5. Les intégrales multiples

1. Les intégrales partielles

L'intégrale partielle est l'opération inverse de la dérivée partielle. Dans une intégrale partielle par rapport à x, on considère que les autres variables sont des constantes.

Autrement dit, si on a l'intégrale suivante,

$$\int f(x, y)\,dx = F(x, y) + k(y)$$

alors on doit avoir

$$\frac{\partial\big(F(x, y) + k(y)\big)}{\partial x} = f(x, y)$$

On voit que la constante d'intégration peut dépendre de y, car la dérivée partielle par rapport à x élimine cette constante même s'il y a des y dans la constante.

On peut intégrer plusieurs fois de suite par rapport à différentes variables. Par exemple, dans l'exemple suivant, on intègre par rapport à x puis par rapport à y.

$$\underbrace{\int \underbrace{\int f(x, y)\,dx}_{\text{1re intégrale}}\,dy}_{\text{2e intégrale}}$$

La première intégrale est celle qui est la plus près de la fonction et la deuxième intégrale est celle qui est la plus loin de la fonction. Dans cet autre exemple, on intègre en premier par rapport à y et ensuite par rapport à x.

$$\underbrace{\int \underbrace{\int f(x, y)\,dy}_{\text{1re intégrale}}\,dx}_{\text{2e intégrale}}$$

Pour les intégrales, l'ordre d'intégration est souvent important. On peut changer l'ordre, mais cela changera les bornes d'intégration.

La gestion des constantes d'intégration qui dépendent des autres variables considérées constantes peut vraiment être pénible. C'est pourquoi, dans ce chapitre, on va toujours travailler avec des intégrales bornées. Dans ce cas, les constantes d'intégrations s'annulent toujours et on n'a pas besoin de s'en occuper. L'exemple suivant montre cela.

Exemple

Calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 \int_1^2 xy\, dxdy$$

Cette intégrale est

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_1^2 xy\, dxdy &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} + k(y) \right]_1^2 dy \\
&= \int_0^1 \left[\left(\frac{4y}{2} + k(y) \right) - \left(\frac{y}{2} + k(y) \right) \right] dy \\
&= \int_0^1 \frac{3y}{2} dy \\
&= \left[\frac{3y^2}{4} + C(x) \right]_0^1 \\
&= \left(\frac{3 \cdot 1^2}{4} + C(x) \right) - \left(0 + C(x) \right) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

____

On voit que les constantes s'annulent pour chaque intégrale. Sachant cela, nous ne les écrirons plus.

Par contre, on pourrait avoir des bornes qui dépendent des variables qui seront intégrées plus tard. Par exemple, les bornes d'une première intégrale par rapport à x pourraient dépendre de y si on intègre par rapport à y par la suite.

Exemple

Calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 \int_y^{y+1} x^2 y\, dxdy$$

Cette intégrale est

$$\int_0^1 \int_y^{y+1} x^2 y\, dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^3 y}{3} \right]_y^{y+1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\left[\frac{(y+1)^3 y}{3} \right] - \left[\frac{y^3 y}{3} \right] \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^4}{3} + \frac{3y^3}{3} + \frac{3y^2}{3} + \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(y^3 + y^2 + \frac{y}{3} \right) dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{6} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{4}$$

On pourrait avoir plus de 2 variables. Dans l'exemple suivant, on va intégrer par rapport à z, puis à y, puis à x. Notez que les bornes de la première intégrale peuvent dépendre de y et x et que les bornes de la deuxième intégrale peuvent dépendre de x.

Exemple

Calculer la valeur de l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} xyz \, dzdydx$$

Cette intégrale est

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} xyz \, dzdydx = \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{xyz^2}{2} \right]_0^{x+y} dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \left(\frac{xy(x+y)^2}{2} \right) dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \left(\frac{x^3 y}{2} + x^2 y^2 + \frac{xy^3}{2} \right) dydx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3 y^2}{4} + \frac{x^2 y^3}{3} + \frac{xy^4}{8} \right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^5}{4} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{8} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{17x^5}{24} \right) dx$$

$$= \left[\frac{17x^6}{144} \right]_0^1$$

$$= \frac{17}{144}$$

SÉRIE D'EXERCICES 1

Calculer la valeur des intégrales suivantes.

1. $\int_0^2 \int_{-1}^3 xydxdy$

2. $\int_{-1}^1 \int_{-y}^y \left(2x^2 + 3y\right) dxdy$

3. $\int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin x}{x} dydx$

4. $\int_0^4 \int_0^y x\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

5. $\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x^2} \left(x^2 + y^2\right) dydx$

6. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos y} x^3 \sin ydxdy$

7. $\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dydx$

8. $\int_0^1 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dxdy$

9. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} 182xy^2z^3 dzdydx$

10. $\int_0^1 \int_0^{2z^2} \int_y^z (4x - 2y - z) dxdydz$

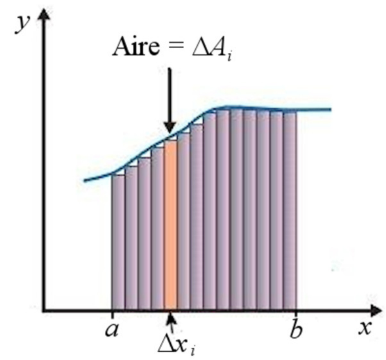
2. *Intégrale double : une somme d'éléments infinitésimaux en deux dimensions*

Théorème fondamental du calcul intégral

Ce théorème dit qu'une somme infinie d'éléments infiniment petits revient à faire l'intégrale de la fonction et que cette intégrale est l'opération inverse de la dérivée. On ne va pas faire une preuve formelle de cela, mais on va voir que c'est ce qu'on a si on calcule l'aire sous une courbe.

On se rappelle que l'intégrale simple donne l'aire sous une courbe. On calcule l'aire à partir de $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Pour calculer cette aire, on va séparer cette aire en rectangle.



www.tutorvista.com/content/physics/physics-iii/work-energy-power/work-expression.php

L'aire sous la courbe est la somme des aires des rectangles. On numérote tous ces rectangles de 1 à N. L'aire d'un rectangle (numéroté i) est

$$\Delta A_i \approx hauteur \cdot \Delta x_i$$

Comme la hauteur du rectangle est égale à la valeur de la fonction, on a

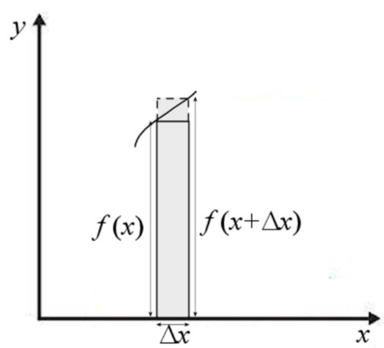
$$\Delta A_i \approx f\left(x_i\right) \cdot \Delta x_i$$

En sommant l'aire de tous ces rectangles, on obtient approximativement l'aire sous la courbe.

$$A \approx \sum_{i=1}^{N} f\left(x_i\right) \Delta x_i$$

Plus les rectangles sont minces, plus l'approximation est meilleure. Si on fait tendre la largeur des rectangles vers 0, l'aire calculée devient exacte. Notez que si on fait tendre la largeur des rectangles vers 0, le nombre de rectangles tend vers l'infini. On obtient alors

$$A = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} f\left(x_i\right) \Delta x_i$$



On va maintenant montrer qu'on peut calculer cette somme avec une intégrale. Si on prend un seul des rectangles, on voit que l'aire sous la courbe a une valeur entre l'aire du rectangle le plus petit (le dessus de ce rectangle est une ligne pleine) et l'aire du grand rectangle (le dessus de ce rectangle est en pointillé). On a donc

$$f(x)\Delta x \leq \Delta A \leq f(x+\Delta x)\Delta x$$

En divisant par Δx, on obtient

$$f(x) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x+\Delta x)$$

Si on fait la limite quand le rectangle est infiniment mince (donc quand Δx tend vers 0), on a

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$
$$f(x) \leq \frac{dA}{dx} \leq f(x)$$

Cela signifie donc que

$$\frac{dA}{dx} = f(x)$$

Si on définit l'intégrale comme l'opération inverse de la dérivée, on a

$$A = \int f(x)dx$$

En combinant les deux résultats obtenus, on arrive à

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ce résultat est le théorème fondamental du calcul intégral. Il dit qu'une somme infinie d'éléments infinitésimaux s'obtient en faisant l'intégrale, qui est l'opération inverse de la dérivée.

Somme infinie sur une surface

Voyons ce que devient ce résultat avec une intégrale double. Prenons un exemple pour que le raisonnement soit plus facile à suivre. Imaginons qu'on cherche à calculer la masse d'une plaque.

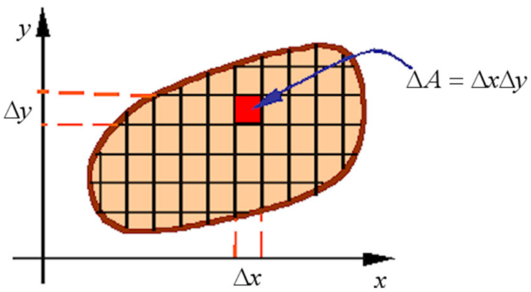
Avec une plaque, on travaille avec la masse surfacique de la plaque. Cette masse surfacique σ est en kg/m² (dans le système international) et donne la masse de 1 m² de plaque.

Par exemple, on pourrait demander la masse d'une plaque de 5 m² ayant une masse surfacique de 4 kg/m². La masse de la plaque serait simplement

$$\begin{aligned} m &= \sigma A \\ &= 4\tfrac{kg}{m^2} \cdot 5m^2 \\ &= 20kg \end{aligned}$$

On voit que c'est assez facile de trouver la masse de la plaque si la masse surfacique est constante.

Imaginons maintenant que la masse surfacique varie d'un endroit à l'autre sur la plaque. Dans ce cas, on devra séparer la plaque en petits morceaux.



emweb.unl.edu/Math/mathweb/calculus/calcsb97.html

La masse d'un petit morceau d'aire ΔA.

$$m_i \approx \sigma \Delta A_i$$

(Il s'agit d'une approximation puisqu'on suppose que la masse surfacique est constante partout sur le petit morceau.)

On somme ensuite la masse de tous ces morceaux pour obtenir la masse totale.

$$m \approx \sum_{i=1}^{N} \sigma(x_i, y_i) \Delta A_i$$

Si on prend de trop gros morceaux, la masse sera seulement une approximation de la véritable masse. Pour que l'approximation soit la meilleure possible, on doit prendre de très petits morceaux. On obtiendra exactement la masse si la largeur et la hauteur des morceaux tend vers 0. On a alors

$$m = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta A_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \sigma(x_i, y_i) \Delta A_i$$

Or, le théorème fondamental nous dit que cette somme d'infinitésimaux est égale à l'intégrale de la fonction

$$m = \iint_{surface} \sigma dA$$

Ainsi, l'intégrale de la masse surfacique sur toute la surface de la plaque nous donnera la masse de la plaque.

C'est une intégrale double puisque l'aire est en fait (en coordonnées cartésiennes)

$$dA = dxdy \quad \text{ou} \quad dA = dydx$$

La masse est donc

$$m = \iint\limits_{surface} \sigma dxdy \quad \text{ou} \quad m = \iint\limits_{surface} \sigma dydx$$

Toutefois, il manque un détail important pour pouvoir faire cette intégrale : quelles bornes doit-on utiliser pour être certain de sommer tous les petits morceaux sur toute la surface de la plaque.

3. Bornes des intégrales doubles

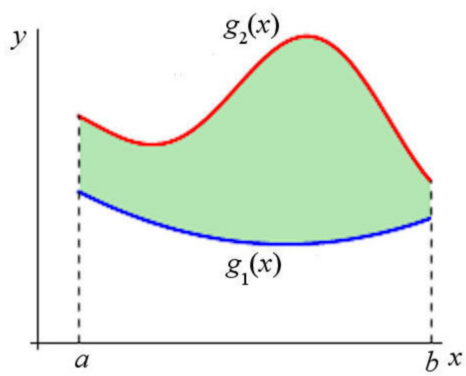
Pour les intégrales simples, les bornes sont plutôt faciles à trouver. Si on veut calculer l'aire sous une courbe entre x = 1 et x = 2, on couvre toute l'aire en prenant 1 et 2 comme bornes de l'intégrale.

Ça se complique un peu en deux dimensions.

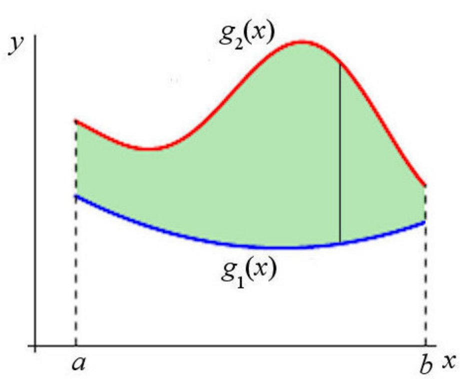
Notons premièrement qu'on a le choix de commencer l'intégrale double par l'intégrale en x ou par l'intégrale en y. Peu importe le choix qu'on fait, on aura le même résultat. (C'est le théorème de Fubini, qu'on ne prouvera pas.)

<u>Intégrale en y en premier</u>

Dans notre exemple, cela revient à dire qu'on va additionner les masses de tous les rectangles le long d'une ligne parallèle à l'axe des y. Supposons que notre surface est délimitée par les courbes suivantes.



tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/DIGeneralRegion.aspx



En additionnant tous les petits rectangles dans le sens des y à une certaine position x, on trace en fait une ligne dans le sens des y sur cette surface. Par exemple, on peut voir une de ces lignes sur la figure de gauche.

Pour trouver les bornes, il faut simplement regarder où commence cette ligne et où se termine cette ligne. Comme elle commence toujours à la fonction

$g_1(x)$ et qu'elle se termine toujours à la fonction $g_2(x)$, peu importe la position en x de la ligne, alors ces fonctions sont les bornes de l'intégrale en y. On a alors

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sigma dy$$

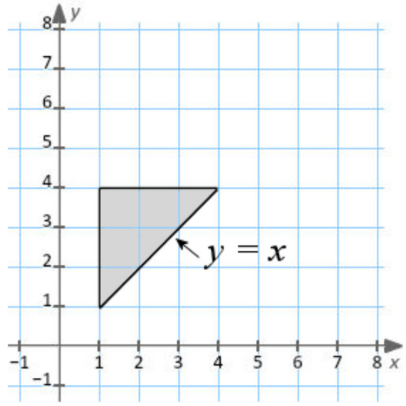
Pour l'instant, cette intégrale donne la masse d'une mince bande verticale de largeur dx sur la surface. Pour avoir la masse totale, il faut ensuite sommer la masse de toutes ces bandes.

Pour y arriver, on additionne la masse de toutes les petites bandes en commençant par la première ligne à $x = a$ et en terminant à la dernière ligne à $x = b$. En additionnant toutes ces lignes, on va couvrir toute la surface. L'intégrale finale est donc

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \sigma dydx$$

Exemple

Calculer la masse de la plaque ayant la forme montrée sur la figure si sa masse surfacique est donnée par la fonction suivante.



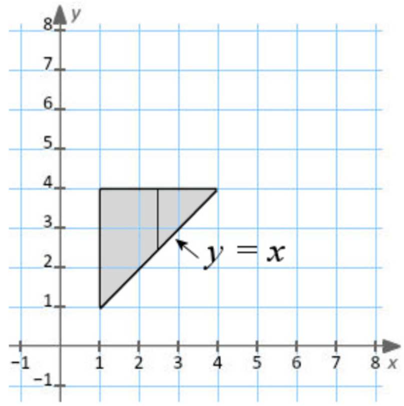
$$\sigma = x + 4y + 2$$

(On va laisser tomber les unités dans cette section, mais on va les mettre dans les prochaines sections.)

L'intégrale à résoudre est

$$M = \iint (x + 4y + 2) dydx$$

Ici, on va intégrer en y en premier. Pour trouver les bornes, on trace une ligne dans le sens des y et on trouve les équations des fonctions qui marquent le début et la fin de cette ligne.



Ici, cette ligne commence à $y = x$ et se termine à $y = 4$. Ce sont nos bornes pour la première intégrale.

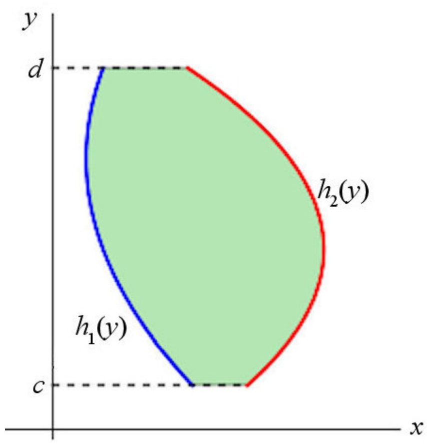
Ensuite, on examine où doivent être la première et la dernière ligne. Pour couvrir toute la surface, la première ligne doit être à $x = 1$ et la dernière ligne doit être à $x = 4$. Ce sont nos bornes pour la deuxième intégrale.

