dans ce volume, la quantité de polluant est égale à la concentration multipliée par le volume. On a donc

$$\Delta m = -c\cdot\Delta volume$$

(C'est négatif, car on perd du polluant.) Pour trouver la quantité perdue par unité de temps, on divise par le temps.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{\Delta volume}{\Delta t} \cdot c$$

Pour obtenir le taux instantané de perte de polluant, on fait la limite quand Δt vers 0. On a alors

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{d\left(volume\right)}{dt} \cdot c$$

Or, ce $d(volume)/dt$ est le rythme auquel l'eau quitte le lac, c'est-à-dire le débit du fleuve (qu'on va appeler D).

$$\frac{dm}{dt} = -D \cdot c$$

Comme la concentration du polluant est

$$c = \frac{m}{V}$$

(V est le volume du lac, une constante.) L'équation différentielle devient donc

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V} \cdot m$$

Il se pourrait aussi qu'on ajoute du polluant. Si la formule donnant la quantité de polluant ajouté en fonction du temps est R, alors le rythme d'augmentation de la masse du polluant sera simplement la soustraction de ce qu'on ajoute et de ce qu'on perd par la rivière.

$$\frac{dm}{dt} = R - \frac{D}{V} \cdot m$$

C'est notre équation différentielle. (Pour obtenir la concentration, on divisera simplement la masse obtenue avec cette équation par le volume du lac.)

(Notez que cette équation suppose que le polluant ajouté se mélange uniformément dans le lac quasi instantanément.)

Exemple

Dans un grand lac ayant un volume de 1600 km³ (ce qui correspond à un lac de la taille du lac Ontario) a initialement une concentration en polluant de c = 50 mg/m^3 (répartie uniformément dans le lac). Il n'y a plus de source de pollution et le lac se vide par une rivière qui a un débit de D = 7500 m³/s. Dans combien de temps le niveau de polluant sera-t-il de 20 mg/m³ ?

Puisqu'il n'y a pas de source de pollution, on a $F = 0$. L'équation différentielle à résoudre est donc

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V} \cdot m$$

Puisque D et V sont des constantes, il s'agit d'une équation à variable séparable. On a donc

$$\frac{dm}{m} = -\frac{D}{V} dt$$

$$\int \frac{dm}{m} = -\int \frac{D}{V} dt$$

$$\ln(m) = -\frac{D}{V} t + C_1$$

$$\ln(m) - \ln C_2 = -\frac{D}{V} t$$

$$\ln\left(\frac{m}{C_2}\right) = -\frac{D}{V} t$$

$$\frac{m}{C_2} = e^{-\frac{D}{V} t}$$

$$m = C_2 e^{-\frac{D}{V} t}$$

Ceci est la masse de polluant dans le lac. On obtient la concentration en divisant par le volume du lac.

$$\frac{m}{V} = \frac{C_2}{V} e^{-\frac{D}{V} t}$$

$$c = C_3 e^{-\frac{D}{V} t}$$

On trouve la constante en utilisant le fait que la concentration est de 50 mg/m³ à $t = 0$.

$$50 \tfrac{mg}{m^3} = C_3 e^{-\frac{D}{V} \cdot 0}$$

$$50 \tfrac{mg}{m^3} = C_3$$

L'équation est donc

$$c = 50 \tfrac{mg}{m^3} e^{-\frac{D}{V} t}$$

Trouvons maintenant quand la concentration sera de 20 mg/m³.

$$20\tfrac{mg}{m^3} = 50\tfrac{mg}{m^3} e^{-\frac{D}{V}t}$$
$$0,4 = e^{-\frac{D}{V}t}$$
$$\ln(0,4) = -\frac{D}{V}t$$
$$t = -\frac{V}{D}\ln(0,4)$$

Avec les valeurs de V et D, on arrive à

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1,6\times 10^{12} m^3}{7500 \tfrac{m^3}{s}}\ln(0,4) \\ &= 1,9547\times 10^8 s \\ &= 6,194 ans \end{aligned}$$

____

Exemple

Le même grand lac (même volume et même débit de rivière que dans l'exemple précédent) ne contient pas de polluant au départ. Toutefois, il y a une usine qui ajoute 1 kilogramme de polluant par seconde. Quelle sera la concentration de polluant au bout de 10 ans ?

L'équation est

$$\frac{dm}{dt} = R - \frac{D}{V}\cdot m$$

Ici, R est simplement une constante valant 1 kilogramme par seconde. La solution de cette équation à variable séparable est

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{D}{V}\cdot\left(m - \frac{VR}{D}\right)$$
$$\frac{dm}{m - \frac{VR}{D}} = -\frac{D}{V}\cdot dt$$
$$\int \frac{dm}{m - \frac{VR}{D}} = -\int \frac{D}{V}\cdot dt$$
$$\ln\left(m - \frac{VR}{D}\right) = -\frac{D}{V}t + C_1$$

$$\ln\left(m-\frac{VR}{D}\right)-\ln\left(C_2\right)=-\frac{D}{V}t$$

$$\ln\left(\frac{m-\frac{VR}{D}}{C_2}\right)=-\frac{D}{V}t$$

$$\frac{m-\frac{VR}{D}}{C_2}=e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$m-\frac{VR}{D}=C_2e^{-\frac{D}{V}t}$$

$$m=C_2e^{-\frac{D}{V}t}+\frac{VR}{D}$$

On obtient la concentration en divisant par le volume du lac.

$$\frac{m}{V}=\frac{C_2}{V}e^{-\frac{D}{V}t}+\frac{R}{D}$$

$$c=C_3e^{-\frac{D}{V}t}+\frac{R}{D}$$

Comme la concentration était nulle au départ, on peut trouver la valeur de la constante.

$$0=C_3e^{-\frac{D}{V}\cdot 0}+\frac{R}{D}$$

$$0=C_3+\frac{R}{D}$$

$$C_3=-\frac{R}{D}$$

Ainsi, la concentration est

$$c=-\frac{R}{D}e^{-\frac{D}{V}t}+\frac{R}{D}$$

$$c=\frac{R}{D}\left(1-e^{-\frac{D}{V}t}\right)$$

Dans 10 ans, la concentration sera de

$$c=\frac{1\frac{kg}{s}}{7500\frac{m^3}{s}}\left(1-e^{-\frac{7500\frac{m^3}{s}}{1,6\times 10^{12}m^3}\cdot 3,15576\times 10^8 s}\right)$$

$$=0,00010296\tfrac{kg}{m^3}$$

$$=102,96\tfrac{mg}{m^3}$$

(Notez qu'au bout d'un temps très long, la concentration se stabilise à 133,3 mg/m³.)

____

Exemple

Le même grand lac (même volume et même débit de rivière que dans l'exemple précédent) ne contient pas de polluant au départ. Cette fois, l'usine prend de l'expansion, de sorte que la quantité de polluant rejeté augmente avec le temps. Si le rythme auquel l'usine rejette le polluant est donné par $R = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\cdot t$, quelle sera la concentration de polluant au bout de 10 ans ?

Dans ce cas, l'équation différentielle devient

$$\frac{dm}{dt} = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\cdot t - \frac{D}{V}\cdot m$$

Cette fois, on a une équation linéaire.

$$\frac{dm}{dt} + \frac{D}{V}\cdot m = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\cdot t$$

Le facteur intégrant est

$$e^{\int \frac{D}{V}dt} = e^{\frac{D}{V}t}$$

L'équation devient alors

$$e^{\frac{D}{V}t}\frac{dm}{dt} + \frac{D}{V}e^{\frac{D}{V}t}\cdot m = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\cdot t\cdot e^{\frac{D}{V}t}$$

$$e^{\frac{D}{V}t}dm + \frac{D}{V}e^{\frac{D}{V}t}\cdot mdt = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\cdot t\cdot e^{\frac{D}{V}t}dt$$

$$d\left(e^{\frac{D}{V}t}m\right) = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\cdot t\cdot e^{\frac{D}{V}t}dt$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int d\left(e^{\frac{D}{V}t}m\right) = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\cdot\int t\cdot e^{\frac{D}{V}t}dt$$

$$e^{\frac{D}{V}t}m = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\frac{V\left(Dt-V\right)}{D^2}e^{\frac{D}{V}t} + C_1$$

$$m = 10^{-8}\,\frac{kg}{s^2}\frac{V\left(Dt-V\right)}{D^2} + C_1 e^{-\frac{D}{V}t}$$

On obtient la concentration en divisant par le volume.

$$\frac{m}{V} = 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \frac{V(Dt - V)}{VD^2} + \frac{C_1}{V} e^{-\frac{D}{V}t}$$
$$c = 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \frac{Dt - V}{D^2} + C_2 e^{-\frac{D}{V}t}$$

Puisque la concentration est nulle au départ, on a

$$0 = 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \frac{0 - V}{D^2} + C_2 e^{-\frac{D}{V}\cdot 0}$$
$$0 = -10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \frac{V}{D^2} + C_2$$
$$C_2 = 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \frac{V}{D^2}$$

On a donc

$$c = 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \frac{Dt - V}{D^2} + 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \frac{V}{D^2} e^{-\frac{D}{V}t}$$
$$c = \frac{V}{D^2} 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \left(\frac{Dt}{V} - 1 + e^{-\frac{D}{V}t} \right)$$

Au bout de 10 ans, la concentration est donc

$$c = \frac{1,6\times 10^{12} m^3}{\left(7500 \tfrac{m^3}{s}\right)^2} 10^{-8} \tfrac{kg}{s^2} \left(\frac{7500 \tfrac{m^3}{s} \cdot 3,15576\times 10^8 s}{1,6\times 10^{12} s} - 1 + e^{-\frac{7500 \frac{m^3}{s}}{1,6\times 10^{12} m^3} 3,15576\times 10^8 s} \right)$$
$$= 0,00020112 \tfrac{kg}{m^3}$$
$$= 201,1 \tfrac{mg}{m^3}$$

Des cas où l'équation différentielle n'est pas donnée

Parfois, on ne donne pas l'équation différentielle de départ explicitement, mais on va donner quelques informations qui permettent d'écrire cette équation. Ce n'est pas toujours évident…

Voici quand même quelques trucs pour pourraient vous aider à interpréter ces phrases.

1) On parle d'une dérivée par rapport au temps quand un utilise les expressions suivantes.

Taux (de variation, de croissance, de formation…)
Rythme (de croissance, de formation…)

2) Quand on dit que quelque chose est proportionnel à une autre, cela signifie qu'il y a une constante de proportionnalité inconnue. Par exemple, si on dit que A et proportionnel à B, cela signifie que

$$A = kB$$

Si on dit que A est inversement proportionnel à B, cela signifie que

$$A = \frac{k}{B}$$

3) Dans des applications géométriques, rappelez-vous que la pente d'une fonction est dy/dx. En trouvant une formule donnant la pente, on peut donc trouver l'équation de la fonction.

4) Dans des applications en cinématique, on a

$$\text{vitesse} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{accélération} = \frac{dv}{dt}$$

Exemple

Timmy aimerait bien aller patiner sur la surface d'un lac. Toutefois, son papa veut s'assurer que la glace est assez épaisse. Il a fallu 10 heures pour qu'il se forme une couche de glace de 1 cm d'épaisseur. Dans combien de temps l'épaisseur de la glace sera-t-elle de 10 cm si le rythme d'épaississement de la glace est inversement proportionnel à l'épaisseur de la glace (autrement dit, l'épaisseur de la glace augmente deux fois moins vite si la glace est deux fois plus épaisse) ?

Le rythme d'augmentation de l'épaisseur de la glace est

$$\frac{dh}{dt}$$

Si ce rythme est inversement proportionnel à l'épaisseur h, alors on a

$$\frac{dh}{dt} \propto \frac{1}{h}$$

Cela signifie donc que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k}{h}$$

où k est une constante. On peut maintenant résoudre cette équation.

Il s'agit simplement d'une équation à variable séparable. La solution est donc

$$\begin{gathered}\frac{dh}{dt}=\frac{k}{h}\\ hdh=kdt\\ \int hdh=\int kdt\\ \frac{h^2}{2}=kt+C\end{gathered}$$

Trouvons maintenant la constante d'intégration. On sait que l'épaisseur de la glace à $t = 0$ est nulle. On a donc

$$\begin{gathered}\frac{0^2}{2}=k\cdot 0+C\\ C=0\end{gathered}$$

L'équation est donc

$$\begin{gathered}\frac{h^2}{2}=kt\\ h=\sqrt{2kt}\end{gathered}$$

On sait ensuite que l'épaisseur est de 1 cm au bout de 10 heures. Cette information nous permettra de trouver la valeur de k.

$$\begin{gathered}1cm=\sqrt{2k\cdot 10h}\\ k=0,05\tfrac{cm^2}{h}\end{gathered}$$

On a donc

$$\begin{gathered}h=\sqrt{2\cdot 0,05\tfrac{cm^2}{h}\cdot t}\\ h=\sqrt{0,1\tfrac{cm^2}{h}\cdot t}\end{gathered}$$

Si on veut que l'épaisseur soit de 10 cm, on a

$$\begin{gathered}10cm=\sqrt{0,1\tfrac{cm^2}{h}\cdot t}\\ t=1000h\end{gathered}$$

Exemple

Lorsque les ressources et l'espace sont limités, le taux de croissance d'une population est proportionnel à la taille de cette population et à l'écart entre cette population et une taille limite L. On observe que la population d'une région est de 100 000 en 2000, de 200 000 en 2025 et de 300 000 en 2050. (Prenez l'an 2000 pour $t = 0$.)

a) Quelle sera la population en 2100 ?
b) Quelle est la population limite ?