On a donc

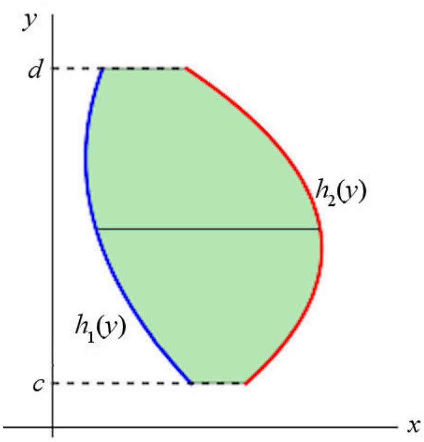
$$
\begin{aligned}
\int_1^4 \int_x^4 (x+4y+2)\,dydx &= \int_1^4 \left[xy+2y^2+2y \right]_x^4 dx \\
&= \int_1^4 \left([4x+32+8] - \left[x^2+2x^2+2x \right] \right) dx \\
&= \int_1^4 \left([4x+40] - \left[3x^2+2x \right] \right) dx \\
&= \int_1^4 \left(-3x^2+2x+40 \right) dx \\
&= \left[-x^3+x^2+40x \right]_1^4 \\
&= (-64+16+160)-(-1+1+40) \\
&= 72
\end{aligned}
$$

Intégrale en x en premier

Dans notre exemple, cela revient à dire qu'on va additionner les masses de tous les petits rectangles le long d'une ligne parallèle à l'axe des x. Supposons que notre surface est délimitée par les courbes montrées sur la figure de droite.



tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/DIGeneralRegion.aspx



En additionnant tous les petits rectangles dans le sens des x à une certaine position y, on trace en fait une ligne dans le sens des x sur cette surface. Par exemple, on peut voir une de ces lignes sur la figure de gauche.

Pour trouver les bornes, il faut simplement regarder où commence cette ligne et où se termine cette ligne. Comme elle commence toujours à la fonction $h_1(y)$ et qu'elle se termine toujours à la fonction $h_2(y)$, peu importe la position en y de la ligne, alors ces fonctions sont les bornes de l'intégrale en x. On a alors

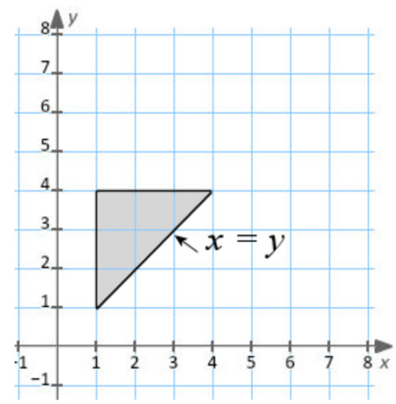
$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \sigma dx$$

Pour l'instant, cette intégrale donne la masse d'une mince bande verticale de largeur dy sur la surface. Pour avoir la masse totale, il faut ensuite sommer la masse de toutes ces bandes.

Pour y arriver, on additionne la masse de toutes les petites bandes en commençant par la première ligne à $y = c$ et en terminant à la dernière ligne à $y = d$. En additionnant toutes ces lignes, on va couvrir toute la surface. L'intégrale finale est donc

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \sigma dxdy$$

Exemple

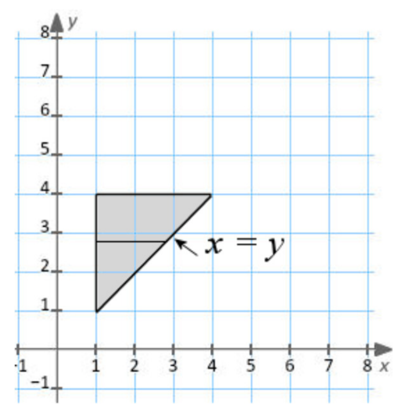


Calculer la masse de la plaque ayant la forme montrée sur la figure si sa masse surfacique est donnée par

$$\sigma = x + 4y + 2$$

L'intégrale à résoudre est

$$\iint (x + 4y + 2) dydx$$



Ici, on va intégrer en x en premier. Pour trouver les bornes, on trace une ligne dans le sens des x et on trouve les équations des fonctions qui marquent le début et la fin de cette ligne.

Ici, cette ligne commence à $x = 1$ et se termine à $x = y$. Ce sont nos bornes pour la première intégrale.

Ensuite, on examine où doivent être la première et la dernière ligne. Pour couvrir toute la surface, la première ligne doit être à $y = 1$ et la dernière ligne doit être à $y = 4$. Ce sont nos bornes pour la deuxième intégrale.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_1^4 \int_1^y (x + 4y + 2) dxdy &= \int_1^4 \left[\frac{x^2}{2} + 4xy + 2x \right]_1^y dy \\ &= \int_1^4 \left(\left[\frac{y^2}{2} + 4y^2 + 2y \right] - \left[\frac{1}{2} + 4y + 2 \right] \right) dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^4 \left(\frac{9y^2}{2} - 2y - \frac{5}{2} \right) dy \\
&= \left[\frac{3y^3}{2} - y^2 - \frac{5y}{2} \right]_1^4 \\
&= (96 - 16 - 10) - \left(\tfrac{3}{2} - 1 - \tfrac{5}{2} \right) \\
&= 72
\end{aligned}
$$

Pour n'importe quelle intégrale double, on peut donc choisir d'intégrer en x en premier ou d'intégrer en y en premier. On va donc faire calculer quelques exemples en se rappelant que, selon la variable qu'on intègre en premier, on a

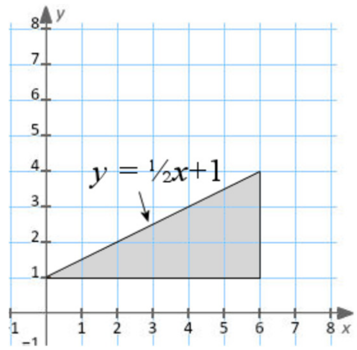
Élément d'aire en coordonnées cartésiennes

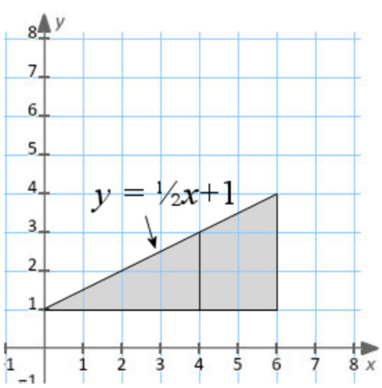
$$dA = dxdy \qquad \text{ou} \qquad dA = dydx$$

Exemple

Calculer l'intégrale suivante dans la région montrée sur la figure.

$$\iint (x+y)dA$$





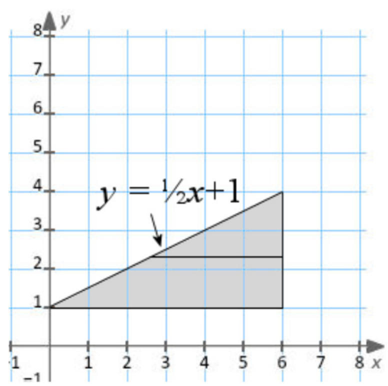
Commençons par intégrer en y en premier. Pour trouver les bornes, on trace une ligne dans le sens des y et on trouve les équations des fonctions qui marquent le début et la fin de cette ligne.

Ici, cette ligne commence à $y = 1$ et se termine à $y = ½x + 1$. Ce sont nos bornes pour la première intégrale.

Ensuite, on examine où doivent être la première et la dernière ligne. Pour couvrir toute la surface, la première ligne doit être à $x = 0$ et la dernière ligne doit être à $x = 6$. Ce sont nos bornes pour la deuxième intégrale.

On a donc

$$\int_0^6\int_1^{\frac{1}{2}x+1}(x+y)\,dydx=\int_0^6\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^{\frac{1}{2}x+1}dx$$
$$=\int_0^6\left(\left[x\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)+\frac{\left(\tfrac{1}{2}x+1\right)^2}{2}\right]-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right)dx$$
$$=\int_0^6\left(\left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right)dx$$
$$=\int_0^6\left(\frac{5x^2}{8}+\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{5x^3}{24}+\frac{x^2}{4}\right]_0^6$$
$$=54$$



On va maintenant intégrer en x en premier. Pour trouver les bornes, on trace une ligne dans le sens des x et on trouve les équations des fonctions qui marquent le début et la fin de cette ligne.

Ici, cette ligne commence à $y = ½x + 1$ et se termine à $y = 6$. Si on isole x dans cette équation (puisqu'il faut x en fonction de y) on arrive à $x = 2y - 2$. Nos bornes pour la première intégrale sont donc $2y - 2$ et 6.

Ensuite, on examine où doivent être la première et la dernière ligne. Pour couvrir toute la surface, la première ligne doit être à $x = 1$ et la dernière ligne doit être à $x = 4$. Ce sont nos bornes pour la deuxième intégrale.

On a donc

$$\int_1^4\int_{2y-2}^6(x+y)\,dxdy=\int_1^4\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{2y-2}^6dy$$
$$=\int_1^4\left([18+6y]-\left[\frac{(2y-2)^2}{2}+(2y-2)\,y\right]\right)dy$$
$$=\int_1^4\left([18+6y]-\left[2y^2-4y+2+2y^2-2y\right]\right)dy$$
$$=\int_1^4\left(-4y^2+12y+16\right)dy$$

$$= \left[-\frac{4y^3}{3} + 6y^2 + 16y \right]_1^4$$

$$= \left[-\frac{256}{3} + 96 + 64 \right] - \left[-\frac{4}{3} + 6 + 16 \right]$$

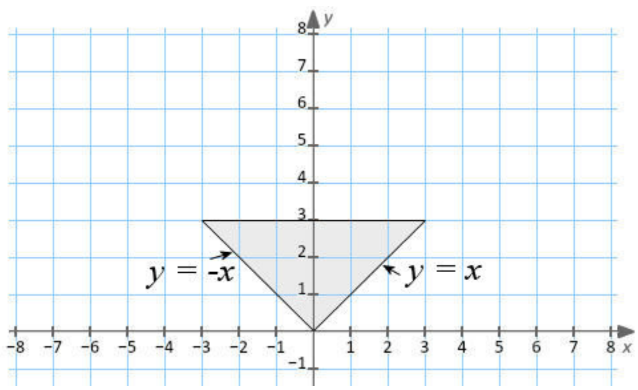
$$= 54$$

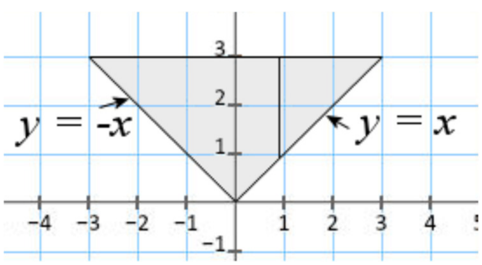
On a toujours le choix de commencer par l'intégrale en x ou en y, mais un des choix est parfois plus simple. Voici un exemple dans lequel le calcul est un peu plus long si on commence par l'intégrale en y.

Exemple

Calculer l'intégrale suivante dans la région montrée sur la figure.

$$\iint dA$$





Regardons ce qui arrive si on commence par intégrer en y en premier. Pour trouver les bornes, on trace une ligne dans le sens des y et on trouve les équations des fonctions qui marquent le début et la fin de cette ligne. Ici, on a un problème. La limite supérieure est toujours y = 3, mais on change de fonction pour la limite inférieure. Pour la partie de gauche, la limite inférieure est $y = -x$ et dans la partie de droite, la limite inférieure est $y = x$. Quand cela se produit, il faut séparer l'intégrale en deux intégrales.

La première intégrale couvrira la partie gauche de la région. Pour cette partie, la ligne en y va de $y = -x$ à $y = 3$. Pour couvrir toute cette surface la première ligne est à $x = -3$ et la dernière est à x = 0. Cette première intégrale est donc

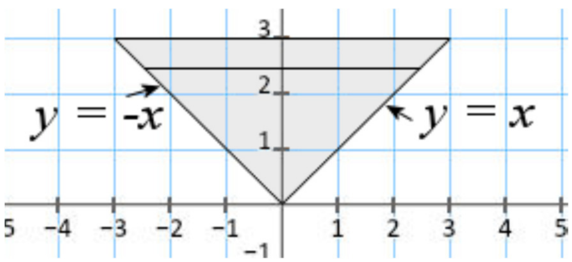
$$\int_{-3}^{0}\int_{-x}^{3} dydx$$

La deuxième intégrale couvrira la partie droite de la région. Pour cette partie, la ligne en y va de $y = x$ à $y = 3$. Pour couvrir toute cette surface la première ligne est à x = 0 et la dernière est à $x = 3$. Cette deuxième intégrale est donc

$$\int_0^3 \int_x^3 dydx$$

Notre intégrale est la somme de ces deux intégrales.

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^0 \int_{-x}^3 dydx + \int_0^3 \int_x^3 dydx &= \int_{-3}^0 [y]_{-x}^3 dx + \int_0^3 [y]_x^3 dx \\
&= \int_{-3}^0 (3+x)\,dx + \int_0^3 (3-x)\,dx \\
&= \left[3x + \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^0 + \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 \\
&= \left([0] - \left[-9 + \frac{9}{2}\right]\right) + \left(\left[9 - \frac{9}{2}\right] - [0]\right) \\
&= 9
\end{aligned}$$



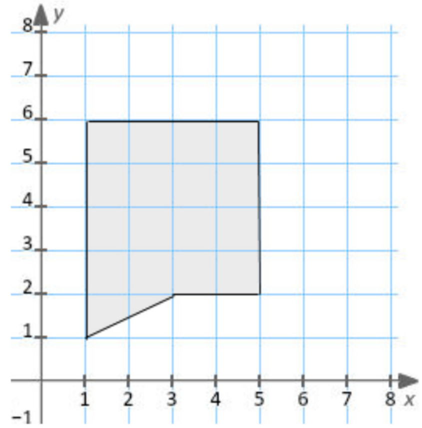
Regardons maintenant ce qui arrive si on commence par intégrer en x en premier. Pour trouver les bornes, on trace une ligne dans le sens des x et on trouve les équations des fonctions qui marquent le début et la fin de cette ligne. La limite inférieure est toujours à x = -y et la limite supérieure est toujours à $x = y$. Il n'y a jamais de changement de fonction, ce qui signifie que ce n'est pas nécessaire de séparer l'intégrale en deux intégrales.

Ensuite, on examine où doivent être la première et la dernière ligne. Pour couvrir toute la surface, la première ligne doit être à y = 0 et la dernière ligne doit être à $y = 3$. Ce sont nos bornes pour la deuxième intégrale.

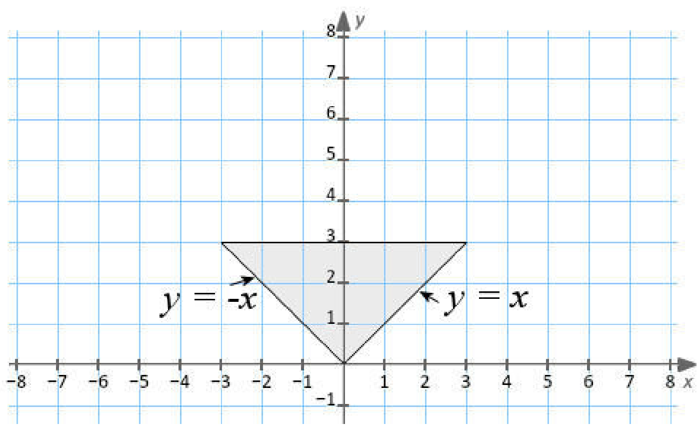
L'intégrale est donc

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_{-y}^y dxdy &= \int_0^3 [x]_{-y}^y dy \\
&= \int_0^3 2ydy \\
&= \left[y^2\right]_0^3 \\
&= 9
\end{aligned}$$

Évidemment, on va souvent préférer l'ordre d'intégration pour laquelle il n'est pas nécessaire de séparer la région d'intégration en plusieurs parties. Notez toutefois qu'il arrive qu'on n'ait pas le choix de séparer la région. Par exemple, il faudra séparer la région suivante peu importe si on commence à intégrer en x ou en y.

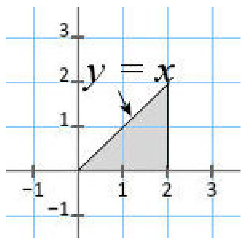


Quand ce sont toujours les mêmes fonctions qui forment les bornes pour une variable, on dit que le domaine d'intégration est régulier pour cette variable. Par exemple, le domaine d'intégration suivant est régulier en x, mais n'est pas régulier en y.



Notez finalement que ce n'est pas toujours la forme du domaine d'intégration qui détermine l'ordre d'intégration. Parfois, l'intégrale est impossible à faire si on commence avec une variable, mais on peut la calculer si on commence par l'autre variable.

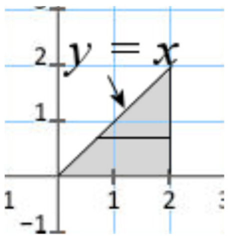
Exemple



Calculer l'intégrale suivante dans la région montrée sur la figure.

$$\iint \frac{\sin x}{x}\, dA$$

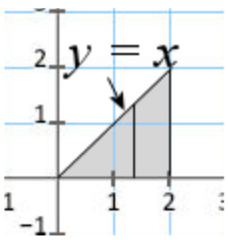
Ici, le domaine d'intégration est régulier en x et en y. Il n'est donc pas nécessaire de séparer le domaine d'intégration en plus petites régions ici.