On dit que le taux de changement de la population est proportionnel à la population N et à $L - N$, où L est la population limite. L'équation différentielle est donc

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(L - N\right)$$

C'est une équation à variables séparables.

$$\frac{dN}{N\left(L-N\right)} = kdt$$

$$\int \frac{dN}{N\left(L-N\right)} = \int kdt$$

$$\frac{1}{L}\left(\ln N - \ln\left(L-N\right)\right) = kt + C$$

$$\frac{1}{L}\ln\frac{N}{L-N} = kt + C$$

Comme la population est de 1 au départ (on va travailler en centaines de milliers de personnes pour alléger), on a

$$\frac{1}{L}\ln\frac{1}{L-1} = k\cdot 0 + C$$

$$\frac{1}{L}\ln\frac{1}{L-1} = C$$

On a donc

$$\frac{1}{L}\ln\frac{N}{L-N} = kt + \frac{1}{L}\ln\frac{1}{L-1}$$

$$\frac{1}{L}\left(\ln\frac{N}{L-N} - \ln\frac{1}{L-1}\right) = kt$$

$$\frac{1}{L}\ln\frac{N\left(L-1\right)}{\left(L-N\right)} = kt$$

On a alors deux informations. La population est de 2 à t = 25 et de 3 à t = 50. On obtient alors ces deux équations.

$$\frac{1}{L}\ln\frac{2(L-1)}{(L-2)}=k\cdot 25$$
$$\frac{1}{L}\ln\frac{3(L-1)}{(L-3)}=k\cdot 50$$

Si on multiplie la première équation par 2, on a

$$\frac{2}{L}\ln\frac{2(L-1)}{(L-2)}=k\cdot 50$$
$$\frac{1}{L}\ln\frac{3(L-1)}{(L-3)}=k\cdot 50$$

Les deux côtés gauches des équations doivent donc être identiques. On a donc

$$\frac{2}{L}\ln\frac{2(L-1)}{(L-2)}=\frac{1}{L}\ln\frac{3(L-1)}{(L-3)}$$
$$\ln\left(\frac{2(L-1)}{(L-2)}\right)^2=\ln\frac{3(L-1)}{(L-3)}$$
$$\left(\frac{2(L-1)}{(L-2)}\right)^2=\frac{3(L-1)}{(L-3)}$$
$$\frac{4(L-1)}{(L-2)^2}=\frac{3}{(L-3)}$$
$$4(L-1)(L-3)=3(L-2)^2$$
$$4\left(L^2-4L+3\right)=3\left(L^2-4L+4\right)$$
$$4L^2-16L+12=3L^2-12L+12$$
$$4L^2-16L=3L^2-12L$$
$$4L-16=3L-12$$
$$L=4$$

La population maximale est donc de 400 000 personnes.

Trouvons maintenant la valeur de k. On a donc

$$\frac{1}{4}\ln\frac{N(4-1)}{(4-N)}=kt$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{3N}{(4-N)}=kt$$

Puisqu'on sait que la population est 2 à t = 25, on a

$$\frac{1}{4}\ln\frac{3\cdot 2}{(4-2)}=k\cdot 25$$
$$\frac{1}{100}\ln\frac{6}{2}=k$$
$$\frac{1}{100}\ln 3=k$$

Ainsi, la formule qui fait le lien entre la population et le temps est

$$\frac{1}{4}\ln\frac{3N}{(4-N)}=\frac{1}{100}\ln 3\cdot t$$
$$\ln\frac{3N}{(4-N)}=\frac{1}{25}\ln 3\cdot t$$

Il ne reste qu'à trouver la population à t = 100.

$$\ln\frac{3N}{(4-N)}=\frac{1}{25}\ln 3\cdot 100$$
$$\ln\frac{3N}{(4-N)}=4\ln 3$$
$$\ln\frac{3N}{(4-N)}=\ln 3^4$$
$$\frac{3N}{(4-N)}=81$$
$$3N=324-81N$$
$$84N=324$$
$$N=3{,}85714$$

La population est donc de 385 714.

____

SÉRIE D'EXERCICES 9

1. Docteur Black a été assassiné dans la salle de bal avec un chandelier. Lorsque le médecin légiste arrive sur les lieux du crime à 18h, la température interne du cadavre est de 31 °C. Exactement une heure plus tard, le médecin reprend une mesure et la température du corps est maintenant de 29 °C. En supposant que la température interne du corps décroit selon la loi du refroidissement de Newton, que la pièce était à une température constante de 21 °C et que le Docteur Black n'était pas fiévreux (son corps était donc à 37 °C avant sa mort), déterminez l'heure du décès.

2. Un objet a une température initiale de 60 °C. On le place dans une pièce dont la température varie selon la formule

$$T_0 = 20°C + 10°C \cdot e^{-\frac{t}{3h}}$$

On place donc notre objet dans la pièce à midi (qui est notre t = 0). Supposons que la valeur de k dans l'équation du refroidissement est de 0,2 h^{-1}. Quelle sera la température de l'objet à 18 h ?

3. Quelle serait la pression de l'atmosphère terrestre à une altitude de 5 km si on suppose que la température diminue avec l'altitude selon la formule suivante ?

$$T = 288K \cdot e^{-z/10km}$$

4. La décharge d'un lac ayant un volume de 40 x 10^6 m³ a un débit de 20 m³/s. Le lac n'est pas pollué initialement, mais la fosse septique de M. Gagnon vient de se fissurer et elle rejette des polluants. M. Gagnon s'en rend compte 3 jours plus tard, mais pendant ces 3 jours, la fissure a grandi lentement de sorte que la quantité de contaminants rejetés fut donnée par $R = 10^{-14} \frac{kg}{s^3} \cdot t^2$, quelle sera la concentration de polluant à la fin des 3 jours ?

5. La vitesse d'un objet est donnée par $v = x/2$ s. À $t = 0$ s, on a $x = 100$ m. Quelles sont la vitesse et la position à $t = 5$ s ?

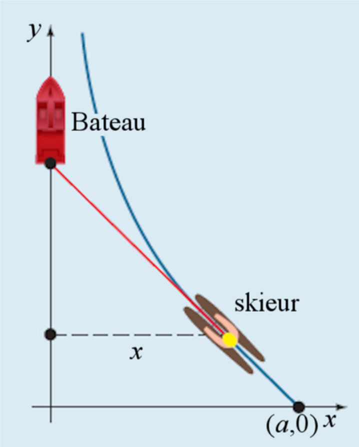
6. Bobby est en bateau. La masse combinée du bateau et de Bobby est de 500 kg. Si le moteur exerce une force constante de 200 N et que la force de friction fait par l'eau est de $F = 10 \frac{Ns}{m} \cdot v$ (où v est la vitesse de bateau), trouvez la vitesse du bateau au bout de 50 secondes, si la vitesse initiale du bateau est de 0 m/s.

7. Une courbe d'apprentissage permet de décrire la vitesse à laquelle s'acquiert une technique. Un chef d'atelier estime qu'un nouvel employé va fabriquer 10 articles le premier jour et en fabriquer de plus en plus au fur et à mesure de son apprentissage, jusqu'à atteindre 40 articles fabriqués par jour. Selon une hypothèse, le taux de variation de nombre d'articles fabriqués par jour (dN/dt) est proportionnel à $M - N$ (où M est la quantité maximale que pourra produire l'employé). Sachant que Anthony a fabriqué 15 articles au 11^e^ jour d'apprentissage, à quelle journée d'apprentissage va-t-il fabriquer 35 articles par jours ?

8. La molécule NH_3 est formée par la combinaison des substances H_2 et N_2. On combine 6 g de H_2 avec 28 g de N_2 pour obtenir 34 g de NH_3. Il s'agit d'une réaction chimique de second ordre, c'est-à-dire que le taux de formation de NH_3 est proportionnel au produit des masses restantes de H_2 et de N_2. Initialement, il y a 120 g de H_2, 700 g de N_2 et aucune molécule de NH_3. Au bout de 5 minutes, il y a 200 g de NH_3. Combien y aura-t-il de NH_3 au bout de 20 minutes ?

9. Un certain matin, il commence à neiger et la neige tombe tout le reste de la journée à un taux constant. Quand la neige a commencé à tomber, il n'y avait pas de neige au sol. À midi, une souffleuse commence à ramasser la neige avec un taux constant (chaque minute, elle ramasse la même quantité de neige). À 13h, la souffleuse a parcouru 2 km et à 14h, 1 km de plus. À quelle heure a-t-il commencé à neiger ?

10. Un bateau est à l'origine et un skieur nautique est au point $(a, 0)$. La corde qui relie le skieur au bateau à une longueur a. À $t = 0$, la bateau commence à se déplacer dans la direction de l'axe de y. Quelle est l'équation de la trajectoire que va suivre le skieur sur cette figure ? (Cette trajectoire s'appelle une *tractrix*.)



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/motorboat-starts-origin-moves-direction-positive-x-axis-pulling-waterskier-along-curve-c-c-q23571999

11. Les substances radioactives se désintègrent à un taux proportionnel au nombre d'atomes restants. On va supposer qu'au départ, on a 10 g de radon dans une pièce.

a) Si on n'ajoute pas de nouveaux atomes de radon dans la pièce, on constate qu'il ne reste que 5 g de radon 3,8 jours plus tard. Combien de radon restera-t-il au bout de 10 jours ?
b) Si on ajoute du radon à un rythme constant de 1 g par jour dans la pièce, combien de grammes de radon a-t-on au bout de 10 jours (la quantité initiale est nulle) ?
c) Finalement, on ajoute du radon, mais cette fois, le radon provient de la désintégration d'une autre substance radioactive. Cela fait en sorte que la quantité de radon qui s'ajoute par jour est donnée par $5\frac{g}{jour}e^{-\frac{t}{5\,jours}}$. Dans ce cas, combien de grammes de radon a-t-on au bout de 10 jours (la quantité initiale est nulle) ?

12. Des études ont permis d'établir qu'un individu devrait consommer 50 calories par jour pour chaque kilogramme de masse corporelle pour maintenir sa masse à un niveau constant. (Ainsi, un individu de 70 kg devrait consommer 3500 calories pour maintenir sa masse.) Un surplus ou déficit calorique provoque un changement de masse à un taux proportionnel à la différence entre la quantité de calories consommée et la quantité requise pour maintenir une masse constante. Les études ont montré que la constante de proportionnalité est de 0,00013 kg/calorie.

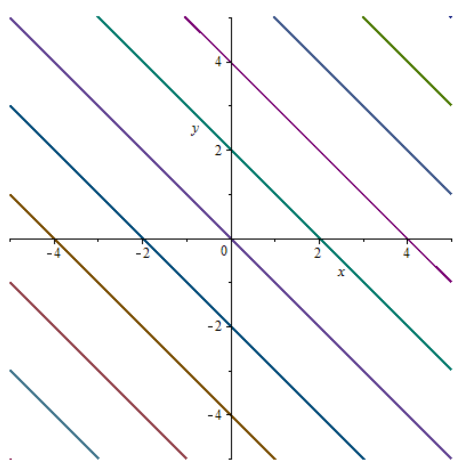
a) Huguette a initialement une masse de 70 kg et décide de toujours consommer 5000 calories par jour à partir d'aujourd'hui. Quelle sera sa masse dans 30 jours ?
b) Huguette a initialement une masse de 70 kg et décide de toujours consommer 2000 calories par jour à partir d'aujourd'hui. Quelle sera sa masse dans 45 jours ?

13. Richard a une masse de 100 kg est à 400 000 km du centre de la Terre. Il tombe vers la Terre avec une vitesse initiale nulle. Combien faudra-t-il de temps pour que Richard atteigne la surface de la Terre (en heures) ? (Pour ce problème, on va faire comme s'il n'y avait pas d'atmosphère.) Suggestion : cherchez la vitesse avec la conservation de l'énergie mécanique. (La masse de la Terre est de 6 x 10^{24} kg et le rayon de la Terre est de 6380 km.)

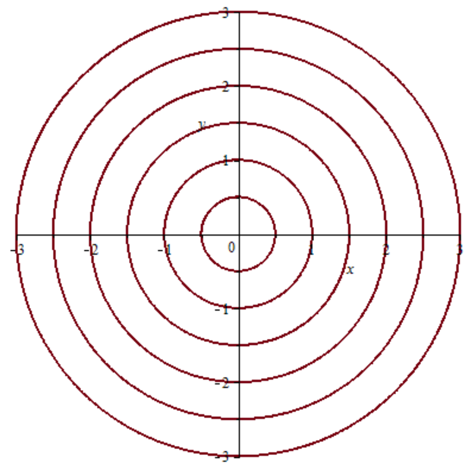
Les familles de courbes

Quand on a une fonction dans laquelle il y a une constante C, l'équation représente en fait plusieurs courbes. Cela signifie que ce qu'on obtient avec une telle équation est une *famille de courbes*.

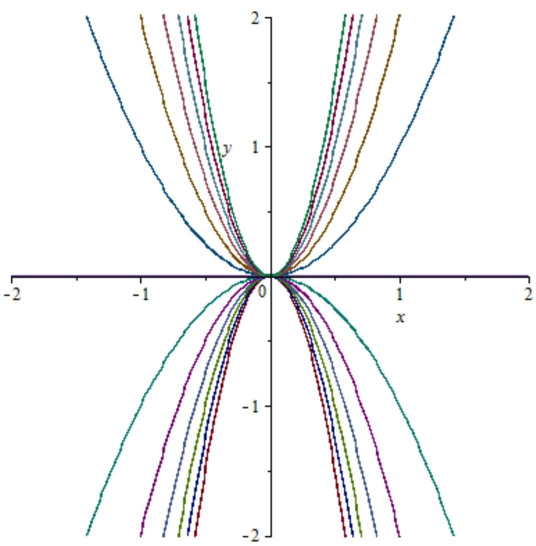
Par exemple, voici quelques courbes de la famille donnée par l'équation $x + y + C = 0$. (Ce sont les courbes pour lesquelles C = -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10.)



Voici quelques courbes de la famille donnée par l'équation $x^2 + y^2 - C^2 = 0$. (Ce sont les courbes pour lesquelles $C = 0{,}5,\ 1,\ 1{,}5,\ 2,\ 2{,}5,\ 3$.)



Quand on fait la solution d'une équation différentielle d'ordre 1, la solution générale est justement une famille de courbe puisqu'il y a une constante dans la solution générale. En fait, chaque famille de courbe est associée à une équation différentielle. Par exemple, examinons la famille de courbes donnée par $y = Cx^2$ (figure de droite). (Ce sont les courbes pour lesquelles C = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.)



Si on fait la dérivée de la fonction, on a

$$y' = 2Cx$$

On isole alors C dans l'équation de départ (pour obtenir $C = y/x^2$) et on utilise cette valeur pour le C dans la dérivée. On a alors

$$y' = \left(\frac{y}{x^2}\right)2x$$
$$y' = \frac{2y}{x}$$

C'est l'équation différentielle associée à cette famille de courbe.