Si on commence par intégrer en x, la ligne va de $x = y$ à $x = 2$. Pour couvrir toute la région, on somme ensuite les lignes de $y = 0$ à $y = 2$. L'intégrale est donc

$$\int_0^2 \int_y^2 \frac{\sin x}{x} dxdy$$

Mais voilà, notre calcul s'arrête ici puisqu'il n'y a pas de solution simple à cette intégrale.



Toutefois, la situation est différente si on commence en intégrant par y. Dans ce cas, la ligne va de $y = 0$ à $y = x$. Pour couvrir toute la région, on somme ensuite les lignes de $x = 0$ à $x = 2$. L'intégrale est donc

$$\int_0^2 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dydx$$

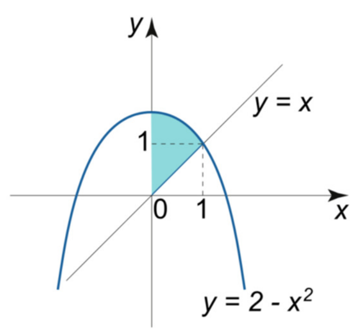
Cette fois, on peut faire l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dydx &= \int_0^2 \left[\frac{\sin x}{x} y \right]_0^x dx \\
&= \int_0^2 \left(\left[\frac{\sin x}{x} x \right] - [0] \right) dx \\
&= \int_0^2 \sin x dx \\
&= [-\cos x]_0^2 \\
&= -\cos 2 + \cos 0 \\
&\approx 1,416
\end{aligned}$$

SÉRIE D'EXERCICES 2

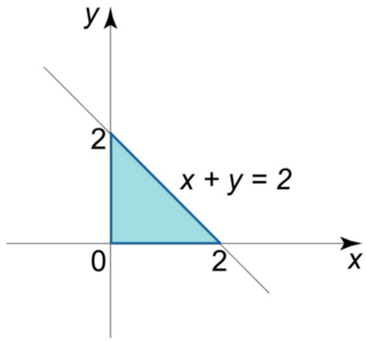
Calculer la valeur des intégrales suivantes. (Rappel $dA = dydx$ ou $dA = dydx$ selon la variable que vous désirez intégrer en premier.)

1. $\iint (x-y) dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



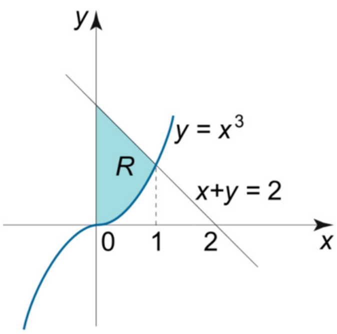
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

2. $\iint (x+y)\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



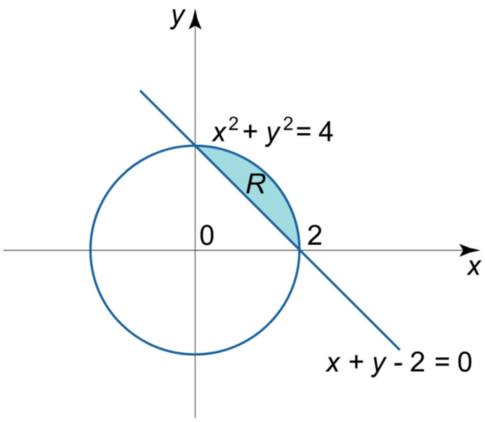
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

3. $\iint x\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



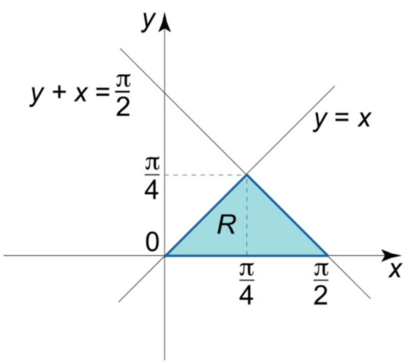
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

4. $\iint x^2 y\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



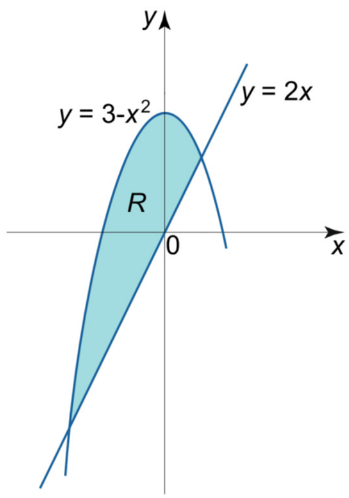
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

5. $\iint \sin(x+y)\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



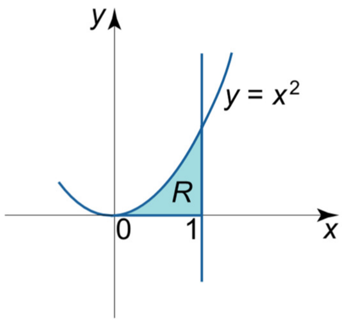
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

6. $\iint y\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



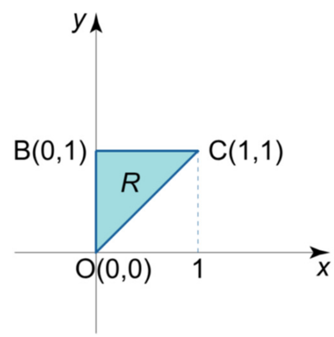
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

7. $\iint x\sin(y)\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



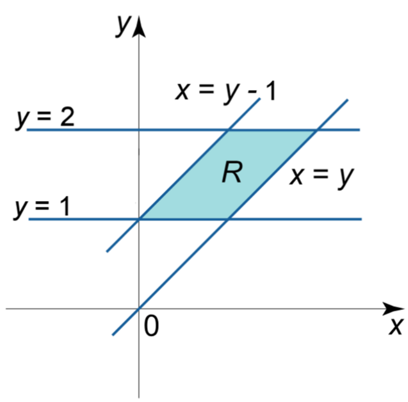
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

8. $\iint e^x\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



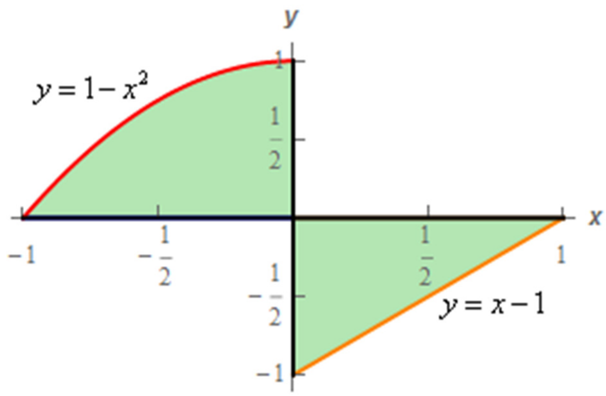
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

9. $\iint (x+y)\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



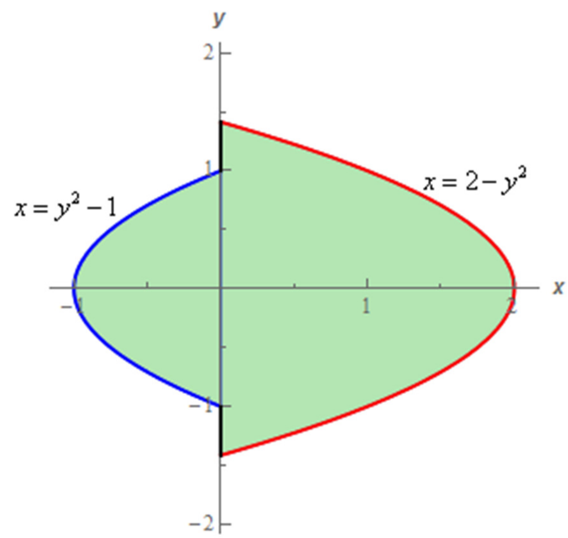
www.math24.net/double-integrals-general-regions/

10. $\iint (12x-3)\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



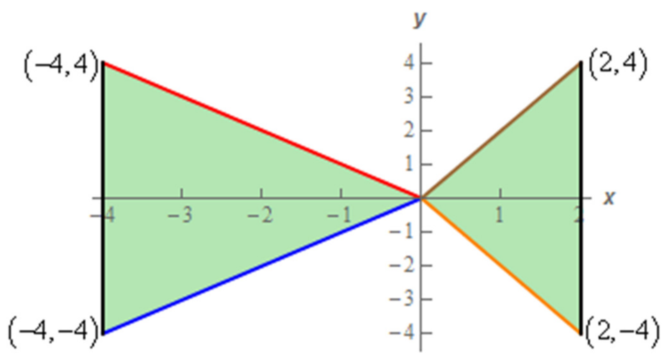
tutorial.math.lamar.edu/ProblemsNS/CalcIII/DIGeneralRegion.aspx

11. $\iint (6y^2 + 10yx^4)\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



tutorial.math.lamar.edu/ProblemsNS/CalcIII/DIGeneralRegion.aspx

12. $\iint (xy - y^2)\,dA$ dans la région d'intégration montrée sur la figure.



tutorial.math.lamar.edu/ProblemsNS/CalcIII/DIGeneralRegion.aspx

13. Que deviendraient ces intégrales si on inversait l'ordre d'intégration ? (Écrivez seulement l'intégrale, ne pas calculer ce qu'elle vaut.)

A) $\int_0^8 \int_{y^{1/3}}^2 \frac{y}{x^7+1}\,dx\,dy$

B) $\int_{-4}^{0}\int_{\sqrt{-x}}^{2} x^{-2/3}\sqrt{y^{5/3}+1}\,dydx$

C) $\int_{0}^{2}\int_{-x}^{3x} \left(5y^2x^3+2\right)dydx$

14. Que vaut cette intégrale $\int_0^1\int_{2x}^2 e^{y^2}\,dydx$?

4. Calcul d'aire avec l'intégrale double

Si on intègre la fonction f = 1, alors on a

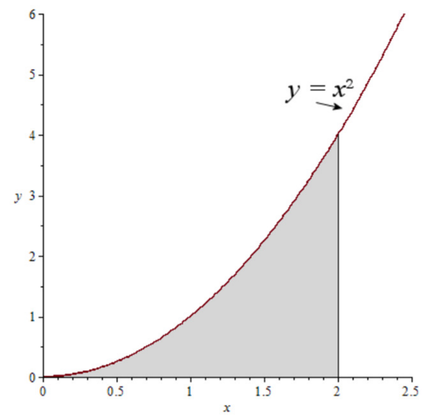
$$\iint dA$$

Cela signifie qu'on somme une infinité de dA. Or, ce dA est une partie infiniment petite de l'aire de la région d'intégration. En sommant toutes ces petites aires formant la région d'intégration, on obtient simplement l'aire de la région d'intégration.

Aire de la région d'intégration

$$\iint dA = \text{Aire de la région d'intégration}$$

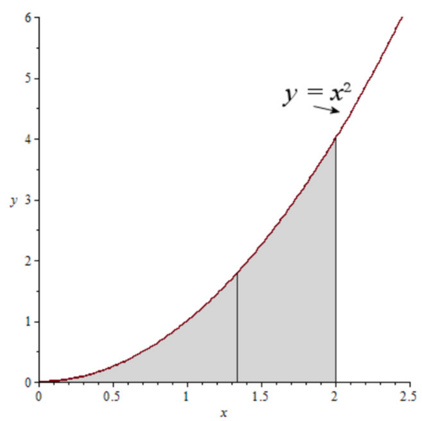
Exemple



Calculer l'aire de la région montrée sur la figure de droite.

L'aire de cette région est

$$A = \iint dA$$



Ici, on choisit d'intégrer en y en premier. La ligne tracée en y ligne va de $y = 0$ à $y = x^2$. Pour couvrir toute la région, on somme ensuite toutes les lignes de $x = 0$ à $x = 2$. L'intégrale est donc

$$\int_0^2\int_0^{x^2} dydx$$

Ainsi, l'aire est

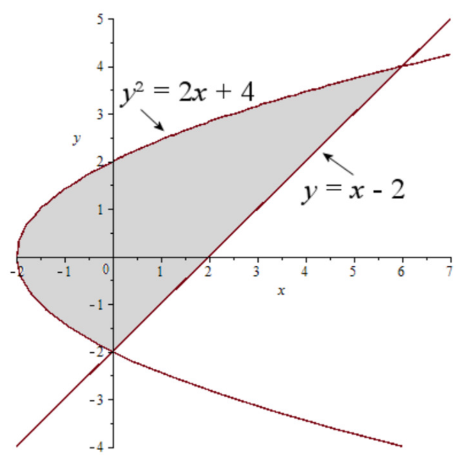
$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \int_0^{x^2} dydx \\ &= \int_0^2 [y]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx \end{aligned}$$

On fait une pause à cette étape pour que vous puissiez réaliser que cette intégrale est l'intégrale que vous auriez écrite dans votre cours de calcul intégral pour calculer cette aire. On peut maintenant continuer.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

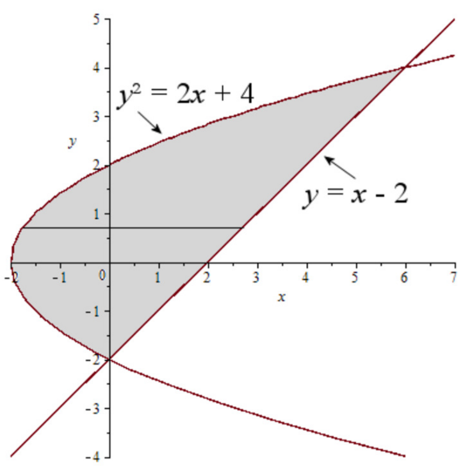
Exemple

Calculer l'aire de la région montrée sur la figure de droite.



L'aire de cette région est

$$A = \iint dA$$



Ici, on choisit d'intégrer en x en premier (parce le domaine est régulier en x). La ligne tracée en x va de $x = (y^2 - 4)/2$ à $x = y + 2$. (Il faut isoler x dans les équations des courbes pour avoir les bornes de x.)

Pour couvrir toute la région, on somme ensuite toutes les lignes. Toutefois. Pour connaitre le début et la fin, il faut trouver les points d'intersection de ces deux courbes.

Aux intersections, on a

$$\begin{aligned}\frac{y^2-4}{2} &= y+2\\ y^2-2y-8&=0\\ (y-4)(y+2)&=0\end{aligned}$$

Il y a donc intersection à y = -2 et y = 4. On somme donc toutes les lignes entre y = -2 et y = 4. Ainsi, l'aire est

$$A=\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2-4}{2}}^{y+2} dxdy$$

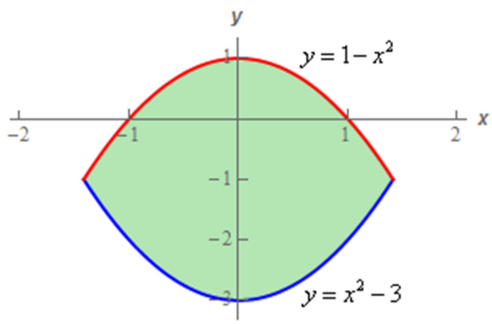
Si on fait cette intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}A&=\int_{-2}^{4}[x]_{\frac{y^2-4}{2}}^{y+2} dy\\ &=\int_{-2}^{4}\left([y+2]-\left[\frac{y^2-4}{2}\right]\right)dy\\ &=\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^2}{2}+y+4\right)dy\\ &=\left[-\frac{y^3}{6}+\frac{y^2}{2}+4y\right]_{-2}^{4}\\ &=\left(\left[-\frac{64}{6}+8+16\right]-\left[-\frac{-8}{6}+2-8\right]\right)\\ &=18\end{aligned}$$

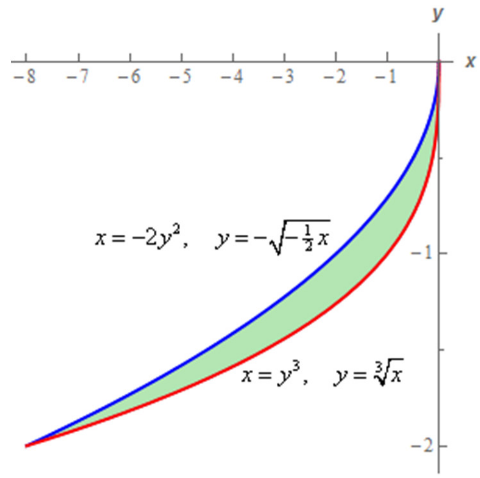
SÉRIE D'EXERCICES 3

Calculer l'aire des régions suivantes.

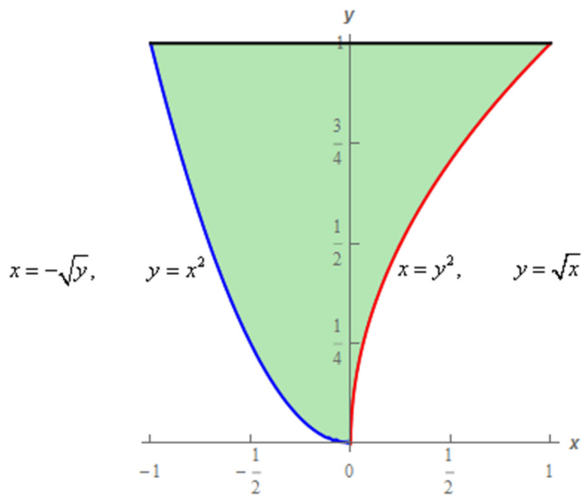
1.