On aurait pu aussi isoler C dès le départ, puis faire la différentielle. On aurait alors obtenu

$$C = \frac{y}{x^2}$$
$$dC = \frac{\partial C}{\partial x}dx + \frac{\partial C}{\partial y}dy$$

$$0 = \frac{-2y}{x^3} dx + \frac{1}{x^2} dy$$

On a alors l'équation différentielle suivante.

$$\frac{1}{x^2} dy = \frac{2y}{x^3} dx$$

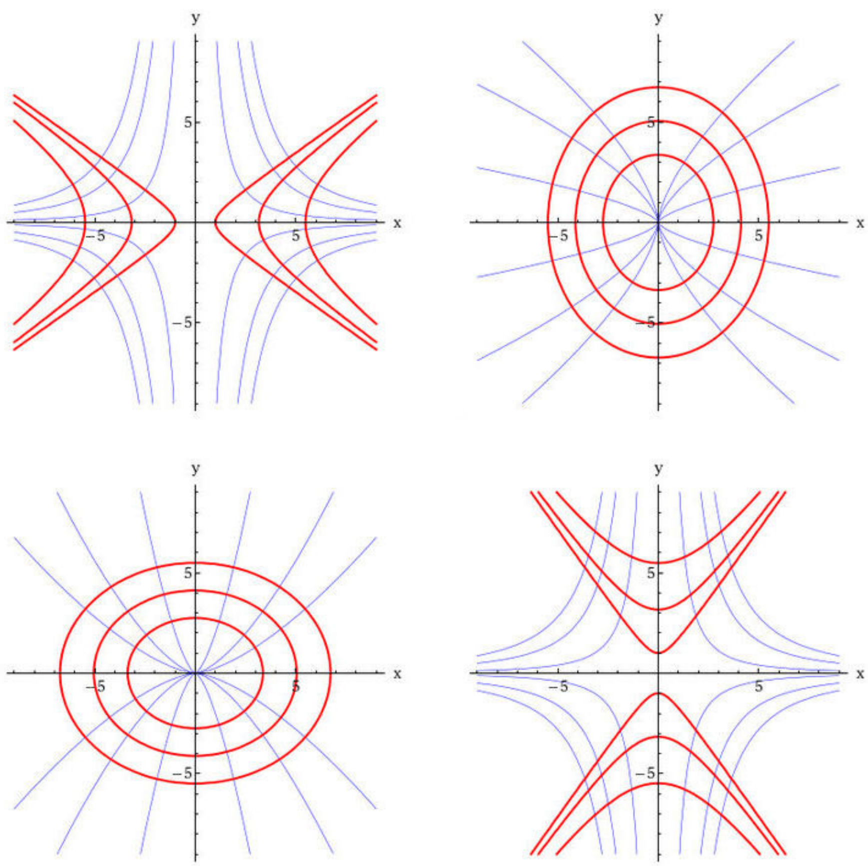
$$dy = \frac{2y}{x} dx$$

$$y' = \frac{2y}{x}$$

C'est le même résultat que celui obtenu précédemment.

Famille de courbes orthogonales

Parfois, on a besoin de l'équation de la famille de courbes qui sont toujours perpendiculaires aux courbes d'une autre famille. Voici 4 exemples de courbes d'une famille (en bleu) qui sont toujours perpendiculaires aux courbes d'une autre famille (en rouge).



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/find-orthogonal-trajectories-family-curves-use-c-needed-constant-y-2-7kx-3-use-graphing-de-q7722087

(Évidemment, vous pensez aux lignes de champ électrique et aux lignes équipotentielles qui sont toujours mutuellement perpendiculaires.)

Quand 2 familles sont toujours mutuellement perpendiculaires, on dit que ce sont des *familles orthogonales*. On dit aussi que les courbes de la deuxième famille sont les *trajectoires orthogonales* de celles de la première famille.

Mais comment peut-on trouver l'équation d'une famille de courbes orthogonales à une autre famille de courbes ?

En fait, il y a une façon simple. Si une courbe a une pente de m, alors la courbe qui est perpendiculaire doit avoir une pente de $-1/m$. Puisque la pente est égale à la dérivée, on arrive à la conclusion suivante.

Trajectoires orthogonales

Si la pente d'une famille de courbe est donnée par

$$y' = f\left(x, y\right)$$

Alors la pente des trajectoires orthogonales est

$$y' = \frac{-1}{f\left(x, y\right)}$$

Exemple

Trouvez l'équation des trajectoires orthogonales de la famille de courbes donnée par $y = Cx^2$.

On sait que cette famille de courbe est associée à l'équation différentielle

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$y' = \frac{-x}{2y}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation à variables séparables.

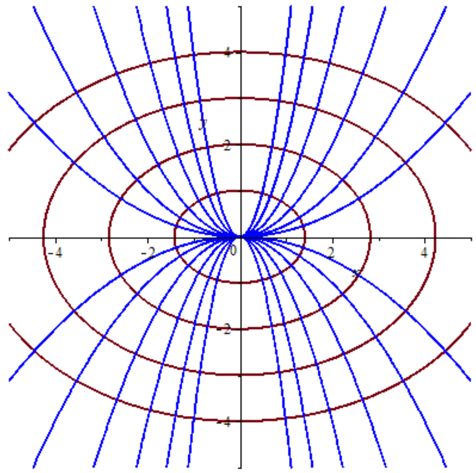
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y}$$
$$2ydy = -xdx$$

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = c$$

Cette équation représente une série d'ellipses. Voici les deux familles de courbes. En rouge, on a la famille de départ et en bleu on a les trajectoires orthogonales.

On peut voir que les deux familles de courbes se rencontrent toujours à 90°.

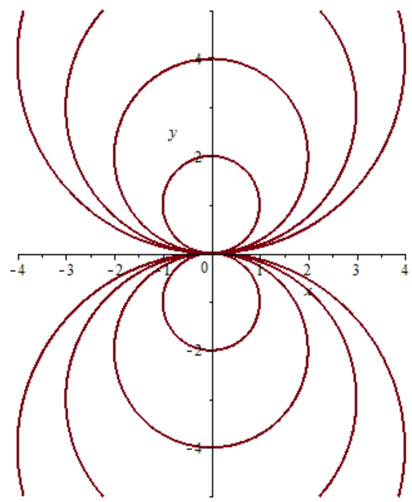


Exemple

Trouvez l'équation des trajectoires orthogonales de la famille de courbes donnée par l'équation suivante.

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2$$

Cette famille représente une série de cercles ayant leur centre sur l'axe des y et qui passent toujours par l'origine.



Cette fois, on ne connait pas l'équation différentielle associée à cette famille de courbe. On va donc isoler C dans cette équation.

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yC + C^2 = C^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yC = 0$$

$$C = \frac{x^2 + y^2}{2y}$$

En faisant la différentielle de chaque côté de cette équation, on a

$$dC = \frac{\partial\left(\frac{x^2+y^2}{2y}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\frac{x^2+y^2}{2y}\right)}{\partial y}dy$$

$$0 = \frac{2x}{2y}dx + \frac{2y\cdot 2y - 2\left(x^2+y^2\right)}{\left(2y\right)^2}dy$$

$$0 = \frac{x}{y}dx + \frac{y^2-x^2}{2y^2}dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{y^2-x^2}$$

Cela signifie que l'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation

$$\left(x^2-y^2\right)dx + \left(2xy\right)dy = 0$$

qui est une équation homogène. Pour résoudre, on doit poser que $y = ux$. On a alors

$$\left(x^2-u^2x^2\right)dx + \left(2xux\right)\left(udx+xdu\right) = 0$$

$$\left(x^2-u^2x^2+2u^2x^2\right)dx + \left(2x^3u\right)du = 0$$

$$x^2\left(1+u^2\right)dx + \left(2x^3u\right)du = 0$$

$$\left(1+u^2\right)dx + \left(2xu\right)du = 0$$

On a alors une équation à variables séparables

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{2u}{1+u^2}du$$

$$-\int\frac{1}{x}dx = \int\frac{2u}{1+u^2}du$$

$$-\ln|x| = \ln\left(1+u^2\right) + c_1$$

On peut écrire cette solution sous la forme suivante.

$$-\ln|x| = \ln\left(1+u^2\right) + \ln c_2$$

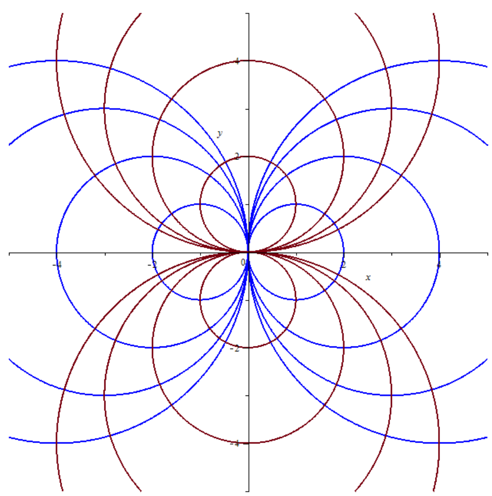
$$\ln\left|\frac{1}{x}\right| = \ln\left(c_2 \cdot \left(1+u^2\right)\right)$$
$$\frac{1}{x} = c_2 \cdot \left(1+u^2\right)$$

Ici, le changement de signe que pourrait faire la valeur absolue est absorbé dans la constante. On peut continuer ensuite en défaisant le changement de variable.

$$\frac{1}{x} = c_2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$$
$$x = c_2 x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$$
$$x = c_2\left(x^2+y^2\right)$$
$$c_3 x = x^2+y^2$$
$$x^2 - c_3 x + y^2 = 0$$
$$x^2 - c_3 x + \frac{c_3^2}{4} + y^2 = \frac{c_3^2}{4}$$
$$\left(x-\frac{c_3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c_3}{2}\right)^2$$
$$\left(x-c\right)^2 + y^2 = c^2$$

Cette équation représente une série de cercle centré sur l'axe des x et passant par l'origine. Voici les deux familles de courbes. En rouge, on a la famille de départ et en bleu on a les trajectoires orthogonales.

On peut voir que les deux familles de courbes se rencontrent toujours à 90°.



SÉRIE D'EXERCICES 10

Trouvez l'équation des trajectoires orthogonales à ces familles de fonctions

1. $y = -\frac{1}{2}x^2 + C$

2. $x^2 + 2y^2 = C$

3. $y = Ce^x$

4. $y^2 - x^2 = C$

5. $x^2 + y^2 = C$

6. $y = C\sqrt{x}$

7. Les lignes équipotentielles d'un dipôle électrique (une charge positive à (1,0) et une charge négative à (-1.0)) forment une famille de courbes donnée par

$$(x+C)^2 + y^2 = C^2 - 1$$

Sachant que les lignes de champ sont orthogonales aux lignes équipotentielles, montrez que les lignes de champ forment la famille

$$x^2 + (y-c)^2 = 1 + c^2$$

(Ce sont des cercles qui passent toujours par (-1,0) et (1,0).)

4. *Les équations d'ordre 1 et de degré supérieur à 1*

On va maintenant examiner des équations contenant seulement des dérivées premières, mais qui peuvent avoir des exposants. L'équation suivante est un exemple de ce genre d'équation.

$$(y')^2 + 5xy' + \ln(x) = 0$$

Pour résoudre, on doit souvent tenter d'isoler y' pour obtenir une équation de degré 1.

Les équations résolubles en y'

Dans ce genre d'équations, l'équation

$$(y')^n + P_1(y')^{n-1} + P_2(y')^{n-2} + \ldots + P_{n-1}(y') + P_n = 0$$

peut être factorisé pour obtenir

$$(y' - f_1)(y' - f_2)(y' - f_3)\ldots(y' - f_n) = 0$$

Dans ces cas, on a

$$\begin{aligned}
&(y'-f_1)=0\\
&(y'-f_2)=0\\
&(y'-f_3)=0\\
&\ldots\\
&(y'-f_n)=0
\end{aligned}$$

On fait alors la solution de chacune de ces équations. Chacune de ces solutions est une solution de l'équation différentielle.

Vous pouvez aussi écrire la solution en une seule équation. Si la solution de chacune de ces équations était les fonctions suivantes.

$$F_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0,\ldots,F_n=0$$

Alors on peut écrire la solution sous la forme

$$F_1\times F_2\times F_3\times\ldots\times F_n=0$$

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$xy\left((y')^2+1\right)=\left(x^2+y^2\right)y'$$

Pour résoudre, on doit tenter de factoriser cette équation.

$$\begin{gathered}
xy(y')^2+xy-\left(x^2+y^2\right)y'=0\\
(y')^2+1-\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)y'=0\\
(y')^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'+1=0\\
\left(y'-\frac{y}{x}\right)\left(y'-\frac{x}{y}\right)=0
\end{gathered}$$

Voilà, c'est fait. Il ne reste qu'à résoudre les deux équations différentielles suivantes.

$$y'-\frac{y}{x}=0 \qquad\qquad y'-\frac{x}{y}=0$$

Ce sont deux équations à variables séparables. La première équation donne

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_3$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_4$$

$$\ln|y| = \ln C_4|x|$$

$$y = C_4 x$$

La deuxième équation donne

$$y' - \frac{x}{y} = 0$$

$$ydy = xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 = x^2 + C_2$$

Les solutions sont donc

$$y^2 = x^2 + C \qquad \text{et} \qquad y = Cx$$

On pourrait aussi écrire la solution sous la forme suivante.

$$\left(y^2 - x^2 - C\right)\left(y - Cx\right) = 0$$

____

La factorisation

Vous vous dites peut-être que vous n'auriez peut-être pas deviné les deux facteurs du polynôme de degré 2. Si vous ne les voyez pas, vous pouvez utiliser la formule pour résoudre les équations quadratiques suivantes

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

pour les obtenir. Voyons ce qu'on aurait obtenu dans cet exemple. On avait

$$\left(y'\right)^2 - \left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)y' + 1 = 0$$

La formule des racines donne alors

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2 - 4}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2} - 4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2} - \frac{4x^2y^2}{x^2y^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2y^2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \pm \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)\right)
\end{aligned}$$

La première racine est

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) + \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2}{xy}\right) \\
&= \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

La deuxième racine est

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) - \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2y^2}{xy}\right) \\
&= \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

On aurait donc pu connaitre les deux facteurs ainsi.

Toutefois, on voit que cette méthode est un peu fastidieuse avec sa racine carrée. Parfois, on peut trouver plus facilement ces racines en remarquant que

$$\left(y'-f_1\right)\left(y'-f_2\right)=0$$

donne

$$\left(y'\right)^2-\left(f_1+f_2\right)y'+f_1f_2=0$$

On voit que le deuxième terme est formé de f_1+f_2 . Ainsi, très souvent, on voit les deux racines additionnées dans ce terme. Reprenons notre exemple pour illustrer le tout. On avait

$$xy\left(\left(y'\right)^2+1\right)=\left(x^2+y^2\right)y'$$

Cette équation est en fait

$$\left(y'\right)^2+1=\frac{\left(x^2+y^2\right)y'}{xy}$$

$$\left(y'\right)^2+1=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'$$

$$\left(y'\right)^2-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'+1=0$$

Sous cette forme, on voit très bien les deux racines additionnées dans le deuxième terme. Les facteurs sont donc

$$\frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x}$$

Attention : les deux termes additionnés ne sont pas nécessairement les deux racines. Pour qu'ils le soient, il faut que le troisième terme soit égal à la multiplication des deux éléments additionnés. Ici c'est bon puisque

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=1$$

est effectivement notre troisième terme.

N'oubliez pas aussi qu'il y a un signe négatif devant le 2e terme. Cela signifie que les racines seraient négatives si on avait un signe positif. Par exemple, si on avait

$$\left(y'\right)^2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)y'+1=0$$

les deux racines seraient

$$-\frac{x}{y} \quad \text{et} \quad -\frac{y}{x}$$

(Notez que la multiplication de ces 2 éléments nous donne le 3e terme de l'équation différentielle, comme on doit avoir.)