2.



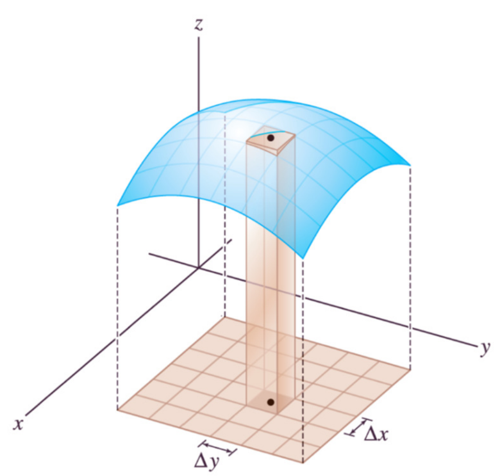
3.



5. *Calcul de volume avec l'intégrale double*

On veut maintenant calculer le volume sous une surface. On se rappelle bien sûr qu'une telle surface est représentée par une fonction de deux variables $f(x,y)$.

Pour calculer le volume, on va séparer ce volume en petits prismes (la colonne sur la figure). Pour calculer le volume de ce prisme, on multiplie l'aire de la base, (ΔA) par la hauteur du prisme, qui est simplement égale à la valeur de la fonction.

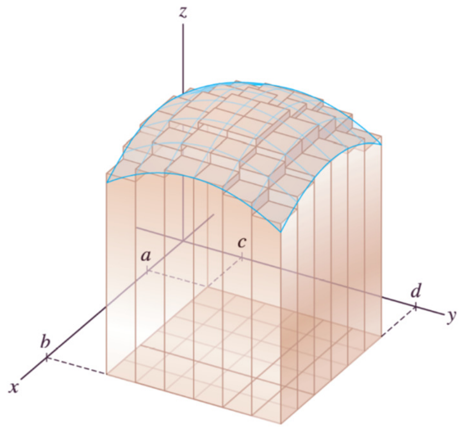


web.maths.unsw.edu.au/~cct/2011Notes/dbl-int-notes-2011-2011.pdf

Pour le rectangle numéro i, le volume est

$$V_i = f\left(x_i, y_i\right)\Delta A_i$$

Ensuite, on va sommer les volumes de tous ces rectangles dans le domaine d'intégration pour obtenir le volume total.

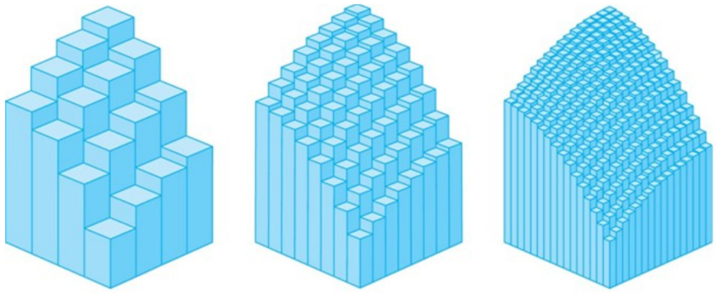


(Ici, le domaine d'intégration est un rectangle dans le plan xy, mais ce pourrait être n'importe quelle forme.)

$$V \approx \sum_{i=1}^{N} f\left(x_i, y_i\right)\Delta A_i$$

Comme on peut le voir sur la figure, ce calcul donne approximativement le volume sous la surface. À certains endroits, les rectangles sont trop courts et n'atteignent pas la surface et il y a des petits bouts sous la surface qui ne sont pas comptés. À d'autres endroits, les rectangles sont trop longs et il y a des petits bouts de rectangle qui dépassent la surface qui sont donc comptés en trop.

Pour améliorer l'approximation, on peut diminuer l'aire de la base des prismes.



slideplayer.com/slide/9376985/

On comprend que l'approximation deviendra exacte avec un nombre infini de prismes dont l'aire de la base est infinitésimale.

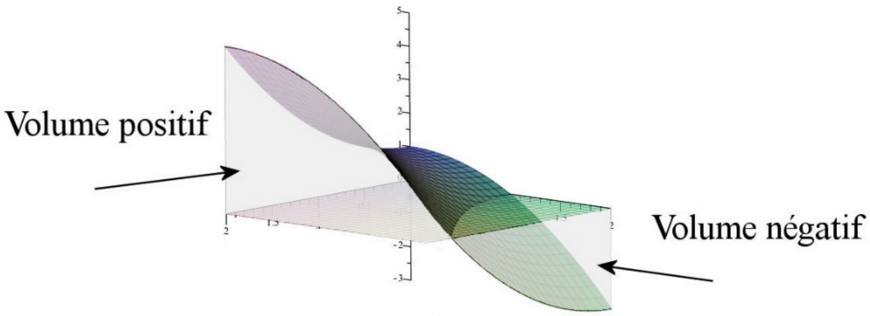
$$V = \lim_{\substack{\Delta A_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} f\left(x_i, y_i\right)\Delta A_i$$

Or, on sait que cette somme infinie d'éléments infinitésimaux est l'intégrale. On arrive donc à la conclusion suivante.

Volume sous la surface décrite par la fonction f

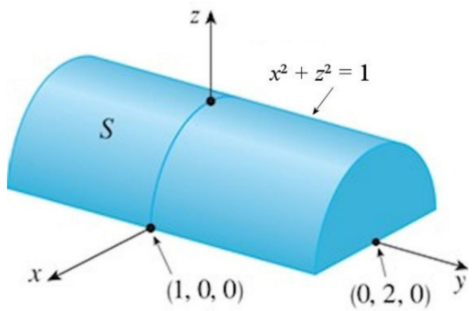
$$V = \iint f dA$$

Attention : si la surface est sous le plan xy, alors le volume est compté comme étant négatif.



Exemple

Calculer le volume de la région montrée sur la figure.



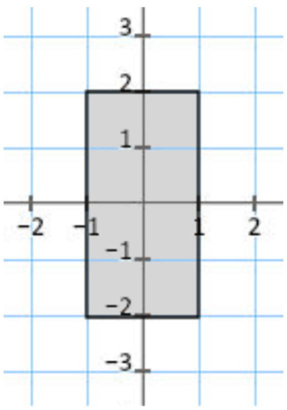
slideplayer.com/slide/9376985/

Tel qu'indiqué sur la figure, la fonction qui représente cette surface S est donnée par

$$z = \sqrt{1-x^2}$$

Le volume de cette région est donc

$$V = \iint \sqrt{1-x^2} dA$$



Il faut maintenant trouver la région d'intégration. Ici, on choisit d'intégrer en y en premier. La zone sous la surface dans le plan xy va de y = -2 à y = 2 en y et de x = -1 à x = 1 en x. Ainsi les bornes sont

De y = -2 à y = 2 en y
De x = -1 à x = 1 en x

Le volume est donc

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\sqrt{1-x^2}\,dydx$$

Si on fait le calcul, on obtient

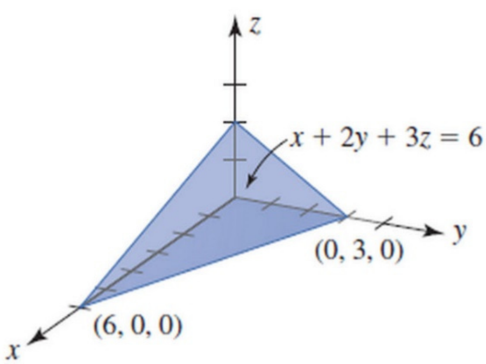
$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}\sqrt{1-x^2}\,dydx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[y\sqrt{1-x^2}\right]_{-2}^{2}dx \\
&= \int_{-1}^{1}4\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \left[2x\sqrt{1-x^2}+2\arcsin(x)\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[0+2\arcsin(1)\right]-\left[0+2\arcsin(-1)\right] \\
&= \left[2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right]-\left[2\cdot\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

(On peut même vérifier cette réponse puisqu'on sait comment calculer le volume de cette région. On a ici un demi-cylindre ayant un rayon de 1 et une longueur de 4. Comme le volume d'un cylindre est $\pi r^2 h$. On a

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\pi r^2 h \\
&= \frac{1}{2}\pi(1)^2\cdot 4 \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer le volume de la région montrée sur la figure.



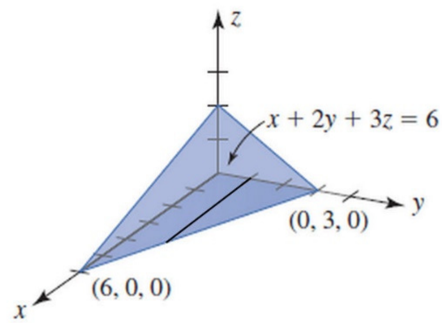
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/use-double-integral-find-volume-solid-shown-figure-q12339639

Le volume de cette région est donné par

$$\begin{aligned}
V &= \iint z\,dA \\
&= \iint\left(\frac{6-x-2y}{3}\right)dA \\
&= \iint\left(2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}\right)dA
\end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver la région d'intégration. La zone sous la surface dans le plan xy est un triangle dans le plan xy (on peut la voir sur la figure, elle est un peu plus foncée). On peut trouver l'équation de l'hypoténuse de ce triangle en mettant z = 0 dans l'équation de la surface. On a alors

$$x+2y=6$$



Voyons ce qu'on obtient si on décide d'intégrer en x en premier. Dans ce cas, une ligne dans le sens des x va de $x = 0$ à l'hypoténuse, donc jusqu'à $x = 6 - 2y$. Ensuite, on somme les lignes en y de $y = 0$ à $y = 3$.

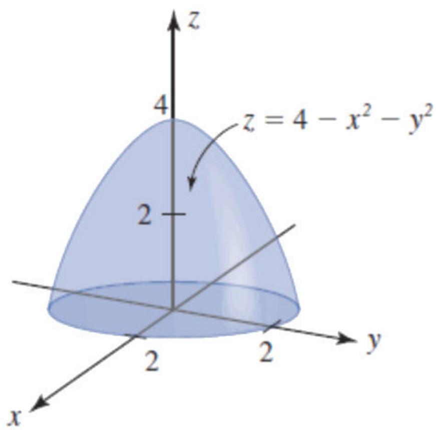
Le volume est donc

$$V=\int_0^3\int_0^{6-2y}\left(2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}\right)dxdy$$

Si on fait le calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^3\left[2x-\frac{x^2}{6}-\frac{2xy}{3}\right]_0^{6-2y}dy\\
&=\int_0^3\left(\left[2(6-2y)-\frac{(6-2y)^2}{6}-\frac{2(6-2y)y}{3}\right]-[0]\right)dy\\
&=\int_0^3\left(\left[12-4y-\frac{36-24y+4y^2}{6}-\frac{12y-4y^2}{3}\right]-[0]\right)dy\\
&=\int_0^3\left(6-4y+\frac{2y^2}{3}\right)dy\\
&=\left[6y-2y^2+\frac{2y^3}{9}\right]_0^3\\
&=(18-18+6)\\
&=6
\end{aligned}$$

Exemple



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/use-double-integral-find-volume-solid-shown-figure-cu-units-q21042991

Calculer le volume de la région montrée sur la figure.

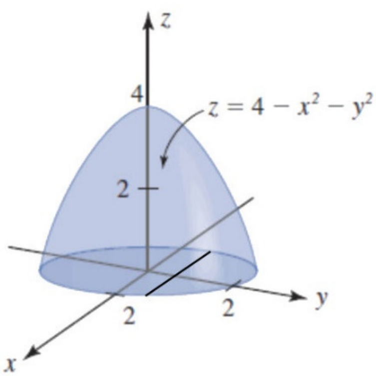
Le volume de cette région est donné par

$$\begin{aligned} V &= \iint z dA \\ &= \iint \left(4 - x^2 - y^2\right) dA \end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver la région d'intégration. La zone sous la surface dans le plan xy est un cercle dans le plan xy (on peut la voir sur la figure, elle est un peu plus foncée). On peut trouver l'équation de ce cercle en mettant $z = 0$ dans l'équation de la surface. On a alors

$$x^2 + y^2 = 4$$

(C'est l'équation d'un cercle de rayon 2.)



Voyons ce qu'on obtient si on décide d'intégrer en x en premier. Dans ce cas, une ligne dans le sens des x va de $x = -\sqrt{4-y^2}$ jusqu'à $x = \sqrt{4-y^2}$.

Ensuite, on somme les lignes en y de y = -2 à y = 2.

Le volume est donc

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Si on fait le calcul, on obtient

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} \left[4x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_{-2}^{2} \left(\left[4\sqrt{4-y^2} - \frac{\left(4-y^2\right)^{3/2}}{3} - y^2\sqrt{4-y^2} \right] - \left[-4\sqrt{4-y^2} + \frac{\left(4-y^2\right)^{3/2}}{3} + y^2\sqrt{4-y^2} \right] \right) dy \\ &= \int_{-2}^{2} \left(8\sqrt{4-y^2} - \frac{2\left(4-y^2\right)^{3/2}}{3} - 2y^2\sqrt{4-y^2} \right) dy \end{aligned}$$

$$=\left[4y\sqrt{4-y^2}+16\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{1}{6}y\left(4-y^2\right)^{3/2}-y\sqrt{4-y^2}-4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}y\left(4-y^2\right)^{3/2}-y\sqrt{4-y^2}-4\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right]_{-2}^{2}$$

Tous les termes avec $4-y^2$ seront nuls si y est -2 ou 2. Il reste donc

$$\begin{aligned}V&=\left[16\arcsin\left(\frac{2}{2}\right)-4\arcsin\left(\frac{2}{2}\right)-4\arcsin\left(\frac{2}{2}\right)\right]\\&\quad-\left[16\arcsin\left(\frac{-2}{2}\right)-4\arcsin\left(\frac{-2}{2}\right)-4\arcsin\left(\frac{-2}{2}\right)\right]\\&=\left[8\pi-2\pi-2\pi\right]-\left[-8\pi+2\pi+2\pi\right]\\&=8\pi\end{aligned}$$

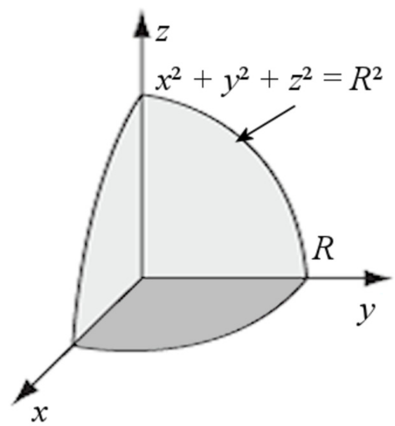
____

On peut aussi utiliser exactement cette technique pour trouver des formules de volume.

Exemple

Montrer que le volume d'une sphère est donné par

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$



www.chegg.com/homework-help/check-divergence-theorem-function-using-volume-one-octant-sp-chapter-1-problem-53p-solution-9780131749870-exc

Pour démontrer cette formule, on va prendre une partie de la sphère, soit celle dans le premier octant. Le volume de cette partie est le volume sous la surface donnée par $x^2+y^2+z^2=R^2$ au-dessus d'un cercle de rayon R.

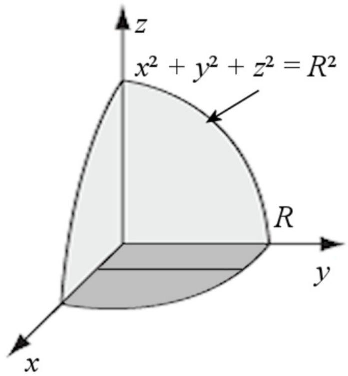
Le volume de la sphère vaut 8 fois le volume de cette région. Le volume de la sphère est donc donné par

$$\begin{aligned}V&=8\iint zdA\\&=8\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dA\end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver la région d'intégration. La zone sous la surface dans le plan xy est un cercle (on peut la voir sur la figure, elle est un peu plus foncée). On peut trouver l'équation de ce cercle en mettant $z = 0$ dans l'équation de la surface. On a alors

$$x^2 + y^2 = R^2$$

(C'est l'équation d'un cercle de rayon R.)



Voyons ce qu'on obtient si on décide d'intégrer en y en premier. Dans ce cas, une ligne dans le sens des y va de $y = 0$ jusqu'à $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Ensuite, on somme les lignes en x de $x = 0$ à $x = R$.

Le volume est donc

$$V = 8\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dydx$$

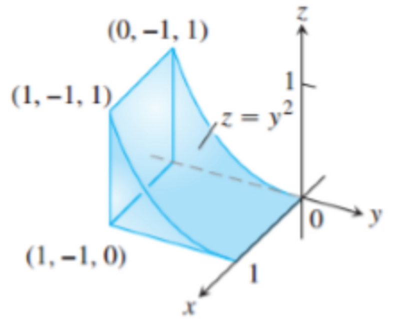
Si on fait le calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
V &= 8\int_0^R \left[\frac{y\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\
&= 8\int_0^R \left(\left[0 + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin(1)\right] - \left[0 + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin(0)\right]\right) dx \\
&= 4\pi\int_0^R \left(\frac{R^2-x^2}{2}\right) dx \\
&= 4\pi\left[\frac{R^2 x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^R \\
&= 4\pi\left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{6}\right) \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

SÉRIE D'EXERCICES 4

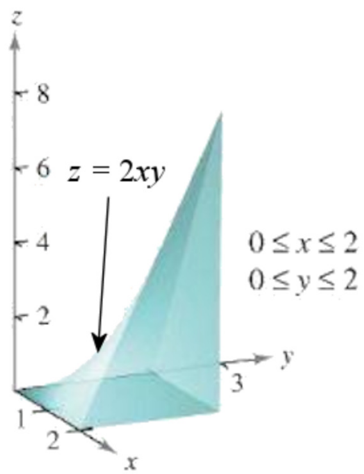
Calculer le volume des régions suivantes.

1.



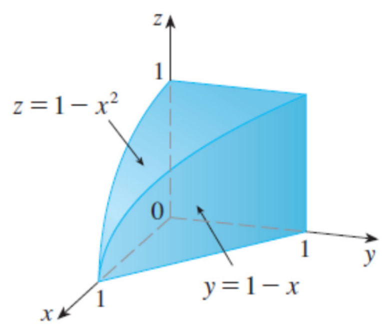
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/construct-triple-integral-form-v-tripleintegral-dz-dy-dx-find-volume-solid-lies-surface-z--q20593543

2.



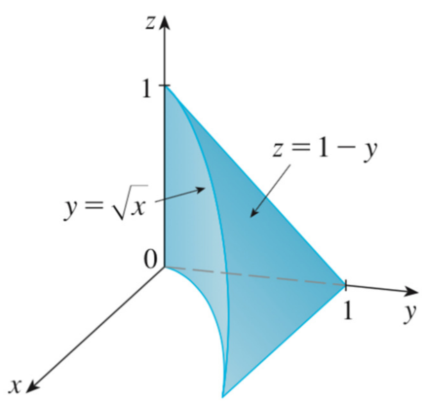
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/volume-exercises-17-20-use-triple-integral-find-volume-solid-shown-figure-18-z-2xy-0sxs2-q30123180

3.



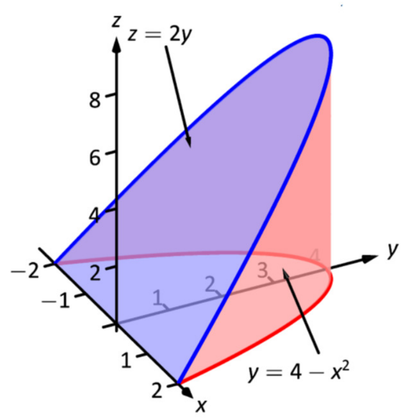
math.stackexchange.com/questions/2233977/help-to-change-the-orders-of-this-triple-integral

4.



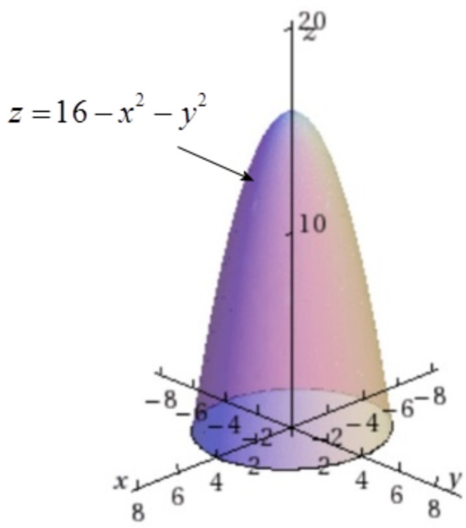
www.quora.com/How-do-you-visualize-the-volume-bounded-and-integrated-over-in-a-triple-integral-that-needs-coordinate-transformations

5.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/exercises-9-16-domain-d-described-bounding-surfaces-along-graph-set-triple-integrals-give--q19700752

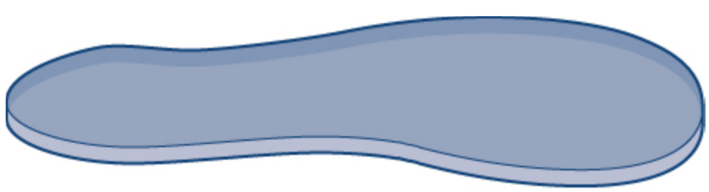
6.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/6-1-points-larcalcet6-146020-use-triple-integral-find-volume-solid-shown-figure-z-16-x2-y2-q30336452

6. *Masse, centre de masse et moment d'inertie*

On va maintenant considérer qu'on a une plaque.



cnx.org/contents/Q_0pMyhf@5/Calculating-Centers-of-Mass-and-Moments-of-Inertia

On cherche maintenant à calculer la masse, la position du centre de masse et le moment d'inertie de cette plaque.

La masse surfacique de la plaque n'est peut-être pas la même partout. Cette masse surfacique peut dépendre de la position sur la plaque, ce qui signifie que la masse surfacique est donnée par une fonction qui sera notée σ.

Masse d'une plaque

On sait déjà comment calculer la masse de la plaque. On sépare la plaque en morceaux infiniment petits. L'aire de ce morceau est dA. On trouve la masse de ce petit morceau en multipliant la masse surfacique par l'aire de ce petit morceau. La masse est donc

$$dm = \sigma dA$$

Pour avoir la masse totale, on somme les masses de tous ces morceaux. Comme on sait qu'une somme infinie d'éléments infinitésimaux est une intégrale, on arrive à la conclusion suivante.

Masse d'une plaque dans le plan xy dont la masse surfacique est donnée par σ

$$M = \iint \sigma dA$$

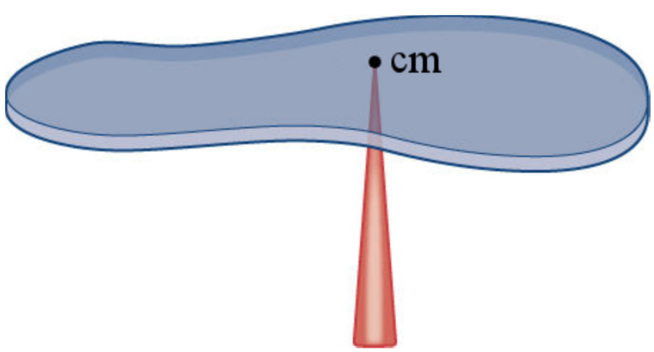
On savait déjà ce résultat et on a déjà fait un exemple de calcul de masse d'une plaque (quoique sans tenir compte des unités).

Centre de masse d'une plaque

Commençons avec quelques rappels de physique. Avec un système formé de masses ponctuelles, la position du centre de masse est donnée par

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i$$

On se rappelle aussi que le centre de masse doit être au-dessus de la zone délimitée par les points d'appui. Cela veut dire que pour qu'une plaque soit en équilibre sur une pointe, le centre de masse de la plaque doit être exactement au bout de la pointe.



cnx.org/contents/Q_0pMyhf@5/Calculating-Centers-of-Mass-and-Moments-of-Inertia

Pour trouver le centre de masse d'une plaque, on sépare la plaque en morceaux infiniment petits. Chacun de ces morceaux peut alors être considéré comme une masse ponctuelle. Puisque la masse de chaque petit morceau est σdA, on a

$$x_i dm_i = x\sigma dA$$

Ensuite, on doit faire la somme pour tous ces morceaux. Comme on sait qu'une somme infinie d'éléments infinitésimaux est une intégrale, on a

$$\sum x_i dm_i = \iint x\sigma dA$$

Cette intégrale porte le nom de moment d'ordre 1. Ici, c'est le moment d'ordre 1 en x et il y a aussi le moment d'ordre 1 en y.

Moment d'ordre 1 d'une plaque dans le plan xy dont la masse surfacique est donnée par σ

$$\text{En } x: \iint x\sigma dA$$
$$\text{En } y: \iint y\sigma dA$$

De là, on déduit facilement les formules de la position du centre de masse.

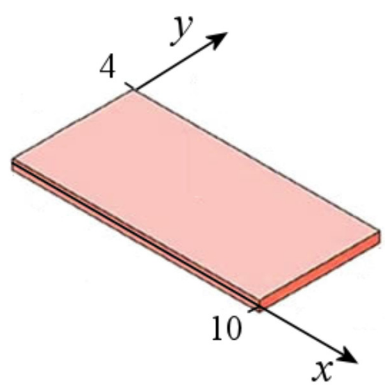
Position du centre de masse d'une plaque dans le plan xy dont la masse surfacique est donnée par σ

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\iint x\sigma dA \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\iint y\sigma dA$$

Commençons par un exemple plutôt évident : la position du centre de masse d'une plaque rectangulaire de masse surfacique constante. Dans ce cas, on sait déjà que le centre de masse est au centre de la plaque.

Exemple

Où est le centre de masse de cette plaque de masse surfacique constante ?



www.amesweb.info/SectionalPropertiesTabs/Mass-Moment-of-Inertia-Rectangle-Plate.aspx

La surface d'intégration est la surface de la plaque. Cette surface est assez simple. Supposons qu'on décide d'intégrer en y en premier. Dans ce cas, une ligne dans le sens des y va de $y = 0$ jusqu'à $y = 4$ m. Ensuite, on somme les lignes en x de $x = 0$ à $x = 10$ m.

La position en x du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\int_0^{10m}\int_0^{4m}\sigma xdydx \\ &= \frac{\sigma}{M}\int_0^{10m}\left[xy\right]_0^{4m} dx \\ &= \frac{\sigma}{M}\int_0^{10m}\left(4m\cdot x\right)dx \\ &= \frac{4m\cdot\sigma}{M}\int_0^{10m} xdx \\ &= \frac{4m\cdot\sigma}{M}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10m} \\ &= \frac{4m\cdot\sigma}{M}\left[\frac{100m^2}{2}\right] \\ &= \frac{200m^3\cdot\sigma}{M} \end{aligned}$$

Pour trouver cette position, il nous faut la masse de la plaque. Toutefois, avec une masse surfacique constante, la masse est facile à trouver. Il suffit de multiplier la masse surfacique par la surface de la plaque.

$$\begin{aligned} M &= \sigma\cdot 4m\cdot 10m \\ &= \sigma\cdot 40m^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{200m^3\cdot\sigma}{40m^2\cdot\sigma} \\ &= 5m \end{aligned}$$

La position en y du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M}\int_0^{10m}\int_0^{4m}\sigma ydydx \\ &= \frac{\sigma}{M}\int_0^{10m}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{4m} dx \\ &= \frac{\sigma}{M}\int_0^{10m}\left(8m^2\right)dx \\ &= \frac{8m^2\cdot\sigma}{M}\int_0^{10m} dx \\ &= \frac{8m^2\cdot\sigma}{M}\left[x\right]_0^{10m} \end{aligned}$$

$$=\frac{8m^2\cdot\sigma}{M}(10m)$$
$$=\frac{80m^3\cdot\sigma}{M}$$

Avec la valeur de la masse, on obtient

$$y_{cm}=\frac{80m^3\cdot\sigma}{40m^2\cdot\sigma}$$
$$=2m$$

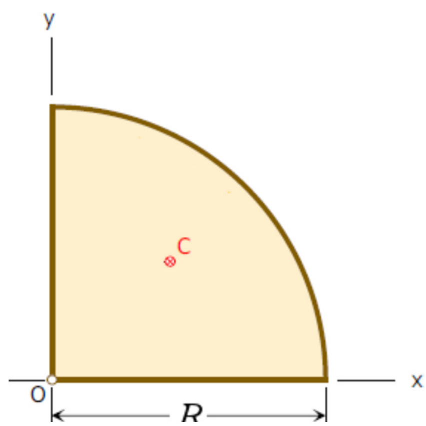
Le centre de masse est à la position (5 m, 2 m), qui est bel et bien au centre de la plaque.

____

Allons-y maintenant pour des exemples moins évidents.

Exemple

Où est le centre de masse de cette plaque de masse surfacique constante ?



www.mathalino.com/tag/reviewer/circular-quadrant

La surface d'intégration est la surface de la plaque. Supposons qu'on décide d'intégrer en y en premier. Dans ce cas, une ligne dans le sens des y va de y = 0 jusqu'au cercle, donc jusqu'à $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Ensuite, on somme les lignes en x de $x = 0$ à $x = R$.

La position en x du centre de masse est donc

$$x_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sigma xdydx$$
$$=\frac{\sigma}{M}\int_0^R[xy]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$
$$=\frac{\sigma}{M}\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx$$
$$=\frac{\sigma}{M}\left[-\frac{\left(R^2-x^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^R$$
$$=\frac{\sigma}{M}\left(\left[-\frac{\left(R^2-R^2\right)^{3/2}}{3}\right]-\left[-\frac{\left(R^2\right)^{3/2}}{3}\right]\right)$$

$$= \frac{\sigma}{M}\left(\frac{R^3}{3}\right)$$

Pour trouver cette position, il nous faut la masse de la plaque. Toutefois, avec une masse surfacique constante, la masse est facile à trouver. Il suffit de multiplier la masse surfacique par la surface de la plaque.

$$M = \sigma \cdot \frac{\pi R^2}{4}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{\sigma}{\frac{1}{4}\sigma\pi R^2}\left(\frac{R^3}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3\pi}R \end{aligned}$$

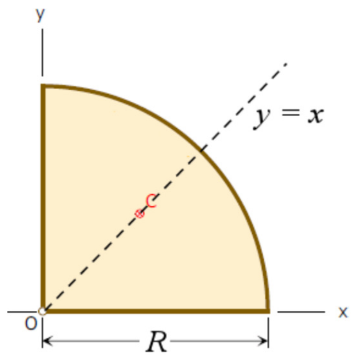
La position en y du centre de masse est

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sigma y dy dx \\ &= \frac{\sigma}{M}\int_0^R \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\ &= \frac{\sigma}{M}\int_0^R \left(\frac{R^2-x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{\sigma}{M}\left[\frac{R^2 x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^R \\ &= \frac{\sigma}{M}\left[\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{6}\right] \\ &= \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

Avec la valeur de la masse, on obtient

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{\sigma}{\frac{1}{4}\sigma\pi R^2}\left(\frac{R^3}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3\pi}R \end{aligned}$$

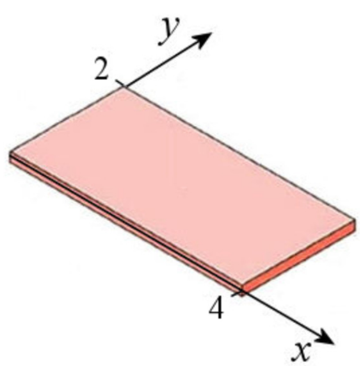
On note que les valeurs sont identiques en x et en y pour cette plaque. En fait, on aurait pu prévoir cela en se rappelant que le centre de masse est toujours sur l'axe de symétrie de l'objet. Comme cette plaque avait un axe de symétrie à $y = x$, on savait que les valeurs de x et de y devait être les mêmes.



Il n'était donc pas nécessaire de calculer la position du centre de masse en y.

Exemple

Où est le centre de masse de cette plaque si sa masse surfacique est donnée par



$$\sigma = 3\tfrac{kg}{m^4} xy$$

(Comme la masse surfacique est plus élevée dans le coin supérieur droit, on doit s'attendre à ce que le centre de masse soit décalé un peu vers cette position par rapport au centre de la plaque. Notez aussi que cette masse surfacique variable brise la symétrie de la plaque et qu'il n'y a donc pas d'axe de symétrie.)

La surface d'intégration est la surface de la plaque. Cette surface est assez simple. Supposons qu'on décide d'intégrer en y en premier. Dans ce cas, une ligne dans le sens des y va de $y = 0$ jusqu'à $y = 2\text{ m}$. Ensuite, on somme les lignes en x de $x = 0$ à $x = 4\text{ m}$.

La position en x du centre de masse est donc

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{M}\int_0^{4m}\int_0^{2m} \sigma x dy dx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{4m}\int_0^{2m} \left(3\tfrac{kg}{m^4} xy\right) x dy dx \\
&= \frac{3\frac{kg}{m^4}}{M}\int_0^{4m}\int_0^{2m} x^2 y dy dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3\frac{kg}{m^4}}{M}\int_0^{4m}\left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_0^{2m} dx \\
&= \frac{3\frac{kg}{m^4}}{M}\int_0^{4m}\left(\frac{x^2\left(2m\right)^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{6\frac{kg}{m^2}}{M}\int_0^{4m} x^2 dx \\
&= \frac{6\frac{kg}{m^2}}{M}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4m} \\
&= \frac{2\frac{kg}{m^2}}{M}\left(4m\right)^3 \\
&= \frac{128kgm}{M}
\end{aligned}
$$

Pour trouver cette position, il nous faut la masse de la plaque. Avec une masse surfacique qui n’est pas constante, on doit trouver la masse avec l’intégrale.