Les constantes d'intégration

Pour les deux solutions, on utilise la même constante.

$$y^2 = x^2 + C \qquad \text{et} \qquad y = Cx$$

En fait, on pourrait montrer qu'on couvre exactement la même famille de courbe en utilisant la même constante ou en utilisant des constantes différentes pour chacune des solutions.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$(y')^2 - (2\sin(x) + \cos(x))\,y' + \sin(2x) = 0$$

La forme de cette équation suggère fortement que les deux racines sont

$$2\sin x \quad \text{et} \quad \cos x$$

Pour que ce soit les facteurs de l'équation, il faut que la multiplication de ces deux termes nous donne le 3e terme. On dirait que ce n'est pas le cas, mais ce l'est puisque

$$2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

Avec ces racines, la factorisation donne

$$(y' - 2\sin x)(y' - \cos x) = 0$$

La première équation donne

$$\begin{gathered} y' = 2\sin x \\ \frac{dy}{dx} = 2\sin x \\ dy = 2\sin x dx \\ y = -2\cos x + C \end{gathered}$$

La deuxième équation donne

$$y' = \cos x$$
$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$dy = \cos x dx$$
$$y = \sin x + C$$

La solution peut donc s'écrire sous la forme suivante.

$$(y + 2\cos x - C)(y - \sin x - C) = 0$$

Les solutions singulières

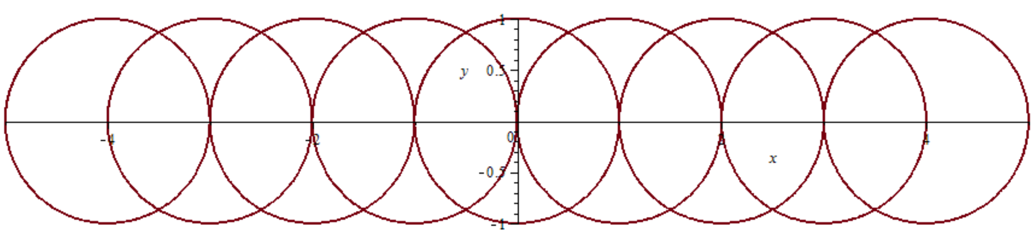
Sachez qu'avec les équations de degré supérieur à 1, on voit apparaitre certaines solutions qui ne font pas partie de la solution générale. Prenons un exemple pour illustrer. Supposons qu'on ait l'équation différentielle suivante.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$$

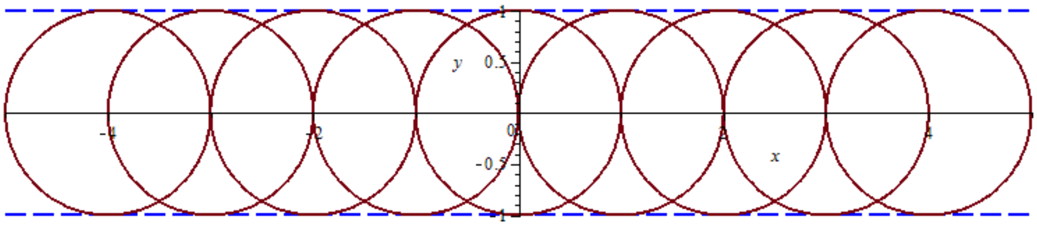
C'est une équation qu'on peut facilement factoriser pour obtenir 2 équations à variables séparables (qu'on peut écrire en une seule avec un ±.). La solution est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$$
$$\pm\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int dx$$
$$\pm\sqrt{1-y^2} = x + C$$
$$(x+C)^2 + y^2 = 1$$

Cette solution est représentée par une famille qui est une série de cercles de rayon 1 se situant le long de l'axe des x.

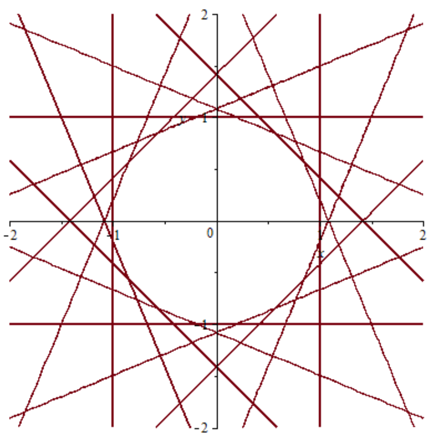


Toutefois, il y a 2 autres solutions. Si $y = 1$, on a $dy/dx = 0$. Avec ces valeurs, on respecte l'équation différentielle. Si $y = -1$, on a $dy/dx = 0$. Avec ces valeurs, on respecte aussi l'équation différentielle. Ainsi, ces deux lignes en pointillés sont aussi des solutions de l'équation différentielle.

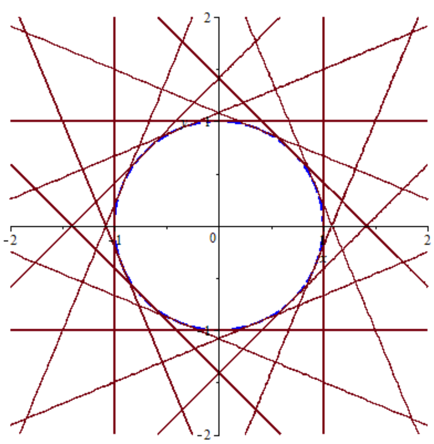


Ces deux lignes sont les enveloppes de la famille de solutions. Généralement, ces enveloppes sont aussi des solutions de l'équation différentielle. Ces solutions, qui ne sont pas incluses dans la solution générale $(x+C)^2 + y^2 = 1$, sont appelées des *solutions singulières* de l'équation différentielle.

Par exemple, si la solution d'une équation générale d'une équation différentielle donne la famille de courbe suivante.



Alors, l'enveloppe, qui est un cercle ici, est une solution singulière.



Très souvent, on découvre ces solutions singulières en examinant bien toute la solution de l'équation pour trouver les fois où on a fait une division. Comme le diviseur ne peut pas être 0, la restriction nous donne souvent l'équation de la solution singulière.

Dans notre exemple, la solution était

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\pm\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int dx$$

$$\pm\sqrt{1-y^2} = x + C$$

$$(x+C)^2 + y^2 = 1$$

On remarque que nous avons divisé par $\sqrt{1-y^2}$ à un certain moment. C'est pourquoi il faut alors examiner ce qui arrive si $y = 1$ et $y = -1$ ne pourrait pas aussi être des solutions de l'équation.

Les équations résolubles en y

Si on peut isoler y dans l'équation, on peut ramener l'équation à une équation du premier ordre. Dans ce cas, on a

$$y = f(x, y')$$

Pour éviter toute sorte de confusion, on va utiliser la notation suivante : $y' = p$. On a donc

$$y = f(x, p)$$

Si on fait la dérivée de cette équation, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

Mais puisque $dy/dx = p$, on a

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

Or, cette équation est une équation de degré 1 et ordre 1 pour p. On peut alors résoudre cette équation pour trouver p. Une fois qu'on aura cette valeur de p, on va la remplacer dans l'équation

$$y = f(x, p)$$

Pour obtenir la solution.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$x(y')^2 - y + 1 = 0$$

On peut isoler y dans cette équation. On a alors

$$xp^2 - y + 1 = 0$$
$$y = xp^2 + 1$$

Faisons la dérivée de cette équation.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\left(xp^2+1\right)}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\left(xp^2+1\right)}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx}$$
$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx}$$
$$1 = p + 2x\frac{dp}{dx}$$

On peut alors résoudre cette équation

$$1 - p = 2x\frac{dp}{dx}$$
$$\frac{dx}{2x} = \frac{dp}{1-p}$$
$$-\frac{1}{2}\ln|x| = \ln|1-p| + C_1$$
$$-\frac{1}{2}\ln|x| = \ln|1-p| + \ln C_2$$
$$\ln\frac{1}{\sqrt{|x|}} = \ln\left(C_2(1-p)\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} = C_2(1-p)$$

$$p = 1 + \frac{C_3}{\sqrt{|x|}}$$

Si on remplace dans notre équation

$$y = xp^2 + 1$$

on a

$$y = x\left(1 + \frac{C}{\sqrt{|x|}}\right)^2 + 1$$

C'est la solution de notre équation.

(Notez qu'on a divisé par $1 - p$ à un certain moment et par p un peu plus loin dans la solution. Il faudrait donc examiner ce qui se produit si $p = 0$ et $p = 1$. Dans les deux cas, on satisfait l'équation avec $y = 1$ et $y = x + 1$. Toutefois, cette deuxième solution est déjà incluse dans la solution générale quand $C = 0$. La seule solution singulière est donc $y = 1$.)

____

La solution est particulièrement simple si on a la forme suivante (appelée l'équation de Clairaut).

$$y = xp + f(p)$$

Dans ce cas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\left(xp + f(p)\right)}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\left(xp + f(p)\right)}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = p + \left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$p = p + \left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\left(x + \frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

Chacun des termes multipliés peut alors être égal à 0. En fait, la solution générale s'obtient en égalant le deuxième terme à 0 (puisque c'est ce terme qui contient la dérivée et qui inclura la constante d'intégration). (En égalant le premier terme à 0, on obtient une solution singulière.) On a alors

$$\frac{dp}{dx}=0$$
$$p=C$$

et la solution est

$$y=Cx+f\left(C\right)$$

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$\left(y'\right)^5-xy'+y=0$$

On peut isoler y dans cette équation. On a alors

$$p^5-xp+y=0$$
$$y=xp-p^5$$

C'est la forme de l'équation de Clairaut. On sait alors que $p = C$ et on obtient

$$y=xC-C^5$$

____

Les équations résolubles en x

Si on peut isoler x dans l'équation, on peut ramener l'équation à une équation du premier ordre. Dans ce cas, on a

$$x=f\left(y,p\right)$$

Pour résoudre, on va encore faire la dérivée de chaque côté et utilisé le fait que

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$$

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y+\log y'=xy'$$

On peut isoler x dans cette équation. On a alors

$$y + \log p = xp$$
$$x = \frac{y + \log p}{p}$$
$$x = \frac{y}{p} + \frac{\log p}{p}$$

Si on fait la dérivée de chaque côté, on a

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial\left(\frac{y}{p} + \frac{\log p}{p}\right)}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial\left(\frac{y}{p} + \frac{\log p}{p}\right)}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} + \left(-\frac{y}{p^2} - \frac{\log p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \left(-\frac{y}{p^2} - \frac{\log p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}$$
$$\left(-\frac{y}{p^2} - \frac{\log p}{p^2} + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

Chacun de ces termes peut être égal à 0. Celui qui contient la dérivée donnera la solution générale (puisque c'est ce terme qui contiendra la constante d'intégration). On a donc

$$\frac{dp}{dy} = 0$$
$$p = C$$

(Cette solution n'est pas tellement étonnante, puisque cette équation est aussi une équation de Clairaut.)

En utilisant cette valeur dans l'équation de départ, on a

$$y + \log C = Cx$$

Ici, on est arrivé facilement à une solution parce que les termes $1/p$ se sont annulés. Quand ils ne s'annulent pas, la solution de l'équation différentielle n'est pas nécessairement facile à faire.

SÉRIE D'EXERCICES 11

Trouvez la solution des équations différentielles suivantes.

1. $(y')^2 - xy' - 2yy' + 2xy = 0$

2. $x(y')^2 + y'(-xe^x + x + y) - xe^x - ye^x = 0$

3. $y(y')^2 + y'(x - xy) - x^2 = 0$

4. $x^2(y')^2 - y'(y + x^3) + xy = 0$

5. $y = x(y') + (y')^3 + 1$

6. $y = x(y')^3 + 1$

7. $(y')^2 + 1 = y^2$

8. $y = x(y') + \frac{1}{(y')^2}$

9. $x = \frac{y}{y'} + y'$

5. Les équations d'ordre 2 et de degré 1

Dans les équations d'ordre 2, on retrouve des dérivées secondes y''. Encore une fois, la technique pour résoudre dépend de la forme de l'équation.

Équations dans lesquelles y et y' sont absents

Dans ce cas, on a une équation de la forme suivante.

$$y'' = f(x)$$

Rien de plus facile pour résoudre : on intègre deux fois…

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' = 6x$$

On a alors

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + C_1 \\ y &= x^3 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

____

On remarque qu'il y a maintenant 2 constantes d'intégration. C'est ce qui arrive avec les équations d'ordre 2 puisqu'il y a deux intégrations à faire pour résoudre.

Équations dans lesquelles x et y' sont absents

Dans ce cas, on a une équation de la forme suivante.

$$y'' = f(y)$$

Si on utilise encore $p = y'$, on a

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dp}{dx} \\ &= \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{dp}{dy} p \end{aligned}$$

L'équation devient donc

$$\frac{dp}{dy} p = f(y)$$

On peut alors résoudre cette équation pour obtenir p. Une fois qu'on a p, on a une équation de premier ordre, qu'on peut résoudre.

Exemple

Quelle est la solution particulière de l'équation suivante si $y = 1$ et $y' = 0$ quand $x = 0$.

$$y'' = \frac{1}{y^3}$$

Si $p = y'$, on a $y'' = \frac{dp}{dy} p$ et l'équation devient

$$\frac{dp}{dy} p = \frac{1}{y^3}$$

Maintenant le truc qu'il ne faut surtout pas oublier : on multiplie par dy de chaque côté. On a alors

$$pdp = \frac{1}{y^3} dy$$

On peut alors intégrer pour obtenir

$$\int pdp = \int \frac{1}{y^3} dy$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{-1}{2y^2} + C_1$$

On peut trouver la valeur de la constante puisqu'on sait que $p = 0$ quand $y = 1$. On a donc

$$\frac{0^2}{2} = \frac{-1}{2 \cdot 1^2} + C_1$$

$$C_1 = \frac{1}{2}$$

On a donc

$$\frac{p^2}{2} = \frac{-1}{2y^2} + \frac{1}{2}$$

$$p^2 = \frac{-1}{y^2} + 1$$

$$p = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$$

Puisque $p = dy/dx$, on a alors

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$$

La solution est

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}} = \pm dx$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = \pm dx$$
$$\sqrt{y^2-1} = \pm x + C_2$$

On peut trouver la valeur de la constante puisqu'on sait que $y = 1$ quand $x = 0$. On a donc

$$\sqrt{1^2-1} = \pm 0 + C_2$$
$$C_2 = 0$$

La solution est donc

$$\sqrt{y^2-1} = \pm x$$
$$y^2 - 1 = x^2$$
$$y^2 = x^2 + 1$$

Cette solution est une hyperbole.

____

Notez que la deuxième intégrale n'est pas toujours facile puisqu'il faut faire une racine pour isoler p.

Équations dans lesquelles y est absent

Dans ce cas, on a une équation de la forme suivante.

$$y'' = f(x, y')$$

Si on utilise encore que $p = y'$, on a

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

C'est une équation de premier ordre en p, qu'on peut résoudre pour obtenir p. Une fois qu'on connait p, on a une autre équation de premier ordre qu'on peut résoudre.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$xy'' + 2y' = 12x^2$$

Si $p = y'$, on a

$$x\frac{dp}{dx}+2p=12x^2$$

On a alors

$$\frac{dp}{dx}+\frac{2}{x}p=12x$$

qui est une équation linéaire. Le facteur intégrant est

$$\begin{aligned}e^{\int\frac{2}{x}dx}&=e^{2\ln(x)}\\&=e^{\ln x^2}\\&=x^2\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}x^2\frac{dp}{dx}+2xp&=12x^3\\x^2dp+2xpdx&=12x^3dx\\d\left(x^2p\right)&=12x^3dx\end{aligned}$$

On peut alors intégrer pour obtenir

$$x^2p=3x^4+C_1$$

On arrive alors à

$$\begin{aligned}p&=3x^2+\frac{C_1}{x^2}\\\frac{dy}{dx}&=3x^2+\frac{C_1}{x^2}\\y&=x^3-\frac{C_1}{x}+C_2\end{aligned}$$

C’est la solution de notre équation différentielle

____

Équations dans lesquelles x est absent

Dans ce cas, on a une équation de la forme suivante.

$$y''=f\left(y,y'\right)$$

Si on utilise encore que $p = y'$, et on a encore

$$y'' = \frac{dp}{dy} p$$

L'équation est alors

$$\frac{dp}{dy} p = f\left(y, y'\right)$$

$$\frac{dp}{dy} p = f\left(y, p\right)$$

On a une équation de premier ordre, qu'on peut résoudre. On obtient alors une équation pour p qui est aussi une équation de premier ordre, qu'on peut ensuite résoudre.

Exemple

Quelle est la solution particulière de l'équation suivante si $y = 0$ et $y' = 1$ quand $x = 0$.

$$y'' + e^y \left(y'\right)^3 = 0$$

Si $p = y'$, on a $y'' = \frac{dp}{dy} p$ et l'équation devient

$$\frac{dp}{dy} p + e^y \left(p\right)^3 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} + e^y p^2 = 0$$

On peut alors résoudre cette équation pour obtenir

$$\frac{dp}{dy} = -e^y p^2$$

$$-\frac{dp}{p^2} = e^y dy$$

$$\frac{1}{p} = e^y + C_1$$

Puisque $y = 0$ et $y' = 1$ quand $x = 0$, on a

$$\frac{1}{1} = e^0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

On a alors

$$\frac{1}{p}=e^{y}$$

Puisque $p = dy/dx$, on a alors

$$\frac{dx}{dy}=e^{y}$$

La solution est

$$dx=e^{y}dy$$
$$x=e^{y}+C_{2}$$

Puisque $y = 0$ et $y' = 1$ quand $x = 0$, on a

$$0=e^{0}+C_{2}$$
$$C_{2}=-1$$

La solution de notre équation est donc

$$x=e^{y}-1$$
$$y=\ln\left(x+1\right)$$

____

SÉRIE D'EXERCICES 12

Trouvez la solution des équations différentielles suivantes.

1. $y''=12$

2. $y''=24x^{2}+12x+6$

3. $y''=\sinh x$

4. $y''+9y=0$

5. $y''-9y=0$

6. $y''=\dfrac{1}{y^{3}}$

7. $y'' = \sec^2 y \tan y$ si $y' = 1$ et $y = \pi/4$ quand $x = 3$

8. $xy'' - 2y' = x^3 \sin x$

9. $xy'' - y' = 1$

10. $y'' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) y' = x$

11. $xy'' - y' = 8x^2$

12. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$ si $y' = 0$ et $y = 2$ quand $x = 2$

13. $y'' + yy' = 0$ si $y' = -1$ et $y = 1$ quand $x = 1$

14. $yy'' = 2(y')^2$ si $y' = 8$ et $y = 2$ quand $x = 1$

15. $2yy'' - (y')^2 = 4y^2$

Les équations linéaires à coefficient constant.

Une équation linéaire est une équation de la forme suivante.

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x)$$

Si la fonction $R(x)$ n'est pas nulle, on a une *équation linéaire non homogène*. Par exemple, l'équation suivante est une équation linéaire non homogène.

$$y'' + 3xy' + \sin(x)\,y = e^x$$

Si la fonction $R(x)$ est nulle, on a une *équation linéaire homogène*. Par exemple, l'équation suivante est une équation linéaire homogène.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}\,y' + \frac{6}{1-x^2}\,y = 0$$

On a une *équation linéaire à coefficients constants* si les fonctions $P(x)$ et $Q(x)$ sont des constantes. Par exemple, les équations suivantes sont des équations linéaires à coefficients constants.

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$
$$2y'' - 2y' + 4y = 0$$

La première est une équation linéaire à coefficients constants non homogène alors que la deuxième est une équation linéaire à coefficients constants homogène.

On va commencer avec les équations linéaires à coefficients constants homogènes.

Les équations linéaires à coefficients constants homogènes.

Dans ce cas, nous avons une équation de la forme suivante.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Nous avons alors une équation dans laquelle x est absent. Pour résoudre, on pourrait poser que $p = y'$ et résoudre. Cette méthode s'avère toutefois assez fastidieuse et le résultat est somme toute assez simple. Pour résoudre, on va plutôt faire le changement de variables suivant.

$$y = ue^{\lambda x}$$

(On va choisir la valeur de λ plus tard.) On a alors

$$\begin{aligned} y' &= u'e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= u''e^{\lambda x} + 2u'\lambda e^{\lambda x} + u\lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation, on a

$$ay'' + by' + cy = 0$$
$$au''e^{\lambda x} + 2au'\lambda e^{\lambda x} + au\lambda^2 e^{\lambda x} + b\left(u'e^{\lambda x} + u\lambda e^{\lambda x}\right) + cue^{\lambda x} = 0$$
$$e^{\lambda x}\left(au'' + (2a\lambda + b)u' + \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)u\right) = 0$$

On va maintenant faire notre choix pour λ. On va le choisir de telle sorte que

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

On a alors deux valeurs possibles pour λ.

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ici, on va prendre la première valeur. Notre équation différentielle devient donc

$$e^{\lambda x}\left(au'' + (2a\lambda_1 + b)u'\right) = 0$$
$$au'' + (2a\lambda_1 + b)u' = 0$$

Notez qu'alors

$$\begin{aligned}2a\lambda_1+b&=2a\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+b\\&=-b+\sqrt{b^2-4ac}+b\\&=\sqrt{b^2-4ac}\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}a(\lambda_1-\lambda_2)&=a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\&=\sqrt{b^2-4ac}\end{aligned}$$

On peut donc écrire l'équation sous la forme suivante.

$$\begin{gathered}au''+a(\lambda_1-\lambda_2)u'=0\\u''+(\lambda_1-\lambda_2)u'=0\end{gathered}$$

On peut maintenant intégrer une première fois pour arriver à

$$u'+(\lambda_1-\lambda_2)u=A$$

On obtient alors une équation linéaire d'ordre 1. Le facteur intégrant est

$$e^{\int(\lambda_1-\lambda_2)dx}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$$

On peut maintenant faire la solution

$$\begin{gathered}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}u'+(\lambda_1-\lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}u=Ae^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\\e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}du+(\lambda_1-\lambda_2)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}udx=Ae^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx\\d\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}u\right)=Ae^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx\\\int d\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}u\right)=\int Ae^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx\\e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}u=\frac{A}{\lambda_1-\lambda_2}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}+B\\u=\frac{A}{\lambda_1-\lambda_2}+Be^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\\u=C_1+C_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\end{gathered}$$

La solution est donc

$$\begin{gathered}y=ue^{\lambda_1x}\\y=\left(C_1+C_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\right)e^{\lambda_1x}\end{gathered}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} e^{\lambda_1 x}$$
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Pour trouver la solution de l'équation différentielle, il suffit donc de trouver les valeurs de λ_1 et λ_2, qui sont les solutions de l'équation $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Cette équation s'appelle *l'équation caractéristique* de l'équation différentielle linéaire à coefficient constant. Cette équation est relativement facile à obtenir. On remplace y'' par λ^2 et on remplace y' par λ dans l'équation différentielle pour obtenir l'équation caractéristique.

Il y a alors 3 possibilités.

1) L'équation caractéristique a deux solutions réelles.

Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle est simplement celle trouvée précédemment. On a donc

Solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Alors la solution est

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

si les valeurs de λ données par $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sont réelles.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Avec cette équation, l'équation caractéristique est alors $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Les deux solutions de cette équation sont

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - -4 \cdot 2}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &= 1 \text{ et } -2\end{aligned}$$

La solution est donc $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$.

---

2) L'équation caractéristique a deux solutions complexes

On pourrait obtenir une racine d'un nombre négatif quand on cherche les racines de l'équation caractéristique. Cela signifie que les deux valeurs de λ sont des nombres complexes $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ et $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Pas de panique, la solution obtenue précédemment devient

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

Avec ce qu'on sait des nombres complexes, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
y &= C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} \\
&= e^{\alpha x}\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) \\
&= e^{\alpha x}\left(C_1\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) + C_2\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)\right) \\
&= e^{\alpha x}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos\beta x + \left(C_1 i - C_2 i\right)\sin\beta x\right)
\end{aligned}$$

En redéfinissant les constantes, on arrive à

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

C'est la solution de l'équation différentielle. La partie réelle du nombre complexe se retrouve dans l'exponentielle et la partie complexe se retrouve dans les fonctions trigonométriques.

Solution d'une équation linéaire homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Alors la solution est

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

si les valeurs de λ données par $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sont les nombres complexes $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ et $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Notez qu'on pourrait aussi écrire cette solution sous la forme suivante.

$$y = Ae^{\alpha x}\cos\left(\beta x + \phi\right)$$

où ϕ est une constante d'intégration. C'est équivalent puisqu'en utilisant $\cos\left(A+B\right) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$, on arrive à

$$\begin{aligned}
y &= Ae^{\alpha x}\cos\left(\beta x + \phi\right) \\
&= Ae^{\alpha x}\left(\cos\beta x\cos\phi - \sin\beta x\sin\phi\right)
\end{aligned}$$

$$= e^{\alpha x}\left(\left(A\cos\phi\right)\cos\beta x + \left(-A\sin\phi\right)\sin\beta x\right)$$

En redéfinissant les constantes, on arrive à

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

On aurait pu aussi écrire la solution sous la forme suivante.

$$y = Ae^{\alpha x}\sin\left(\beta x + \phi\right)$$

C'est équivalent puisqu'en utilisant $\sin\left(A+B\right) = \cos A\sin B + \sin A\cos B$, on arrive à

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\alpha x}\sin\left(\beta x + \phi\right) \\ &= Ae^{\alpha x}\left(\cos\beta x\sin\phi + \sin\beta x\cos\phi\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(\left(A\sin\phi\right)\cos\beta x + \left(A\cos\phi\right)\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

En redéfinissant les constantes, on arrive à

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Avec cette équation, l'équation caractéristique est alors

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 13}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ &= -2 + 3i \text{ et } -2 - 3i \end{aligned}$$

La solution est donc

$$y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$$

---

3) L’équation caractéristique n’a qu’une seule solution.

Cela se produit si $\sqrt{b^2-4ac}$ = 0. Dans ce cas, les deux valeurs de λ sont identiques et on a

$$\lambda_1-\lambda_2=0$$

Revenons alors à notre solution de l’équation pour voir ce qu’on obtient dans ce cas. À un certain moment, on avait

$$u''+(\lambda_1-\lambda_2)u'=0$$

Si $\lambda_1-\lambda_2=0$, alors on a

$$u''=0$$

On obtient alors u en intégrant 2 fois.

$$\begin{aligned}u'&=C_1\\ u&=C_1x+C_2\end{aligned}$$

La solution de l’équation est donc

$$\begin{aligned}y&=ue^{\lambda x}\\ y&=(C_1x+C_2)e^{\lambda x}\end{aligned}$$

On a donc

Solution d’une équation linéaire homogène d’ordre 2

$$ay''+by'+cy=0$$

Alors la solution est

$$y=(C_1x+C_2)e^{\lambda x}$$

S’il n’y a qu’une seule solution à l’équation $a\lambda^2+b\lambda+c=0$.

Exemple

Quelle est la solution générale de l’équation suivante ?

$$y''-2y'+y=0$$

Avec cette équation, l’équation caractéristique est alors

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 0}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

La solution est donc

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x$$

____

Voici un exemple qui pourrait être n'importe lequel des trois cas vus précédemment.

Exemple

Quelle est la solution particulière de l'équation suivante si $y(0) = 3$ et $y'(0) = 2$.

$$8y'' + 6y' + y = 0$$

Avec cette équation, l'équation caractéristique est alors

$$8\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2 \cdot 8} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{16} \\ &= -\tfrac{1}{4} \text{ et } -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-x/4}$$

Trouvons maintenant la solution particulière. On sait premièrement que $y(0) = 3$. On a donc

$$\begin{aligned}3 &= C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ 3 &= C_1 + C_2\end{aligned}$$

On sait ensuite que $y'(0) = 2$. La dérivée est

$$y' = C_1\left(\tfrac{-1}{2}\right)e^{-x/2} + C_2\left(\tfrac{-1}{4}\right)e^{-x/4}$$

Avec les valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}2 &= C_1\left(\tfrac{-1}{2}\right)e^{0} + C_2\left(\tfrac{-1}{4}\right)e^{0}\\ 2 &= C_1\left(\tfrac{-1}{2}\right) + C_2\left(\tfrac{-1}{4}\right)\\ 8 &= -2C_1 - C_2\end{aligned}$$

On a donc les deux équations suivantes

$$\begin{aligned}3 &= C_1 + C_2\\ 8 &= -2C_1 - C_2\end{aligned}$$

En additionnant les équations, on a

$$\begin{aligned}3+8 &= \left(C_1 + C_2\right) + \left(-2C_1 - C_2\right)\\ 11 &= -C_1\end{aligned}$$

On trouve alors que la valeur de C_2 est de 14 (puisque $C_1 + C_2 = 3$). La solution est donc

$$y = -11e^{-x/2} + 14e^{-x/4}$$

SÉRIE D'EXERCICES 13

Trouvez la solution des équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y = 0$

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$

3. $y'' - 2y' + 5y = 0$

4. $y'' + 4y = 0$

5. $8y'' + 2y' - y = 0$

6. $y'' + 6y' + 25y = 0$

7. $y'' + 4y' + 5 = 0$ si $y' = 2$ et $y = 1$ quand $x = 0$

8. $y'' - y' = 0$ si $y' = -1$ et $y = 1$ quand $x = 0$

Les équations linéaires à coefficients constants non homogènes.

Nous avons alors l'équation

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Dans ce cas, la solution a la forme suivante.