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{4m}\int_0^{2m} \sigma dydx \\
&= \int_0^{4m}\int_0^{2m} \left(3\tfrac{kg}{m^4}xy\right)dydx \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{4m}\int_0^{2m} xydydx \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{4m}\left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{2m} dx \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{4m}\left(\frac{x\left(2m\right)^2}{2}\right)dx \\
&= 6\tfrac{kg}{m^2}\int_0^{4m} xdx \\
&= 6\tfrac{kg}{m^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4m} \\
&= 3\tfrac{kg}{m^2}\left(4m\right)^2 \\
&= 48kg
\end{aligned}
$$

Ainsi, on obtient

$$
\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{128kgm}{48kg} \\
&= \tfrac{8}{3}m
\end{aligned}
$$

La position en y du centre de masse est

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{M}\int_0^{4m}\int_0^{2m}\sigma y dy dx \\
&= \frac{1}{48kg}\int_0^{4m}\int_0^{2m}\left(3\tfrac{kg}{m^4}xy\right)y dy dx \\
&= \frac{3m^{-4}}{48}\int_0^{4m}\int_0^{2m} xy^2 dy dx \\
&= \frac{3m^{-4}}{48}\int_0^{4m}\left[\frac{xy^3}{3}\right]_0^{2m} dx \\
&= \frac{3m^{-4}}{48}\int_0^{4m}\left(\frac{x(2m)^3}{3}\right)dx \\
&= \frac{1m^{-1}}{6}\int_0^{4m} x dx \\
&= \frac{1m^{-1}}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4m} \\
&= \frac{1m^{-1}}{12}(4m)^2 \\
&= \tfrac{4}{3}m
\end{aligned}$$

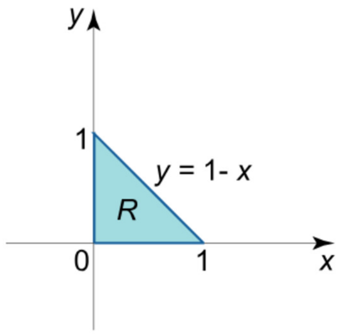
Le centre de masse est à la position (8/3 m, 4/3 m), qui est bel et bien décalé vers la droite et le haut par rapport au centre de la plaque qui est à (2 m ,1 m).

____

SÉRIE D'EXERCICES 5

Calculer la masse et la position du centre de masse des plaques suivantes.

1.

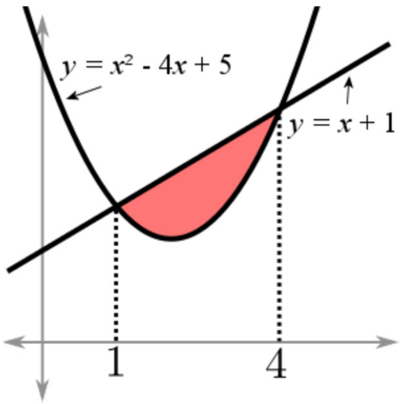


Si la masse surfacique est donnée par

$$\sigma = 6\tfrac{kg}{m^4}xy$$

www.math24.net/physical-applications-double-integrals/

2.



a) Si la masse surfacique est constante.

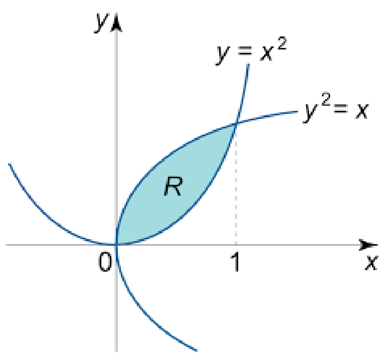
$$\sigma = 2\frac{kg}{m^2}$$

b) Si la masse surfacique est donnée par

$$\sigma = 4\frac{kg}{m^3}\cdot x$$

calculus.seas.upenn.edu/?n=Main.CentroidsAndCentersOfMass

3.



a) Si la masse surfacique est constante.

$$\sigma = 6\frac{kg}{m^2}$$

b) Si la masse surfacique est donnée par

$$\sigma = 7\frac{kg}{m^4}x^2 + 7\frac{kg}{m^4}y^2$$

www.math24.net/physical-applications-double-integrals/

Moment d'inertie d'une plaque

Commençons avec quelques rappels de physique. Avec un système formé de masses ponctuelles, le moment d'inertie est donné par

$$I = \sum m_i r_i^2$$

où r est la distance entre la masse et l'axe de rotation.

Pour trouver le moment d'inertie d'une plaque, on sépare la plaque en petits morceaux. Chacun de ces morceaux peut alors être considéré comme une masse ponctuelle. Puisque la masse de chaque petit morceau est $\sigma\Delta A$, on a

$$r_i^2 m_i = r_i^2 \sigma_i \Delta A_i$$

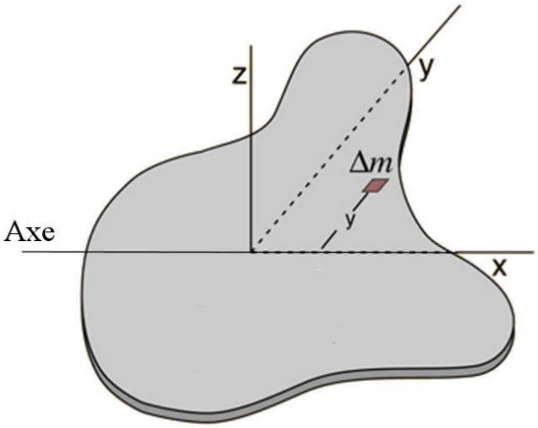
Ensuite, on doit faire la somme pour tous ces morceaux en diminuant la taille des morceaux jusqu'à avoir des morceaux infiniment petits. Comme on sait qu'une somme infinie d'éléments infinitésimaux est une intégrale, on a

$$\sum r_i^2 m_i = \iint r^2 \sigma dA$$

On a donc

Moment d'inertie d'une plaque dans le plan xy dont la masse surfacique est donnée par σ

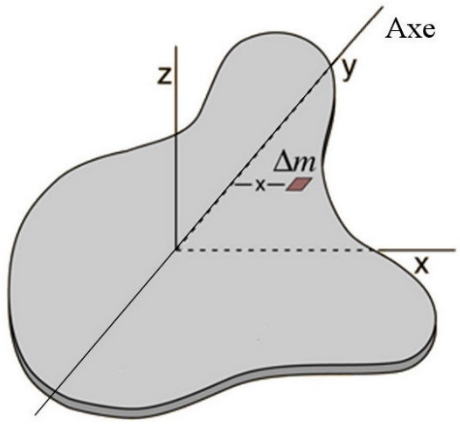
$$I = \iint r^2 \sigma dA$$



La valeur de r change selon l'orientation de l'axe. Si l'axe de rotation est l'axe des x, la distance entre l'axe et le petit morceau est y. Le moment d'inertie est alors

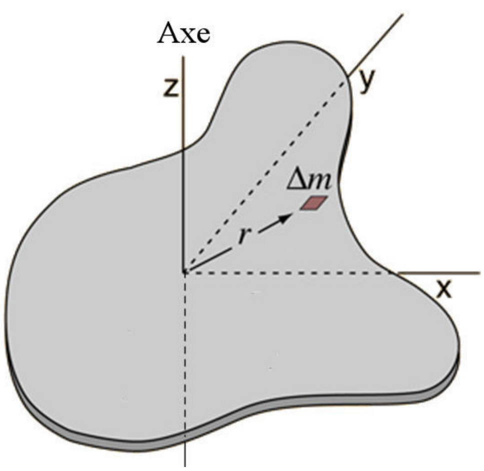
$$I_x = \iint y^2 \sigma dA$$

hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/perpx.html



Si l'axe de rotation est l'axe des y, la distance entre l'axe et le petit morceau est x. Le moment d'inertie est alors

$$I_y = \iint x^2 \sigma dA$$



Si l'axe de rotation est l'axe des z, la distance entre l'axe et le petit morceau est $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le moment d'inertie est alors

$$I_z = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma dA$$

On a donc les résultats suivants.

Moments d'inertie d'une plaque dans le plan xy dont la masse surfacique est donnée par σ

$$I_x = \iint y^2 \sigma dA \qquad I_y = \iint x^2 \sigma dA \qquad I_z = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma dA$$

Les deux premières intégrales portent le nom de moment d'ordre 2. On a le moment d'ordre 2 en x (2e intégrale) et le moment d'ordre 2 en y (1re intégrale).

Vous devinez sans doute que les moments d'ordre n en x et y sont

$$\iint x^n \sigma dA \qquad \iint y^n \sigma dA$$

Notez que

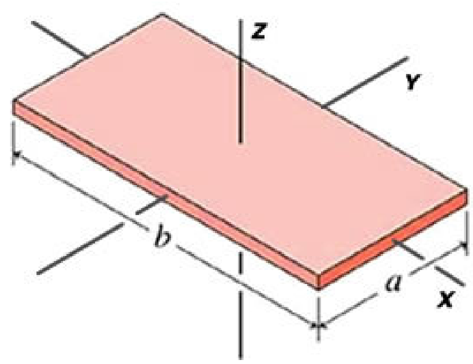
$$I_z = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma dA$$
$$I_z = \iint x^2 \sigma dA + \iint y^2 \sigma dA$$
$$I_z = I_y + I_x$$

Ce résultat, qui est valide uniquement pour des plaques, s'appelle le théorème des axes perpendiculaires.

Exemple

Quel est le moment d'inertie de cette plaque de masse surfacique constante si l'axe est l'axe des z ?

(Donnez votre réponse en termes de a, b et M, la masse de la plaque.)



www.amesweb.info/SectionalPropertiesTabs/Mass-Moment-of-Inertia-Rectangle-Plate.aspx

La surface d'intégration est la surface de la plaque. Cette surface est assez simple. Supposons qu'on décide d'intégrer en y en premier. Dans ce cas, une ligne dans le sens des y va de y = -a/2 jusqu'à y = a/2. Ensuite, on somme les lignes en x de x = -b/2 à x = b/2.

Le moment d'inertie est donc

$$I_z = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 + y^2\right) \sigma dy dx$$
$$= \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} dx$$

$$= \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(\left[\frac{x^2 a}{2} + \frac{a^3}{24} \right] - \left[\frac{-x^2 a}{2} + \frac{-a^3}{24} \right] \right) dx$$

$$= \sigma \int_{-b/2}^{b/2} \left(x^2 a + \frac{a^3}{12} \right) dx$$

$$= \sigma \left[\frac{x^3 a}{3} + \frac{a^3 x}{12} \right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \sigma \left(\left[\frac{b^3 a}{24} + \frac{a^3 b}{24} \right] - \left[\frac{-b^3 a}{24} + \frac{-a^3 b}{24} \right] \right)$$

$$= \sigma \left(\frac{b^3 a}{12} + \frac{a^3 b}{12} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \sigma ab \left(b^2 + a^2 \right)$$

Pour trouver le moment d'inertie, il nous faut la masse de la plaque. Toutefois, avec une masse surfacique constante, la masse est facile à trouver. Il suffit de multiplier la masse surfacique par la surface de la plaque.

$$M = \sigma (ab)$$

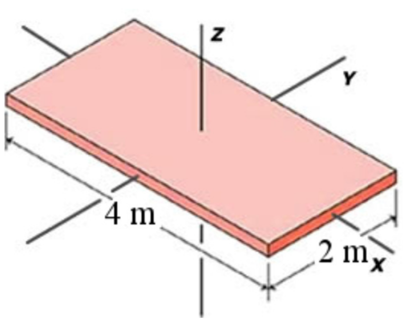
Ainsi, on obtient

$$I_z = \frac{1}{12} M \left(b^2 + a^2 \right)$$

SÉRIE D'EXERCICES 6

Calculer les moments d'inertie I_x , I_y et I_z des plaques suivantes.

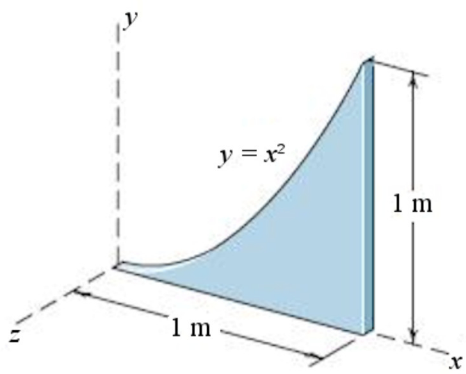
1.



Si la masse surfacique est donnée par

$$\sigma = 9 \tfrac{kg}{m^4} x^2$$

2.

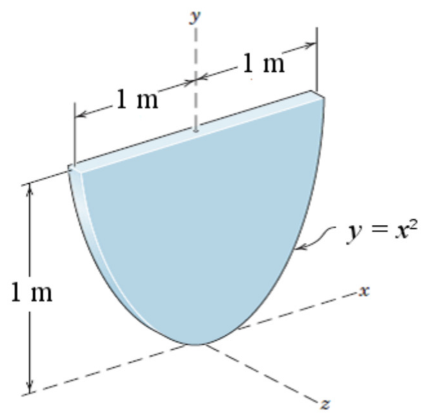


Si la masse surfacique est donnée par

$$\sigma = 42\,\tfrac{kg}{m^2}$$

www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/determine-mass-moments-inertia-thin-parabolic-plate-mass-m-x-y-z-axes-use-values-m-79-kg-b-q4020113

3.



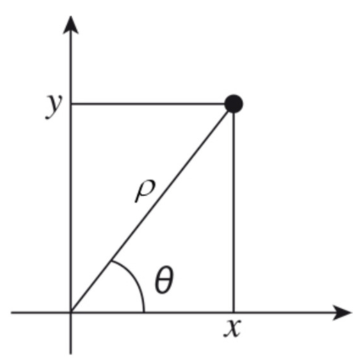
Si la masse surfacique est donnée par

$$\sigma = 21\,\tfrac{kg}{m^2}$$

www.chegg.com/homework-help/determine-mass-moment-inertia-uniform-thin-parabolic-plate-m-chapter-b-problem-9p-solution-9780470614815-exc

7. Les coordonnées polaires

Que sont les coordonnées polaires ?



On peut parfois simplifier grandement les calculs en travaillant avec des coordonnées polaires.

Avec les coordonnées polaires, on spécifie la position d'un point dans le plan xy avec ρ et θ, plutôt qu'avec x et y. La figure ci-contre vous montre ce que sont ρ et θ.

Lois de transformation

Évidemment, le lien entre les deux systèmes de coordonnées est facile à faire.

On obtient ρ et θ à partir de x et y avec

Lois de transformation de cartésiens à polaires

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

On obtient x et y à partir de ρ et θ avec

Lois de transformation de polaires à cartésiens

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \theta$$

Exemple

Un point est à (-3,-3) en coordonnées cartésiennes. Quelles sont les coordonnées de ce point en coordonnées polaires ?

On a

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{-3}{-3} \\ &= \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

(Rappelez-vous, si le diviseur est négatif, il faut ajouter π à la réponse donnée par la calculatrice.)

Les coordonnées sont donc ($3\sqrt{2}$, 5π/4).

____

On peut aussi exprimer une fonction en coordonnées polaires. Généralement, on donne ρ en fonction de θ.

Exemple

Donner l'expression, en coordonnées polaires, de cette fonction décrivant une droite.

$$y = 3x + 2$$

Pour transformer la fonction, on applique les règles de transformation. On a alors

$$\begin{gathered} y = 3x + 2 \\ \rho \sin\theta = 3\rho\cos\theta + 2 \end{gathered}$$

Il ne reste qu'à isoler ρ.

$$\begin{gathered} \sin\theta = 3\cos\theta + \frac{2}{\rho} \\ \frac{2}{\rho} = \sin\theta - 3\cos\theta \\ \frac{\rho}{2} = \frac{1}{\sin\theta - 3\cos\theta} \\ \rho = \frac{2}{\sin\theta - 3\cos\theta} \end{gathered}$$

____

L'équation d'une droite devient nettement plus compliquée en coordonnées polaires. Toutefois, certaines fonctions deviennent nettement plus simples.

Exemple

Donner l'expression, en coordonnées polaires, de cette fonction décrivant un cercle.

$$x^2 + y^2 = 25$$

Pour transformer la fonction, on applique les règles de transformation. On a alors

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = 25 \\ (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 25 \\ \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = 25 \\ \rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 25 \\ \rho^2 = 25 \\ \rho = 5 \end{gathered}$$

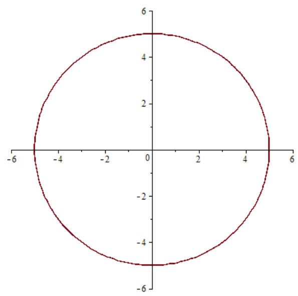
____

Dans ce cas-ci, l'équation devient nettement plus simple.

Graphique de quelques fonctions en coordonnées polaires

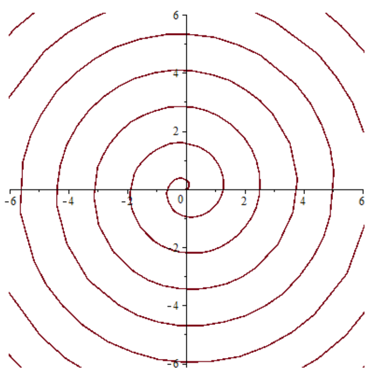
Pour se familiariser avec les fonctions en coordonnées polaires, voici le graphique de quelques fonctions.