Solution d'une équation linéaire non homogène d'ordre 2

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

Alors la solution est

$$y = y_h + y_{nh}$$

où y_h est la solution de l'équation homogène et y_{nh} est une solution particulière qui dépend de la forme de $f(x)$.

L'idée que la somme de deux solutions est aussi une solution porte le nom de *principe de superposition*. Cela vous rappelle peut-être un principe utilisé avec les ondes.

Attention, le principe de superposition est uniquement vrai pour des équations linéaires. Pour une équation non linéaire, la somme de deux solutions n'est pas nécessairement une solution de l'équation. Le principe de superposition s'applique aux ondes parce qu'elles sont justement décrites par une équation linéaire.

À force de résoudre ce genre d'équation, on a fini par se rendre compte de certaines régularités : selon la forme de $f(x)$, la forme y_{nh} est déterminée.

Forme que doit prendre y_{nh} selon la forme de $f(x)$.

$f(x)$	y_{nh}
$P(x)$	$Q(x)$
$P(x)e^{\gamma x}$	$Q(x)e^{\gamma x}$
$P(x)\cos\omega x$	$Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x$
$P(x)\sin\omega x$	$Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x$
$P(x)e^{\gamma x}\cos\omega x$	$e^{\gamma x}\left(Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x\right)$
$P(x)e^{\gamma x}\sin\omega x$	$e^{\gamma x}\left(Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x\right)$

Dans ce tableau, les P, Q et R sont des polynômes. Les polynômes Q et R sont toujours du même degré de P. Les coefficients des polynômes Q et R sont initialement inconnus.

Voici un exemple pour illustrer. Supposons que $f(x)$ soit

$$f\left(x\right)=e^{2x}(3x^2+4x+1)$$

Alors, y_{nh} sera une fonction exponentielle multipliée par un polynôme de degré 2.

$$y_{nh}=e^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$$

On trouve les valeurs des coefficients en remplaçant y_{nh} dans l'équation.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y''+4y=8x^2+2$$

On va commencer par trouver l'équation de l'équation homogène. L'équation homogène est

$$y''+4y=0$$

Avec cette équation, l'équation caractéristique est alors

$$\lambda^2+4=0$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\lambda=2i \text{ et } -2i$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

Trouvons maintenant l'autre partie de la solution. Puisque $f(x)$ est un polynôme de degré 2, alors y_{nh} doit être un polynôme de degré 2. On a donc

$$y_{nh}=Ax^2+Bx+C$$

On trouve les valeurs des coefficients en remplaçant cette solution dans l'équation. On a

$$y'_{nh}=2Ax+B$$
$$y''_{nh}=2A$$

L'équation donne alors

$$y'' + 4y = 8x^2 + 2$$
$$2A + 4\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 8x^2 + 2$$
$$4Ax^2 + 4Bx + \left(2A + 4C\right) = 8x^2 + 2$$

Les coefficients de chaque degré doivent être les mêmes de chaque côté de l'équation. Cela mène aux 3 équations suivantes.

$$4A = 8$$
$$4B = 0$$
$$2A + 4C = 2$$

On a alors les solutions suivantes $A = 2$, $B = 0$ et $C = -½$. La solution non homogène est donc

$$y_{nh} = 2x^2 - \tfrac{1}{2}$$

La solution de l'équation et donc

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^2 - \tfrac{1}{2}$$

Si $f(x)$ est la somme de deux formes dans le tableau, alors y_{nh} est simplement la somme des y_{nh} indiqués au tableau. C'est la *règle de sommation*.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} + \cos 2x$$

On va commencer par trouver l'équation de l'équation homogène. L'équation homogène est

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Avec cette équation, l'équation caractéristique est alors

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\lambda = 1 \text{ et } -2$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

Trouvons maintenant l'autre partie de la solution. Puisque $f(x)$ est la somme d'une exponentielle et d'un cosinus, alors y_{nh} est la somme des deux termes proposés pour ces fonctions.

$$y_{nh} = Ae^{-x} + B\cos 2x + C\sin 2x$$

On trouve les valeurs des coefficients en remplaçant cette solution dans l'équation. On a

$$y'_{nh} = -Ae^{-x} - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x$$
$$y''_{nh} = Ae^{-x} - 4B\cos 2x - 4C\sin 2x$$

L'équation donne alors

$$y'' + y' - 2y = e^{-x} + \cos 2x$$
$$\left(Ae^{-x} - 4B\cos 2x - 4C\sin 2x\right) + \left(-Ae^{-x} - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x\right)$$
$$-2\left(Ae^{-x} + B\cos 2x + C\sin 2x\right) = e^{-x} + \cos 2x$$
$$\left(A - A - 2A\right)e^{-x} + \left(-4B + 2C - 2B\right)\cos 2x + \left(-4C - 2B - 2C\right)\sin 2x = e^{-x} + \cos 2x$$
$$-2Ae^{-x} + \left(2C - 6B\right)\cos 2x + \left(-6C - 2B\right)\sin 2x = e^{-x} + \cos 2x$$

Les coefficients de chaque partie (l'exponentiel, le cosinus et le sinus) doivent être les mêmes de chaque côté de l'équation. Cela mène aux 3 équations suivantes.

$$-2A = 1$$
$$2C - 6B = 1$$
$$-6C - 2B = 0$$

On a alors les solutions suivantes.

$$A = -\tfrac{1}{2}$$
$$B = -\tfrac{3}{20}$$
$$C = \tfrac{1}{20}$$

On a donc

$$y_{nh} = -\tfrac{1}{2}e^{-x} - \tfrac{3}{20}\cos 2x + \tfrac{1}{20}\sin 2x$$

La solution de l'équation et donc

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \tfrac{1}{2}e^{-x} - \tfrac{3}{20}\cos 2x + \tfrac{1}{20}\sin 2x$$

Maintenant, il se pourrait que $f(x)$ soit déjà dans la solution de l'équation homogène. Dans ce cas, il faut appliquer la *règle de modification* qui dit qu'on doit multiplier y_{nh} par x. Si on obtient encore un y_{nh} qui fait partie de la solution homogène, on multiplie encore par x et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une fonction qui n'est pas dans y_h.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

On va commencer par trouver l'équation de l'équation homogène. L'équation homogène est

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Avec cette équation, l'équation caractéristique est alors

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Les deux solutions de cette équation sont

$$\lambda = 1 \text{ et } 2$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Trouvons maintenant l'autre partie de la solution. Puisque $f(x)$ est une exponentielle, alors y_{nh} est

$$y_{nh} = Ae^x$$

Mais cette fonction est déjà dans y_h. La règle de modification dit alors qu'on doit plutôt prendre

$$y_{nh} = Axe^x$$

On trouve la valeur du coefficient en remplaçant cette solution dans l'équation. On a

$$y'_{nh} = Axe^x + Ae^x$$
$$y''_{nh} = Axe^x + 2Ae^x$$

L'équation donne alors

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$
$$\left(Axe^x + 2Ae^x\right) - 3\left(Axe^x + Ae^x\right) + 2Axe^x = e^x$$

$$\left(A-3A+2A\right)xe^{x}+\left(2A-3A\right)e^{x}=e^{x}$$
$$\left(2A-3A\right)e^{x}=e^{x}$$
$$A=-1$$

On a donc

$$y_{nh}=-xe^{x}$$

La solution de l'équation et donc
$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}-xe^{x}$$

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y''-2y'+y=e^{x}+xe^{x}$$

On va commencer par trouver l'équation de l'équation homogène. L'équation homogène est

$$y''-2y'+y=0$$

Avec cette équation, l'équation caractéristique est alors

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

Il n'y a qu'une seule solution à cette équation.

$$\lambda=1$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h=C_1xe^{x}+C_2e^{x}$$

Trouvons maintenant l'autre partie de la solution. Puisque $f(x)$ est une exponentielle multipliée par un polynôme de degré 1

$$f\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{x}$$

alors y_{nh} doit aussi être une exponentielle multipliée par un polynôme de degré 1.

$$y_{nh}=\left(Ax+B\right)e^{x}$$

Or, cette solution inclut un terme qui est Be^{x}. Comme cette solution est déjà dans y_h, on doit appliquer la règle de modification. On a alors

$$y_{nh} = x\left(Ax+B\right)e^x$$

Or, cette solution inclut un terme qui est Bxe^x. Comme cette solution est déjà dans y_h, on doit encore appliquer la règle de modification. On a alors

$$\begin{aligned} y_{nh} &= x^2\left(Ax+B\right)e^x \\ &= \left(Ax^3+Bx^2\right)e^x \end{aligned}$$

On trouve la valeur des coefficients en remplaçant cette solution dans l'équation. Les dérivées sont

$$\begin{aligned} y'_{nh} &= \left(Ax^3+Bx^2\right)e^x + \left(3Ax^2+2Bx\right)e^x \\ &= \left(Ax^3+\left(3A+B\right)x^2+2Bx\right)e^x \\ y''_{nh} &= \left(Ax^3+\left(3A+B\right)x^2+2Bx\right)e^x + \left(3Ax^2+2\left(3A+B\right)x+2B\right)e^x \\ &= \left(Ax^3+\left(6A+B\right)x^2+\left(6A+4B\right)x+2B\right)e^x \end{aligned}$$

L'équation donne alors

$$\begin{gathered} y''-2y'+y = e^x + xe^x \\ \left(Ax^3+\left(6A+B\right)x^2+\left(6A+4B\right)x+2B\right)e^x \\ -2\left(Ax^3+\left(3A+B\right)x^2+2Bx\right)e^x + \left(Ax^3+Bx^2\right)e^x = e^x + xe^x \\ \left(A-2A+A\right)x^3e^x + \left(6A+B-6A-2B+B\right)x^2e^x \\ +\left(6A+4B-4B\right)xe^x + \left(2B\right)e^x = e^x + xe^x \\ \left(6A\right)xe^x + \left(2B\right)e^x = e^x + xe^x \end{gathered}$$

Les coefficients de chaque partie (x^3e^x, x^2e^x et xe^x) doivent être les mêmes de chaque côté de l'équation. Cela mène aux 2 équations suivantes.

$$\begin{aligned} 6A &= 1 \\ 2B &= 1 \end{aligned}$$

On a alors les solutions suivantes.

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{6} \\ B &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la solution non homogène est

$$y_{nh} = x^2\left(\tfrac{1}{6}x+\tfrac{1}{2}\right)e^x$$

et la solution de l'équation est donc

$$y = C_1 x e^x + C_2 e^x + x^2 \left(\tfrac{1}{6} x + \tfrac{1}{2}\right) e^x$$

SÉRIE D'EXERCICES 14

Trouvez la solution des équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y = -x - x^2$

2. $y'' - y = e^x$

3. $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$

4. $y'' - y' - 2y = 10\cos 2x$

5. $y'' - 2y' + 2y = 3e^x(x+3)$

6. $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$

7. $y'' + 25y = 20\sin 5x$ si $y' = 3$ et $y = 1$ quand $x = 0$

8. $y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4$ si $y' = -1$ et $y = 2$ quand $x = 0$

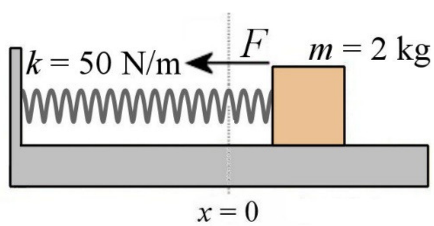
6. *Applications pour des équations d'ordre 2*

Nous allons commencer par un exemple de mécanique. On arrive souvent à des équations différentielles d'ordre 2 en mécanique puisque, dans la 2e loi de Newton, on retrouve l'accélération qui est la deuxième dérivée de la position en fonction du temps. Si on cherche la position en fonction du temps, on doit donc résoudre une équation d'ordre 2.

Un système masse ressort

Sans friction

Supposons qu'on ait le système montré sur la figure.



On veut connaitre l'équation qui donne la position de cette masse en fonction de temps s'il n'y a pas de friction, sachant que la masse a commencé son mouvement avec une vitesse nulle à $x = 10$ cm.

En appliquant la 2e loi de Newton, on arrive à

$$\sum F = ma$$
$$-50\tfrac{N}{m}x = 2kg \cdot a$$

Mais puisque l'accélération est la deuxième dérivée de la position, on a

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

On peut donc écrire cette équation sous la forme suivante.

$$2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 50\tfrac{N}{m}x = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 25\tfrac{1}{s^2}x = 0$$

C'est une équation linéaire à coefficient constant homogène. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 25\tfrac{1}{s^2} = 0$$

Cette équation donne

$$\lambda = \pm i5\tfrac{1}{s}$$

Ainsi, la position en fonction du temps est donnée par

$$x = C_1 \sin\left(5\tfrac{1}{s}t\right) + C_2 \cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right)$$

Comme on sait que la position initiale est de 10 cm, on a

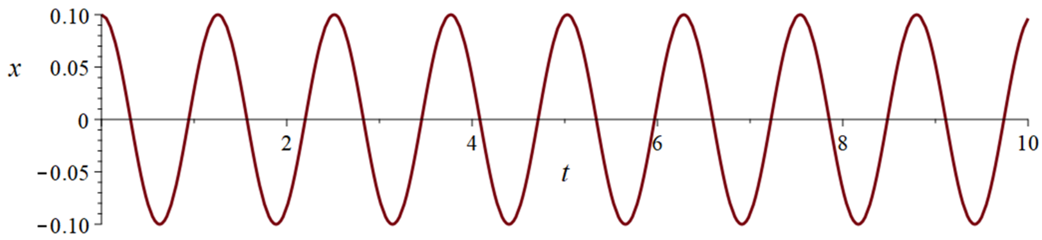
$$0,1m = C_1 \sin\left(5\tfrac{1}{s} \cdot 0s\right) + C_2 \cos\left(5\tfrac{1}{s} \cdot 0s\right)$$
$$0,1m = C_2$$

Comme on sait que la vitesse initiale est nulle, on a

$$v = \frac{d\left(C_1 \sin\left(5\tfrac{1}{s}t\right) + 0,1m\cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right)\right)}{dt}$$
$$v = C_1 \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right) - 0,1m \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \sin\left(5\tfrac{1}{s}t\right)$$
$$0 = C_1 \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{s} \cdot 0s\right) - 0,1m \cdot 5\tfrac{1}{s} \cdot \sin\left(5\tfrac{1}{s} \cdot 0s\right)$$
$$C_1 = 0$$

La position en fonction du temps est donc donnée par

$$x = 0,1m \cdot \cos\left(5\tfrac{1}{s}t\right)$$



Notez que cette formule est équivalente à la formule utilisée en ondes et physique moderne (dans laquelle ϕ est $\pi/2$).

$$x = A\sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t + \phi\right)$$

Avec friction

On va maintenant ajouter une force de friction proportionnelle à la vitesse de la masse et qui est dans la direction opposée au mouvement.

$$F = -bv$$

(Le signe négatif indique que la force est dans la direction opposée à la vitesse.) Ici, on va prendre une valeur de $b = 2\ kg/s$. La deuxième loi de Newton donne alors

$$\sum F = ma$$

$$-50\tfrac{N}{m}x - 2\tfrac{kg}{s}v = 2kg \cdot a$$

On peut alors écrire cette équation sous la forme suivante.

$$2kg \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} + 50\tfrac{N}{m}x = 0$$

C’est une équation linéaire à coefficient constant homogène. L’équation caractéristique est

$$2kg \cdot \lambda^2 + 2\tfrac{kg}{s}\lambda + 50\tfrac{N}{m} = 0$$

Cette équation donne

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-2\tfrac{kg}{s} \pm \sqrt{4\tfrac{kg^2}{s^2} - 4 \cdot 2kg \cdot 50\tfrac{N}{m}}}{4kg} \\ &= \frac{-2\tfrac{1}{s} \pm \sqrt{-396\tfrac{1}{s^2}}}{4} \\ &= -0,5\tfrac{1}{s} \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{11}i\tfrac{1}{s}\end{aligned}$$

Ainsi, la position en fonction du temps est donnée par

$$x = e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$

Comme on sait que la position initiale est de 10 cm, on a

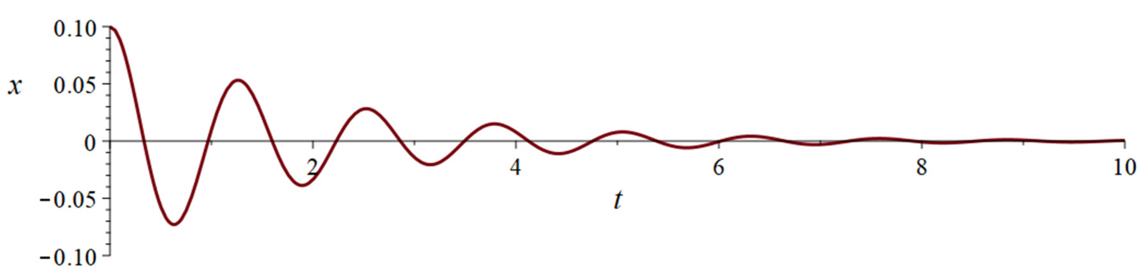
$$0,1m = e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot 0s}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}\cdot 0s\right)\right)$$
$$0,1m = 1(C_2)$$
$$0,1m = C_2$$

Comme on sait que la vitesse initiale est nulle, on a

$$v = \frac{d\left(e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right) + 0,1m \cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)\right)}{dt}$$
$$v = e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}\cdot\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right) - 0,1m\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$
$$-0,5\tfrac{1}{s}e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1 \sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right) + 0,1m \cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$
$$0 = e^{-0}\left(C_1\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}\cdot\cos 0 - 0,1m\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}\cdot\sin 0\right) - 0,5\tfrac{1}{s}e^{-0}\left(A\sin 0 + 0,1m\cos 0\right)$$
$$0 = \left(C_1\cdot\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}\right) - 0,5\tfrac{1}{s}(0,1m)$$
$$C_1 = \frac{0,1}{3\sqrt{11}}m$$

La position en fonction du temps est donc donnée par

$$x = e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(\frac{0,1}{3\sqrt{11}}m\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right) + 0,1m\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$



On voit qu'on a maintenant une oscillation dont l'amplitude diminue avec le temps, ce qui n'est pas tellement étonnant pour un mouvement dans lequel il y a de la friction. Au bout de 10 secondes, il n'y a pratiquement plus de mouvement.

<u>Avec friction et une force externe qui agit sur la masse</u>

On va maintenant ajouter, en plus de la friction, une force externe qui agite sur la masse. Supposons que cette force est donnée par

$$F = 10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

La deuxième loi de Newton donne alors

$$\sum F = ma$$
$$-50\tfrac{N}{m}x - 2\tfrac{kg}{s}v + 10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right) = 2kg\cdot a$$

On peut alors écrire cette équation sous la forme suivante.

$$2kg\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} + 50\tfrac{N}{m}x = 10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

C'est une équation linéaire à coefficient constant non homogène. On peut commencer par trouver la solution de l'équation homogène.

$$2kg\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2\tfrac{kg}{s}\frac{dx}{dt} + 50\tfrac{N}{m}x = 0$$

C'est exactement l'équation qu'on avait quand il n'y avait pas de force externe. On connait donc la solution de cette équation homogène.

$$x_h = e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right) + C_2\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)$$

Reste à trouver la solution non homogène. Cette solution doit avoir la forme

$$x_{nh} = A\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right) + B\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

On trouve les coefficients en remplaçant dans l'équation. Les dérivées sont

$$\frac{dx_{nh}}{dt} = A\cdot 4\tfrac{1}{s}\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right) - B\cdot 4\tfrac{1}{s}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$
$$\frac{d^2x_{nh}}{dt^2} = -A\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right) - B\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned}2kg\cdot&\left(-A\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right) - B\cdot 16\tfrac{1}{s^2}\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\right)\\ &+2\tfrac{kg}{s}\left(A\cdot 4\tfrac{1}{s}\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right) - B\cdot 4\tfrac{1}{s}\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\right)\\ &+50\tfrac{N}{m}\left(A\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right) + B\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\right) = 10N\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)\end{aligned}$$

Les coefficients des cosinus doivent être les mêmes de chaque côté.

$$-2kg\cdot B\cdot 16\tfrac{1}{s^2}+2\tfrac{kg}{s}A\cdot 4\tfrac{1}{s}+50\tfrac{N}{m}\cdot B=10N$$

et les coefficients des sinus doivent aussi être les mêmes de chaque côté.

$$-2kg\cdot A\cdot 16\tfrac{1}{s^2}-2\tfrac{kg}{s}\cdot B\cdot 4\tfrac{1}{s}+50\tfrac{N}{m}A=0$$

On a alors ces deux équations.

$$18\tfrac{kg}{s^2}\cdot B+8\tfrac{kg}{s^2}A=10N$$
$$18\tfrac{kg}{s^2}\cdot A-8\tfrac{kg}{s^2}\cdot B=0$$

La solution de ce système d'équation est

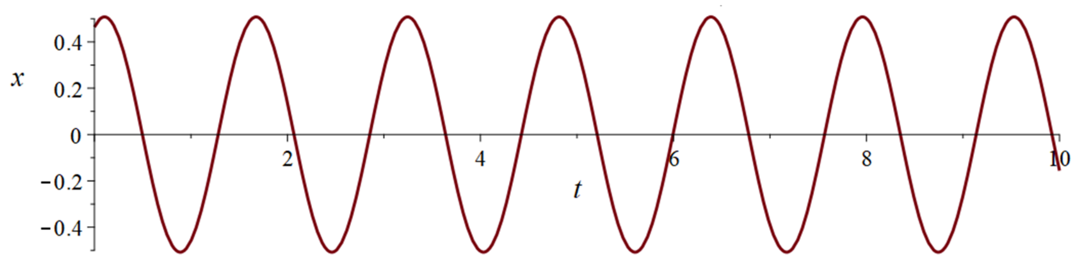
$$A=\tfrac{20}{97}m \qquad B=\tfrac{45}{97}m$$

La position en fonction du temps de ce système est donc

$$x=e^{-0,5\frac{1}{s}\cdot t}\left(C_1\sin\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)+C_2\cos\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{11}\tfrac{1}{s}t\right)\right)+\frac{20}{97}m\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)+\frac{45}{97}m\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$

Ce qui est probablement le plus intéressant ici, c'est le mouvement au bout de quelques secondes. On a vu que la première partie avec l'exponentielle diminue rapidement avec le temps parce qu'il y a une exponentielle. Au bout d'une dizaine de secondes, ce mouvement est presque disparu et il ne reste alors que la partie non homogène. Donc, après quelques secondes, le mouvement sera décrit par

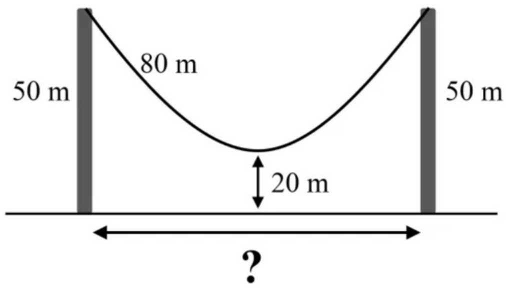
$$x=\frac{20}{97}m\cdot\sin\left(4\tfrac{1}{s}t\right)+\frac{45}{97}m\cdot\cos\left(4\tfrac{1}{s}t\right)$$



C'est un mouvement ayant une amplitude d'environ 0,5077 m.

Un câble suspendu

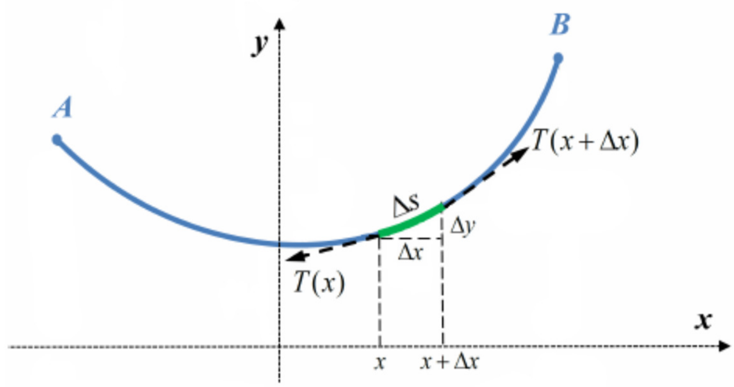
Dans cet exemple, on veut savoir la distance entre ces poteaux qui soutient une corde de 80 m de long. Ça semble simple, mais on va voir que c'est un peu long avant d'arriver à une réponse.



mindyourdecisions.com/blog/2018/07/12/can-you-solve-amazons-hanging-cable-interview-question/

Pour y arriver, il faut savoir l'équation qui donne la forme d'un câble suspendu entre deux points. Ceci nous mènera directement à une équation d'ordre 2.

Pour trouver l'équation de la forme, on va examiner les forces sur un petit morceau de cette corde.



www.researchgate.net/figure/260082725_fig3_Figure-3-Force-equilibrium-over-segment-s-of-classical-catenary-curve-in-vertical

(Remarquez les axes utilisés : le $x = 0$ est au point le plus bas de la corde.)
Les sommes des forces donnent

$$\sum F_x = T_x\left(x+\Delta x\right) - T_x\left(x\right) = 0$$
$$\sum F_y = T_y\left(x+\Delta x\right) - T_y\left(x\right) - mg = 0$$

Si on fait la limite quand la longueur du morceau est petite, on a (pour la composante en x)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(T_x\left(x+\Delta x\right) - T_x\left(x\right)\right) = 0$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T_x\left(x+\Delta x\right) - T_x\left(x\right)}{\Delta x} = 0$$
$$\frac{dT_x}{dx} = 0$$

La composante en x de la tension est donc une constante.

Pour la composante en y, on a

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(T_y\left(x+\Delta x\right)-T_y\left(x\right)-mg\right)=0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{T_y\left(x+\Delta x\right)-T_y\left(x\right)}{\Delta x}\Delta x-mg=0$$
$$\frac{dT_y}{dx}dx-gdm=0$$

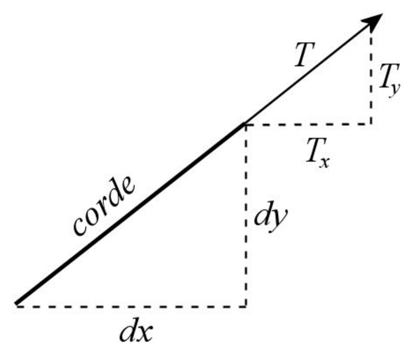
Il faut trouver la masse du petit morceau de corde. Cette masse est la masse linéique multipliée par la longueur.

$$\begin{aligned} dm &= \lambda ds \\ &= \lambda\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2} \\ &= \lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{dT_y}{dx}dx-g\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=0$$
$$\frac{dT_y}{dx}-g\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0$$

On va maintenant utiliser le fait que la tension est toujours parallèle à la corde.



On a alors deux beaux triangles semblables. Comme les rapports des côtés sont égaux pour des triangles semblables, on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{T_y}{T_x}$$

L'équation devient donc

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}T_x\right)}{dx}-g\lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{g\lambda}{T_x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0$$

C'est notre équation différentielle. Dans cette équation, x est absent. On pose donc $dy/dx = p$ et on a

$$\frac{dp}{dx}-\frac{g\lambda}{T_x}\sqrt{1+p^2}=0$$

On a alors une équation à variable séparable.

$$\frac{dp}{dx}-\frac{g\lambda}{T_x}\sqrt{1+p^2}=0$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{g\lambda}{T_x}dx$$

En intégrant de chaque côté, on a

$$\operatorname{arsinh}(p)=\frac{g\lambda}{T_x}x+C_1$$

Pour la constante, on examine le système d'axe qu'on a choisi. On a pris le $x=0$ au point le plus bas de la corde. À ce point, la pente est nulle. On a donc $p=0$ quand $x=0$. On peut alors trouver la valeur de la constante.

$$\operatorname{arsinh}(0)=\frac{g\lambda}{T_x}0+C_1$$

$$C_1=0$$

On a alors

$$\operatorname{arsinh}(p)=\frac{g\lambda}{T_x}x$$

$$p=\sinh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sinh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right)$$

$$dy=\sinh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right)dx$$

En intégrant de chaque côté, on a

$$y=\frac{T_x}{g\lambda}\cosh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right)+C_2$$

On va dire qu'au point le plus bas, la hauteur de la corde est y_0. On a alors

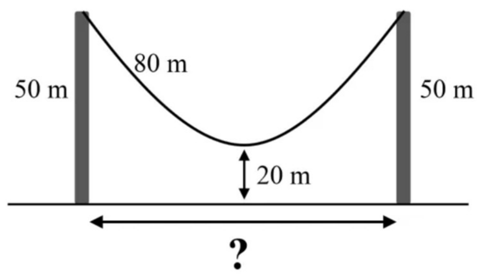
$$y_0 = \frac{T_x}{g\lambda}\cosh(0) + C_2$$

$$C_2 = \left(y_0 - \frac{T_x}{g\lambda} \right)$$

La solution est donc

$$y = \frac{T_x}{g\lambda}\cosh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right) + y_0 - \frac{T_x}{g\lambda}$$

On a maintenant l'équation qui donne la forme de la corde. On peut maintenant revenir à notre problème d'origine, la distance entre les poteaux.