$\rho = 5$



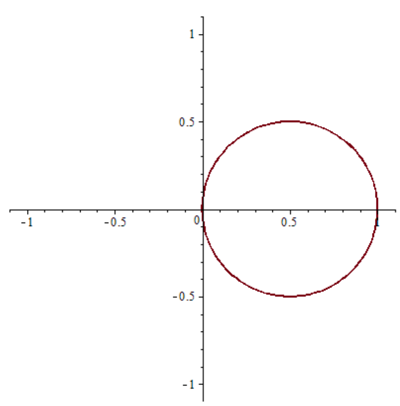
La fonction ne dépend pas de l'angle. Peu importe la valeur de l'angle, la fonction vaut 5. On est donc toujours à une distance de 5 de l'origine et on obtient un cercle.

$\rho = \dfrac{\theta}{5}$

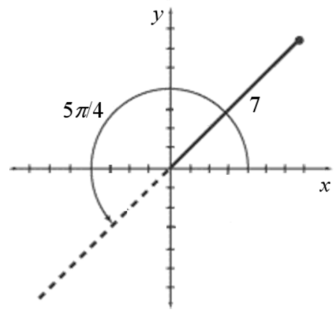


À mesure que l'angle augmente (à partir de l'axe des x), la distance à l'origine augmente. On obtient alors ce genre de spirale.

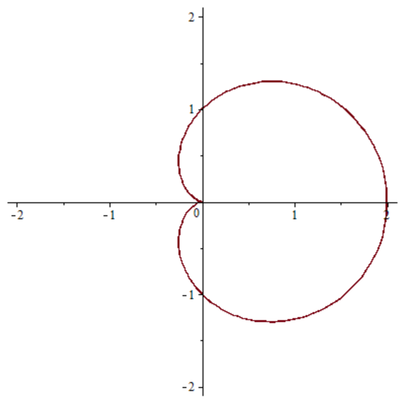
$\rho = \cos\theta$



Notez ici que pour des angles entre π/2 et 3π/2, la valeur de ρ est négative. Quand c'est le cas, la distance est dans la direction opposée à l'angle. Par exemple, si on obtient une valeur de -7 à l'angle 5π/4, alors cela correspond à un point à une distance de 7 dans la direction opposée (donc dans la direction de π/4).

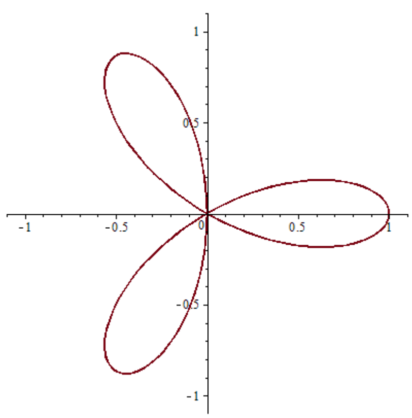


$\rho = 1 + \cos\theta$

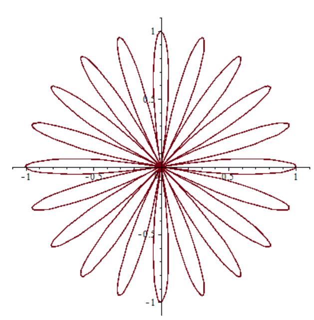


Cette figure est appelée une cardioïde, pour sa vague ressemblance avec un cœur.

$\rho = \cos 3\theta$



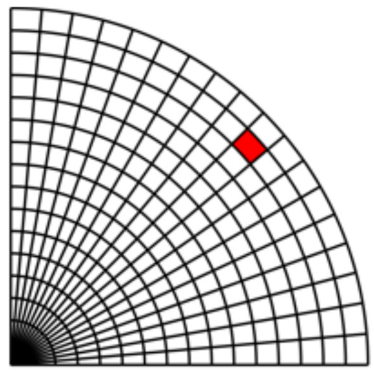
Il s'agit d'une rosace à 3 feuilles. On change le nombre de feuilles avec l'entier à l'intérieur du cosinus. Avec cos (10θ), on a 20 feuilles. (Le nombre de feuilles est égal à l'entier pour les nombres impairs et au double de l'entier pour les nombres pairs.)



Élément d'aire en coordonnées polaires

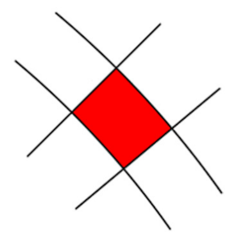
Pour obtenir des petits morceaux de surface, appelés éléments d'aire, on sépare la surface d'intégration avec des lignes où les variables sont constantes. En cartésiens, les lignes pour lesquelles x est constant sont des lignes verticales et les lignes pour lesquelles y est constant sont des lignes horizontales. Cela séparait le plan xy en rectangles.

En coordonnées polaires, on sépare la région avec des lignes pour lesquelles θ est constant. Ce sont des droites qui passent par l'origine. On sépare ensuite avec des cercles pour lesquelles ρ est constant. Cela signifie que le plan est séparé tel qu'illustré sur la figure suivante (dans le premier quadrant). En rouge, on a un de ces éléments d'aire.



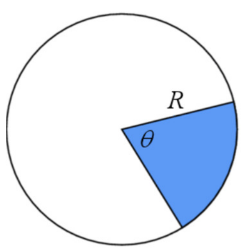
math.stackexchange.com/questions/145939/simple-proof-of-integration-in-polar-coordinates

La distance entre chaque cercle est $\Delta\rho$ et l'angle entre chaque ligne droite est $\Delta\theta$.



Il faut maintenant trouver l'aire de cet élément en rouge.

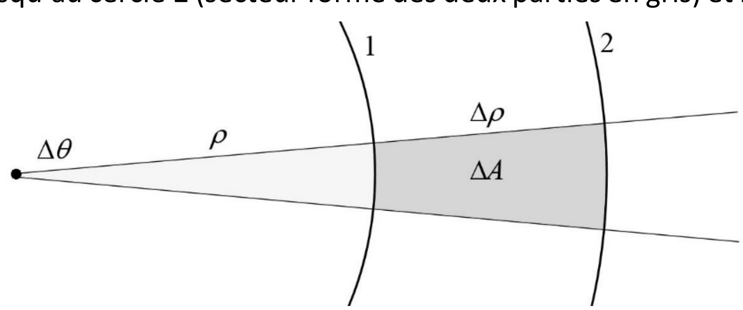
Commençons par dire que l'aire d'un secteur d'un cercle est



$$A = \pi R^2 \frac{\theta}{2\pi}$$

C'est, au fond, une simple règle de trois. C'est l'aire du cercle multipliée par la proportion qui est dans le secteur, qui est simplement l'angle du secteur divisé par 2π, l'angle de tout le cercle.

Alors, pour trouver l'aire de l'élément d'aire (en gris foncé sur la figure ci-bas), nous allons prendre l'aire du secteur jusqu'au cercle 2 (secteur formé des deux parties en gris) et nous allons enlever l'aire du secteur jusqu'au cercle 1 (en gris plus clair).



Comme le rayon de cercle 1 est ρ et celui du cercle 2 est $\rho + \Delta\rho$. L'aire est

$$\begin{aligned}\Delta A &= \pi(\rho+\Delta\rho)^2\frac{\Delta\theta}{2\pi} - \pi(\rho)^2\frac{\Delta\theta}{2\pi}\\ &= (\rho+\Delta\rho)^2\frac{\Delta\theta}{2} - (\rho)^2\frac{\Delta\theta}{2}\\ &= \left(\rho^2+2\rho\Delta\rho+(\Delta\rho)^2\right)\frac{\Delta\theta}{2} - (\rho)^2\frac{\Delta\theta}{2}\\ &= \left(2\rho\Delta\rho+(\Delta\rho)^2\right)\frac{\Delta\theta}{2}\\ &= \left(\rho+\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)\right)(\Delta\rho)(\Delta\theta)\end{aligned}$$

Si l'aire devient très petite, alors $\Delta\rho \to d\rho$ et $\Delta\theta \to d\theta$. Dans ce cas, on obtient

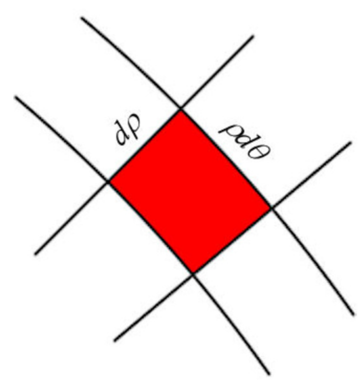
$$\left(\rho+\left(\frac{\Delta\rho}{2}\right)\right) \to \rho$$

L'aire devient donc

Élément d'aire en coordonnées polaires

$$dA = \rho d\rho d\theta$$

C'est en fait, un petit carré ayant les dimensions montrées sur la figure de droite.



Ainsi, l'intégrale double en coordonnées polaires devient

$$\iint f(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$$

On trouve les bornes avec la même technique que celle utilisée auparavant, mais cette fois, on doit utiliser des lignes dans la direction de $\theta = constant$ (lignes droites passant par l'origine) si on commence par intégrer en ρ et des arcs de cercle dans la direction de $\rho = constant$ (arcs de cercle centré sur l'origine) si on intègre en θ en premier. Disons que dans ce cours, on va presque toujours intégrer en ρ en premier.

Applications

Exemple

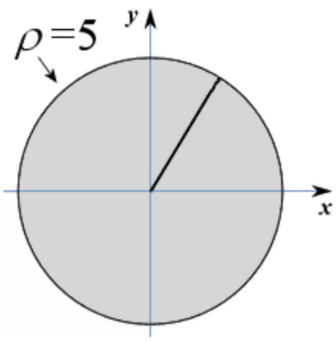
Avec une intégrale double en coordonnées polaires, calculez l'aire d'un cercle de rayon 5.

On sait que pour calculer l'aire d'une région d'intégration, on doit intégrer la fonction $f = 1$. L'aire est donc égale à

$$\iint (1)\, dA = \iint (1)\, \rho d\rho d\theta$$

et la région d'intégration est un cercle de rayon 5.

Trouvons maintenant les bornes. Comme on intègre par rapport à ρ en premier, on trace donc une ligne dans le sens du rayon, c'est-à-dire une ligne droite qui passe par l'origine.



Cette ligne va toujours de $\rho = 0$ à $\rho = 5$. Les bornes pour ρ sont donc 0 et 5.

Ensuite, pour couvrir toute la surface on va faire une première ligne à $\theta = 0$ et faire tout le tour du cercle jusqu'à $\theta = 2\pi$. Les bornes pour θ sont donc 0 et 2π.

L'aire est donc

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^5 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{2} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{25\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 25\pi \end{aligned}$$

C'est bel et bien l'aire de ce cercle.

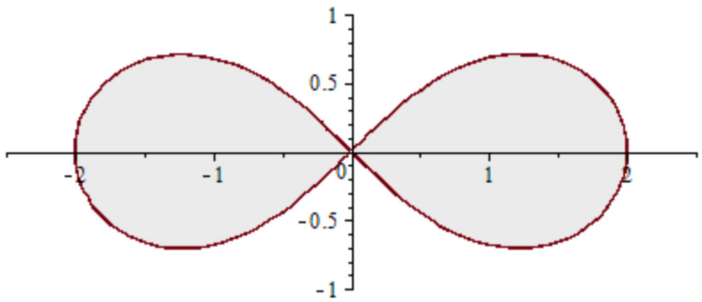
____

Exemple

Avec une intégrale double en coordonnées polaires, calculez l'aire délimitée par la lemniscate de Bernoulli. La lemniscate est une forme donnée par la fonction

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

Par exemple, voici le graphique de cette fonction si $a = 2$.

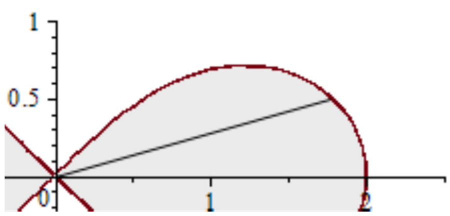


On cherche donc l'aire de la région en gris sur la figure.

L'aire est égale à

$$\iint dA = \iint \rho d\rho d\theta$$

Trouvons maintenant les bornes. Commençons par dire qu'on va seulement calculer l'aire dans le premier quadrant et qu'on va arrêter l'angle à $\pi/4$. Puisque la fonction n'existe pas entre $\pi/4$ et $3\pi/4$, on ne peut pas intégrer dans cette direction. On va donc uniquement considérer la partie entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$,



Comme on intègre par rapport à ρ en premier, on trace donc une ligne dans le sens du rayon, c'est-à-dire une ligne droite qui passe par l'origine.

Cette ligne va toujours de $\rho = 0$ jusqu'à la fonction. Les bornes pour ρ sont donc 0 et $a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Ensuite, pour couvrir toute la surface on va faire une première ligne à $\theta = 0$ et se rendre jusqu'à $\pi/4$. Pour couvrir toute la région dans le premier quadrant. Les bornes pour θ sont donc 0 et $\pi/4$.

L'aire est donc

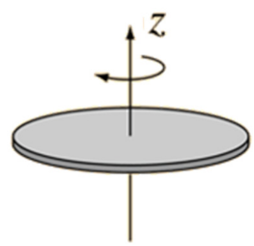
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{a^2\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right] \\
&= \frac{a^2}{4}
\end{aligned}$$

Cette partie dans le premier quadrant n'est que le quart de la surface. La surface totale est donc

$$A = a^2$$

____

Exemple



Montrer que le moment d'inertie d'un disque de masse surfacique constante qui tourne autour de l'axe z montré sur la figure est

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

Le moment d'inertie est donné par

$$I_z = \iint\left(x^2 + y^2\right)\sigma dA$$

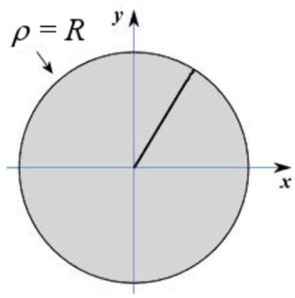
Comme la surface d'intégration est un cercle, on va peut-être se simplifier la vie en travaillant en coordonnées polaires. Puisque les lois de transformations sont

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

L'intégrale devient

$$I_z = \iint \rho^2\sigma dA$$

$$= \iint \rho^2 \sigma \rho d\rho d\theta$$
$$= \iint \rho^3 \sigma d\rho d\theta$$



Trouvons maintenant les bornes. Comme on intègre par rapport à ρ en premier, on trace donc une ligne dans le sens du rayon, c'est-à-dire une ligne droite qui passe par l'origine. Cette ligne va toujours de $\rho = 0$ jusqu'à la circonférence du cercle qui est à $\rho = R$. Les bornes pour ρ sont donc 0 et R.

Ensuite, pour couvrir toute la surface on va faire une première ligne à $\theta = 0$ et se rendre jusqu'à 2π. Les bornes pour θ sont donc 0 et 2π.

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_z &= \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \sigma \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R d\theta \\ &= \sigma \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{4} \right) d\theta \\ &= \sigma \left[\frac{R^4}{4} \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \sigma \frac{\pi R^4}{2} \end{aligned}$$

Or, la masse surfacique de la plaque est (puisque la masse surfacique est constante)

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\text{masse}}{\text{aire}} \\ &= \frac{M}{\pi R^2} \end{aligned}$$

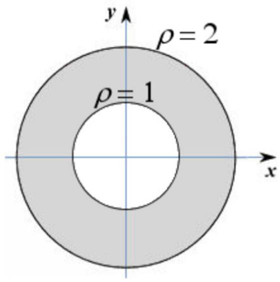
Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^4}{2} \\ &= \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

C'est ce qu'on devait démontrer.

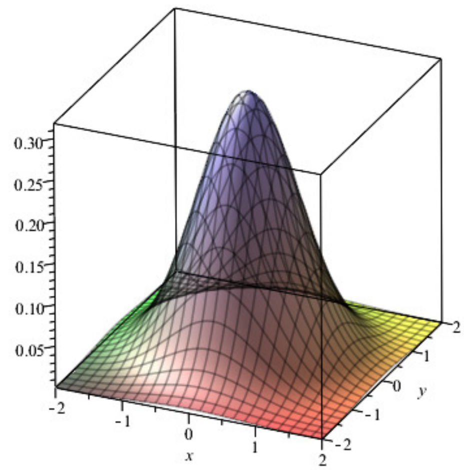
Exemple

Calculer le volume sous la surface donnée par la fonction



$$f = \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2}$$

Au-dessus de la région d'intégration montrée sur la figure de gauche.



Le volume est donné par

$$\begin{aligned} V &= \iint f(x,y)\,dA \\ &= \iint \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2} dA \end{aligned}$$

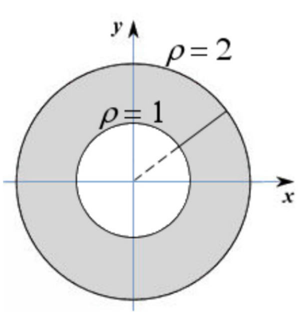
Comme la surface d'intégration est formée de cercles, on va peut-être se simplifier la vie en travaillant en coordonnées polaires. Puisque les lois de transformations sont

$$e^{-x^2-y^2} = e^{-\rho^2}$$

(La transformation en coordonnées polaires va aussi permettre de faire l'intégrale. En effet, cette intégrale est impossible à faire en coordonnées cartésiennes (du moins avec des fonctions simples).)