Selon cette équation, on a $y_0 = 20\ m$. On a donc

$$y = \frac{T_x}{g\lambda}\cosh\left(\frac{g\lambda}{T_x}x\right) + 20m - \frac{T_x}{g\lambda}$$

Pour simplifier, on va poser que

$$a = \frac{T_x}{g\lambda}$$

On a alors

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + 20m - a$$

Disons que le poteau de droite est à $x = L$. Puisque la hauteur est de 50 m à cet endroit, on a

$$50m = a\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right) + 20m - a$$

$$30m = a\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right) - a$$

$$30m = a\left(\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right) - 1\right)$$

On n'a pas assez d'information pour trouver L. Toutefois, on sait que la longueur de la corde est de 80 m. La longueur de la corde est égale à la longueur de la courbe. Cette longueur est

$$80m = \int_{-L}^{L}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$80m=\int_{-L}^{L}\sqrt{1+\left(a\cdot\frac{1}{a}\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right)^2}dx$$
$$80m=\int_{-L}^{L}\sqrt{1+\sinh^2\left(\tfrac{x}{a}\right)}dx$$
$$80m=\int_{-L}^{L}\cosh\left(\tfrac{x}{a}\right)dx$$
$$80m=\left[a\sinh\left(\tfrac{x}{a}\right)\right]_{-L}^{L}$$
$$80m=2a\sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$30m=a\left(\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right)-1\right)$$
$$40m=a\sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

Ce n'est pas nécessairement facile à résoudre… On peut écrire.

$$\tfrac{30m}{a}+1=\cosh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$
$$\tfrac{40m}{a}=\sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$

Puisque $\cosh^2 x$ - $\sinh^2 x = 1$, on a

$$\left(\frac{30m}{a}+1\right)^2-\left(\frac{40m}{a}\right)^2=1$$
$$(30m+a)^2-(40m)^2=a^2$$
$$900m^2+60m\cdot a+a^2-1600m^2=a^2$$
$$900m^2+60m\cdot a-1600m^2=0$$
$$a=\tfrac{35}{3}m$$

On peut maintenant trouver L.

$$40m=a\sinh\left(\tfrac{L}{a}\right)$$
$$40m=\tfrac{35}{3}m\sinh\left(\tfrac{3L}{35m}\right)$$
$$L=22,702m$$

La distance entre les poteaux était donc de 45,4 m. Cool…

SÉRIE D'EXERCICES 15

1. Une voiture se déplaçant en ligne droite ayant une vitesse initiale de 90 km/h a une accélération donnée par la formule

$$a = -\frac{v}{20s}$$

où a est en m/s² et v en m/s. Quelle est la distance parcourue par cette voiture en 30 secondes ?

2. La force sur un objet de 5 kg est donnée par

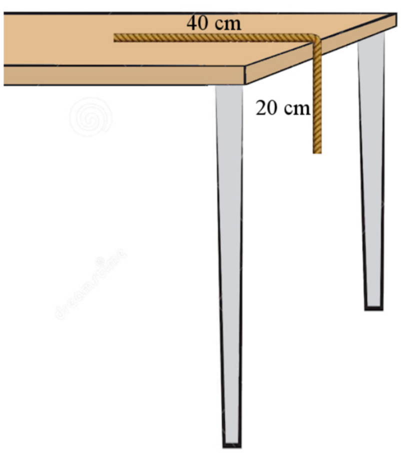
$$F = 5N + 40\tfrac{N}{m}x - 10\tfrac{kg}{s}v$$

où x est la position de l'objet et v est sa vitesse. L'objet est initialement au repos à $x = 0$. Où sera l'objet à $t = 2$ s ?

3. Reprenez l'exemple de la masse de $2\ \mathrm{kg}$ attaché à un ressort de $50\ \mathrm{N/m}$ avec de la friction et aucune force externe, mais augmentez la valeur de b pour la friction à $b = 25\ kg/s$. Quelle est alors l'équation de la position de la masse en fonction du temps ? (L'objet est toujours au repos à $x = 10\ \mathrm{cm}$ à $t = 0\ \mathrm{s}$.)

4. Reprenez l'exemple de la masse de $2\ \mathrm{kg}$ attaché à un ressort de $50\ \mathrm{N/m}$ avec de la friction et aucune force externe, mais augmentez la valeur de b pour la friction à $b = 20\ kg/s$. Quelle est alors l'équation de la position de la masse en fonction du temps ? (L'objet est toujours au repos à $x = 10\ \mathrm{cm}$ à $t = 0\ \mathrm{s}$.)

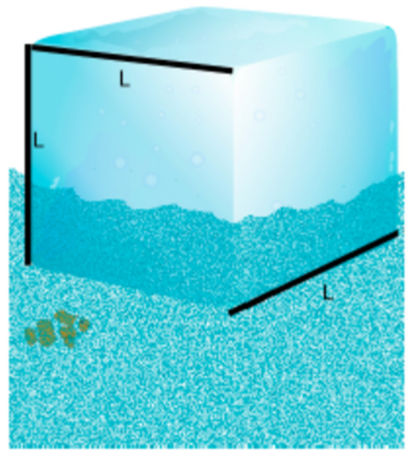
5. Dans la situation montrée sur la figure, il n'y a pas de friction entre la table et la corde de 5 kg qui glisse sur la table. Combien faudra-t-il de temps pour qu'il n'y ait plus de corde sur la table ?



www.dreamstime.com/royalty-free-stock-image-simple-drawing-table-isolated-white-background-image34921036

6. Un gros iceberg cubique (L = 75 m) flotte sur l'océan. Quelle est la période d'oscillation de l'iceberg s'il oscille légèrement de haut en bas à surface de l'eau ?

(La densité de l'eau est de 1000 kg/m³ et la densité de la glace est de 920 kg/m³ et il n'y a pas de friction.)



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/object-fully-partially-submerged-fluid-fluid-exerts-upward-buoyant-force-object-volume-dis-q9195125

Indice : Dans un mouvement oscillatoire, dont la position est donnée par une formule de la forme $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, la période (le temps pour faire une oscillation) se trouve avec $T = 2\pi / \omega$.

7. Sur une certaine ile, il y a des lapins et des renards. Le nombre de lapins est noté x et le nombre de renards est noté y. On va supposer que le taux de variation du nombre de lapins est donné

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta y$$

(Cela signifie que les lapins se multiplient à un taux constant et que plus il y a de renards, plus le nombre de lapins diminue rapidement.)

On va aussi supposer que le taux de variation du nombre de renards est donné par

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x - \delta$$

(Cela signifie que les renards se multiplient à un rythme proportionnel au nombre de lapins et qu'ils meurent à un taux constant)

Ici, on va supposer que les constantes sont $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}0005$ et $\delta = 0{,}4$ si on mesure le temps en jours.

On a alors un système d'équations différentielles suivant.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 0{,}01y$$
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}0005x - 0{,}4$$

Pour résoudre, on isole y dans la première équation

$$y = 100 - 100\frac{dx}{dt}$$

et on utilise cette valeur dans la deuxième équation. On a alors

$$\frac{d\left(100 - 100\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = 0,0005x - 0,4$$

$$-100\frac{d^2x}{dt^2} = 0,0005x - 0,4$$

$$100\frac{d^2x}{dt^2} + 0,0005x = 0,4$$

Au départ, on a 1000 lapins et 50 renards sur l'ile. Combien y a-t-il de lapins et de renard au bois de 1000 jours ?

Solutions des exercices

Série d'exercices 1

1. Ordre 1, degré 1

2. Ordre 1, degré 2

3. Ordre 2, degré 1

4. Ordre 4, degré 1

5. Ordre 2, degré 1

6. Ordre 2, degré non défini

7. Ordre 2, degré 2

13. $y = 7x^{-1/2} - 2x^{-3/2}$

Série d'exercices 2

1. $y = \frac{1}{8 - 3x^2}$

2. $y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$

3. $y^2 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{1 + x^2}}$

4. $y = \ln\left(x^2 - 4x - 4\right)$

5. $r = \frac{2}{1 - \ln\theta^2}$

6. $e^{-y}\left(\sin y - \cos y\right) = 5 - e^{-t}\left(2t^2 + 4t + 6\right)$

Série d'exercices 3

1. Non

2. Oui

3. Oui

4. Oui

5. Non

6. $y = x\,\text{arcosh}\left(\ln\left(\frac{C}{x}\right)\right)$

7. $y^2 = \frac{C}{x^2} - 2x^2$

8. $y = xe^{\frac{C}{x}-1}$

9. $x^3 + x^2 y + 4xy^2 - 3y^3 = C$

10. Il y a plusieurs formes possibles, toutes équivalentes

$y = x\sinh\left(\ln(Cx)\right)$, $y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2$ ou $y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}$

Série d'exercices 4

1. $y = Ce^{3x} - x + \frac{2}{3}$

2. $y = \frac{1}{8}\tan(2x + C) - \frac{x}{4}$

3. $x - 2y - 1 = e^{2y-x}(x-1)$

4. $y^2 = C(2xy + 1)$

Série d'exercices 5

1. $y = x^2 + \frac{C}{x}$

2. $y = x^2 + \frac{C}{x^2}$

3. $y = -\frac{1}{2}\cos 2x \cos x - \sin x + C\cos x$

Autre forme possible : $y = \sin^2 x \cos x - \sin x + C\cos x$

4. $y = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$

5. $y = t^5 - t^4 + Ct^2 - \frac{t^2}{2}\cos(2t)$

6. $y = \frac{24}{37}e^{x/2} - \frac{24}{37}\cos(3x) - \frac{4}{37}\sin(3x)$

7. $x = Ce^{-2y} - e^{-y}$

Série d'exercices 6

1. $y=\dfrac{1}{x^3+Cx^4}$

2. $y=\sqrt[3]{Ce^{15x}-\dfrac{3}{17}e^{-2x}}$

3. $y=\dfrac{1}{x^2\sin x+Cx^2}$

4. $y=\dfrac{1}{x^2+Cx-x^2\ln x}$

5. $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4-4x-5e^{-x}}}$

6. $y=\dfrac{1}{9}\left(x^2-2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)$

Série d'exercices 7

1. $x^2y-3x^3+y^2+y=C$

2. $x^2y^2+4x-6y=C$

3. $y=\dfrac{t^2-25}{\ln\left(t^2+1\right)-2}$

4. $y^2e^{3xy}-x=1$

Série d'exercices 8

1. $y=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x^3}{4}$ (Exacte ou linéaire)

2. $y^2=\dfrac{x^2}{6}+Cx^{-2/5}$ (Homogène ou Bernoulli)

3. $y=\dfrac{e^x+C}{\cos x}$ (Exacte ou linéaire)

4. $y^2=Cx^2-2x$ (Bernoulli)

5. $y=\arccos\left(Cx\right)$ (Variables séparables)

6. $y=\dfrac{2}{1+Cx^2}$ (Bernoulli)

7. $2xy-3x+\dfrac{y^2}{2}+y=C$ (Exacte)

8. $y=\dfrac{x^3}{3}+x+C$ (Variables sép.)

9. $y=Cx-x\cos x$ (Linéaire)

10. $y^2=\dfrac{4x^4}{x^8+C}$ (Bernoulli)

11. $y=e^{-3t}\left(t+C\right)$ (Linéaire)

12. $t+2y+4\ln\left(t+y-3\right)=C$ (Forme $Ax+By$)

13. $y=-x\ln\left(\ln\left(\dfrac{C}{x}\right)\right)$ (Homogène)

14. $x^3y^2+x\sin y=C$ (Exacte)

15. $q = 2 + C\sqrt{1+2p}$ (Variables sép.)

16. $u = -\frac{1}{2}\ln\left(C - \frac{2}{3}e^{3v}\right)$ (Variables sép.)

Série d'exercices 9

1. 15h54

2. 34,54 °C

3. 49,93 kPa

4. 1,405 x 10^{-6} kg/m³

5. a) 1218 m b) 609 m/s

6. 12,64 m/s

7. 99e jour d'apprentissage

8. 444,4 g

9. 11h23

10. $y = a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$

11. a) 1,613 g b) 4,598 g c) 7,398 g

12. a) 75,3 kg b) 62,4 kg

13. 123,24 h

Série d'exercices 10

1. $y = \ln|x| + c$

2. $y = cx^2$

3. $y^2 = c - 2x$

4. $y = \frac{c}{x}$

5. $y = cx$

6. $2x^2 + y^2 = c$

Série d'exercices 11

1. $y = \frac{x^2}{2} + C$ et $y = Ce^{2x}$

2. $y = e^x + C$ et $y = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

3. $x^2 + y^2 = C$ et $y = \frac{x^2}{2} + C$

4. $y = Ce^{-\frac{1}{x}}$ et $y = \frac{x^2}{2} + C$

5. $y = Cx + C^3 + 1$

6. $y = \left(x^{2/3} + C\right)^{3/2} + 1$

7. $y = \cosh\left(x + C\right)$

8. $y = Cx + \frac{1}{C^2}$

9. $y = Cx - C^2$

Série d'exercices 12

1. $y = 6x^2 + C_1x + C_2$

2. $y = 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2$

3. $y = \sinh x + C_1x + C_2$

4. $y = C_1 \sin\left(3x + C_2\right)$

5. $y = C_1 \sinh\left(3x + C_2\right)$

6. $C_1y^2 = \left(C_1x + C_2\right)^2 + 1$

7. $y = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{x-3}\right)$

8. $y = -x^2 \sin x + 2\sin x - 2x\cos x + C_1x^3 + C_2$

9. $y = C_1x^2 - x + C_2$

10. $y = -\dfrac{x^2}{2} + C_1\left(x-1\right)e^x + C_2$

11. $y = \frac{8}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2$

12. $y^2 = 4x - x^2$

13. $y = \tan\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

14. $y = \dfrac{2}{5-4x}$

15. $y = C_1 \sinh^2\left(x + C_2\right)$

Série d'exercices 13

1. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

2. $y = e^{3x}\left(C_1x + C_2\right)$

3. $y = e^x\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$

4. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

5. $y = C_1e^{-x/2} + C_2e^{x/4}$

6. $y = e^{-3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right)$

7. $y = e^{-2x}\left(\cos x + 4\sin x\right)$

8. $y = 2 - e^x$

Série d'exercices 14

1. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x^2 - x + 2$

2. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$

3. $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - e^{2x}$

4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$

5. $y = e^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^x \left(3x + 9\right)$

6. $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + 2e^x + \frac{1}{17}\sin\left(2x\right) - \frac{4}{17}\cos\left(2x\right)$

7. $y = \cos 5x + \sin 5x - 2x\cos 5x$

8. $y = e^x\left(-3x + 2\right) + 2x^2$

Série d'exercices 15

1. $388{,}43\ m$

2. $4{,}4249\ m$

3. $x = \dfrac{40cm}{3} e^{-\frac{5}{2s}t} - \dfrac{10cm}{3} e^{-10\frac{1}{s}t}$

4. $x = \left(50\tfrac{cm}{s} \cdot t + 10cm\right) e^{-5\frac{1}{s}t}$

5. 0,43617 s

6. 16,67 s

7. 166 renards, 852 lapins