L'intégrale devient

$$V = \frac{1}{\pi} \iint e^{-\rho^2} dA = \frac{1}{\pi} \iint e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta$$



Trouvons maintenant les bornes. Comme on intègre par rapport à ρ en premier, on trace donc une ligne dans le sens du rayon, c'est-à-dire une ligne droite qui passe par l'origine. Cette ligne va toujours du petit cercle $\rho = 1$ jusqu'au grand cercle $\rho = 2$. Les bornes pour ρ sont donc 1 et 2.

Ensuite, pour couvrir toute la surface on va faire une première ligne à $\theta = 0$ et se rendre jusqu'à 2π. Les bornes pour θ sont donc 0 et 2π.

Le volume est donc

$$V = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^2 e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_1^2 d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{e^{-4}}{2}--\frac{e^{-1}}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{-1}-e^{-4}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{-1}-e^{-4}\right)[\theta]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{-1}-e^{-4}\right)(2\pi)$$
$$= \left(e^{-1}-e^{-4}\right) \approx 0,34956$$

SÉRIE D'EXERCICES 7

Trouvez les coordonnées polaires des points ayant les coordonnées cartésiennes suivantes.

1. (1, 1)
2. (-3, 4)
3. (5, -12)
4. (-20, -21)

Trouvez les coordonnées cartésiennes des points ayant les coordonnées polaires suivantes.

5. (2, π/3)
6. (3, π/2)
7. (1, -π/3)
8. (4, 0)

Trouvez l'équation, en coordonnées polaires, des équations suivantes données en coordonnées cartésiennes.

9. La droite $x = 3$
10. La droite $y = 2$
11. La droite $y = 6x$

12. L'hyperbole $y^2 - x^2 = 4$

13. Le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 4$

14. L'ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$

Trouvez l'équation, en coordonnées cartésiennes, des équations suivantes données en coordonnées polaires.

15. La droite $\theta = \pi / 4$
16. Le cercle $\rho = 3$
17. $\rho \cos\theta = 5$
18. $\rho^2 \cos 2\theta = 1$
19. $\rho\left(\sin\theta + \rho\cos^2\theta\right) = 1$
20. Montrez que l'équation $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$ représente un cercle. Trouvez son centre et son rayon.

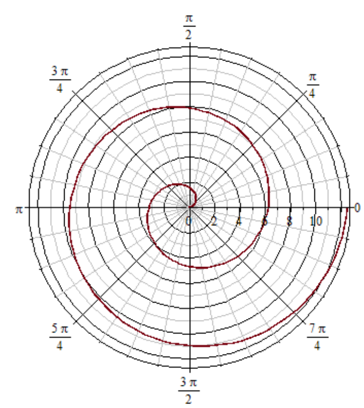
Rappel : l'équation d'un cercle centré sur le point (c,d) est

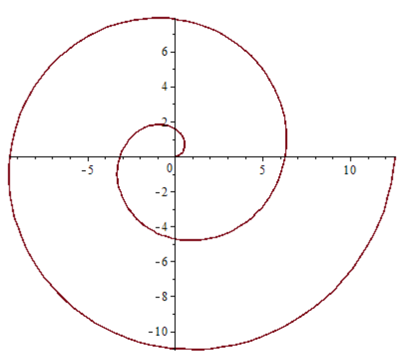
$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$$

On va maintenant tracer des graphiques de courbes de coordonnées polaires avec Maple. Pour tracer le graphique en coordonnées polaires, il faut premièrement activer les commandes de traçage avec *with(plots)*. Ensuite, on trace avec *polarplot.* Par exemple, si on veut tracer le graphique de $\rho = \theta$ pour θ entre 0 et 4π, on écrit

*polarplot(t, t=0..4*Pi)*

On a alors le résultat montré sur la figure de droite.





On peut aussi utiliser

*plot(t,t=0..4*Pi,coords=polar,scaling=constrained)*

On a alors le résultat montré à gauche.

(On a ajouté scaling = constrained pour avoir les mêmes échelles sur les 2 axes.)

À l'aide de Maple, tracez le graphique des fonctions suivantes.

21. $\rho = 3$

22. $\rho = 5 - 5\sin(4\theta)$

23. $\rho = 1 + \cos 2\theta$

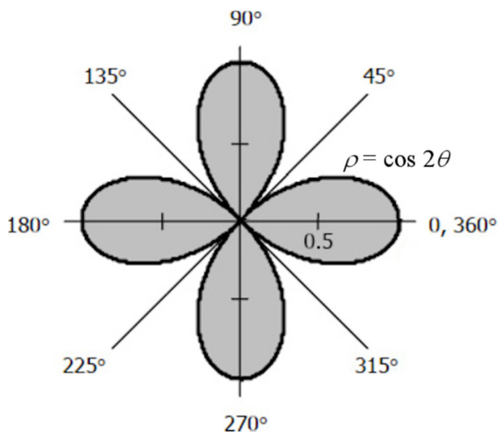
24. $\rho = 2 + 2\sec\theta$ (appelé conchoïde de Nicomède) (pour θ entre π/2,2 et π/2,2)

25. $\rho = 3 + 4\cos\theta$ (un cas particulier du limaçon de Pascal)

26. $\rho = 2 - 2\sin\theta + \sin\theta \dfrac{\sqrt{|\cos\theta|}}{\sin\theta + 1,4}$

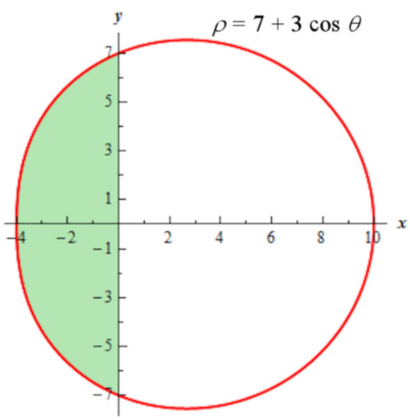
Calculer l'aire des régions suivantes.

27.



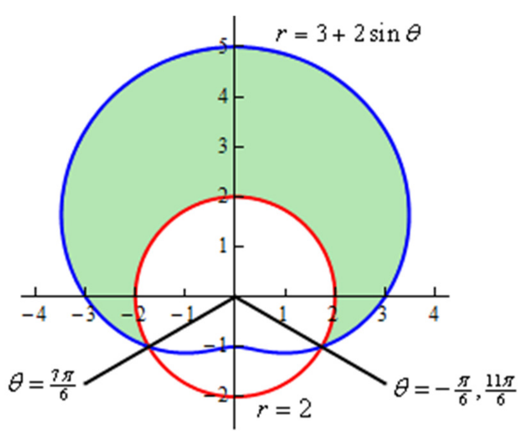
www.mathalino.com/reviewer/integral-calculus/example-5-plane-areas-in-polar-coordinates

28.



tutorial.math.lamar.edu/Problems/CalcII/PolarArea.aspx

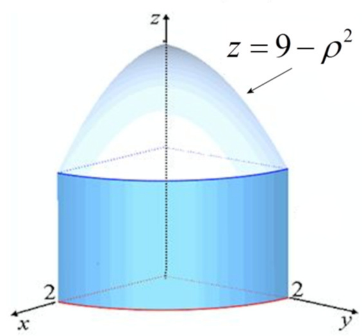
29.



tutorial.math.lamar.edu/Problems/CalcII/PolarArea.aspx

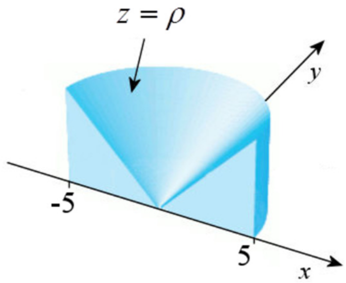
Calculer le volume de ces régions.

30.



slideplayer.com/slide/7362196/

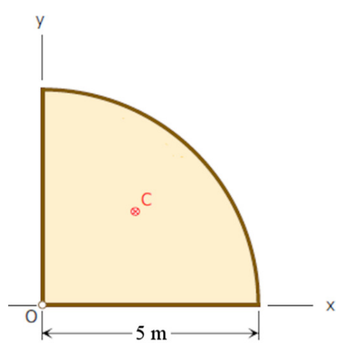
31.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/choose-coordinates-set-triple-integral-including-limits-integration-density-function-fover-q24414312

Calculer la masse et la position du centre de masse de ces plaques. (Donnez la position en coordonnées cartésiennes.)

32.

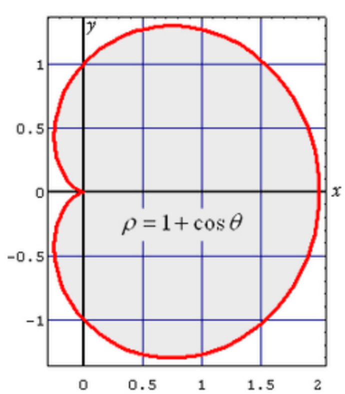


A) Si la masse surfacique est constante à 3 kg/m².

B) Si la masse surfacique est donnée par $\sigma = 2\frac{kg}{m^3}\rho + 2\frac{kg}{m^2}$.

www.mathalino.com/reviewer/engineering-mechanics/706-centroiud-quarter-circle-integration

33.

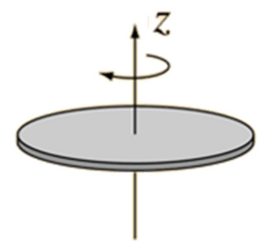


A) Si la masse surfacique est constante à 3 kg/m².

B) Si la masse surfacique est donnée par $\sigma = 2\frac{kg}{m^3}\rho + 2\frac{kg}{m^2}$.

www.mathamazement.com/Lessons/Pre-Calculus/06_Additional-Topics-in-Trigonometry/graphs-of-polar-equations.html

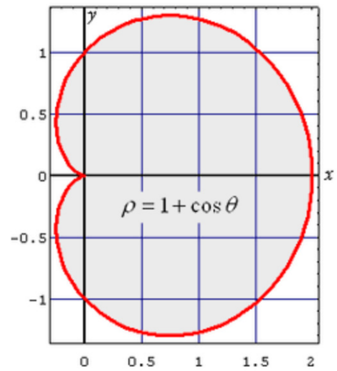
34. Calculer le moment d'inertie I_z de cette plaque circulaire ayant un rayon de 2 m si…



a) la densité de la plaque est donnée par $\sigma = 2\frac{kg}{m^3}\rho + 2\frac{kg}{m^2}$.

b) la densité de la plaque est donnée par $\sigma = \frac{3\frac{kg}{m}}{\rho}$

35. Calculer les moments d'inertie I_x , I_y et I_z de cette plaque en forme de cardioïde si sa densité est constante à σ= 3 kg/m².



8. Les changements de variables

En fait, on peut faire n'importe quel autre changement de variable pour résoudre une intégrale.

Rappelons-nous comment on change de variable pour des intégrales avec une seule variable. Si on a

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

et qu'on pose qu'on a une nouvelle variable u qui dépend de x, alors on a

$$dx = \frac{dx}{du}du$$

L'intégrale devient alors

$$\int_\alpha^\beta g(u)\frac{dx}{du}du$$

où $g(u)$ est la fonction écrite avec la nouvelle variable. On trouve les nouvelles bornes en calculant les valeurs de u quand $x = a$ et $x = b$. Voyons ce que ça donne avec un exemple. Supposons qu'on ait l'intégrale

$$\int_0^1 (2x+4)^4\,dx$$

et qu'on pose que

$$u = 2x+4$$

On a alors

$$x = \frac{u-4}{2} \qquad\qquad dx = \frac{1}{2}du$$

L'intégrale devient

$$\int u^4 \frac{1}{2}du$$

On trouve les nouvelles bornes en calculant les valeurs de u avec les valeurs de x dans les anciennes bornes. Quand $x = 0$, $u = 4$ et quand $x = 1$, $u = 6$. Les bornes sont donc 4 et 6. On a alors

$$\frac{1}{2}\int_4^6 u^4 dx$$

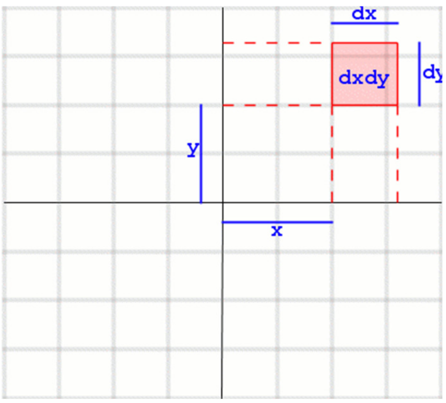
Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_4^6 u^4 du &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^5}{5}\right]_4^6 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{6^5}{5} - \frac{4^5}{5}\right) \\ &= 675,2\end{aligned}$$

On va maintenant vouloir faire la même chose avec l'intégrale double. Cela signifie qu'on veut utiliser les nouvelles variables u et v, pour résoudre une intégrale d'une fonction qui dépend de x et y au départ. Le principal défi est de savoir ce que devient dA dans ce cas.

Avec les nouvelles variables, la surface d'intégration sera séparée différemment. On a déjà vu que cette surface n'est pas séparée de la même façon quand on travaille en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires. En fait, dans ces deux cas, on sépare la région en utilisant des lignes où une des variables est constante.

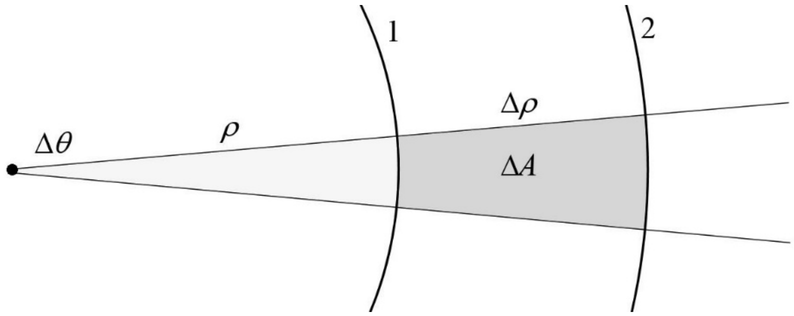
En effet, en cartésien on sépare en petites régions rectangulaires.



jodcast.net/~gaf/PC10372/WebApps/user-documentation/resources/Cartesian2DDoc.html

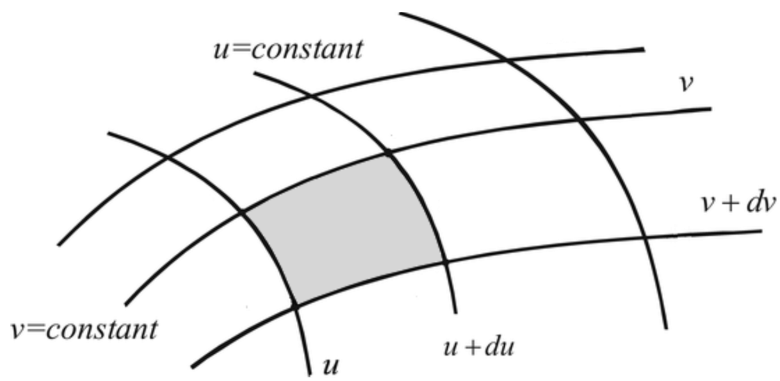
Ce rectangle est délimité par des lignes verticales, qui sont des lignes où x est constant, et par des lignes horizontales, qui sont des lignes où y est constant.

En coordonnées polaires, l'élément d'aire est le suivant.



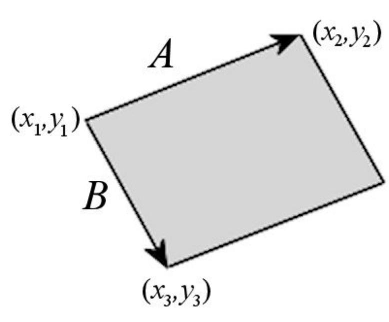
Il est formé d'arcs de cercle, qui sont les endroits où ρ est constant, et de lignes droites qui partent de l'origine, qui sont les endroits où θ est constant.

Ainsi, avec nos nouvelles variables, on va séparer en régions en prenant des lignes (pas nécessairement droites) où u est constant et des lignes (pas nécessairement droites non plus) où v est constant. En gris, on a un de ces éléments d'aire.



Sur l'image, du et dv ne sont pas vraiment petits. S'ils sont très petits, l'élément d'aire deviendra un parallélogramme.

On va trouver l'aire avec les vecteurs A et B. Ces deux vecteurs sont



$$\vec{A} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$
$$\vec{B} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}$$

L'aire de ce parallélogramme correspond à la grandeur du produit vectoriel de ces deux vecteurs. Le produit vectoriel est

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}$$
$$=\left(\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right)\vec{k}$$

Évidemment, la grandeur de ce vecteur, qui est égale à l'aire, est

$$A=\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|$$

Si le parallélogramme est petit, on a

$$x_2-x_1=\frac{\partial x}{\partial u}du$$ (Il n'y a pas de dérivée partielle par rapport à v, car v est constant dans cette direction.)

$$x_3-x_1=\frac{\partial x}{\partial v}dv$$ (Il n'y a pas de dérivée partielle par rapport à u, car u est constant dans cette direction.)

$$y_2-y_1=\frac{\partial y}{\partial u}du$$ (Il n'y a pas de dérivée partielle par rapport à v, car v est constant dans cette direction.)

$$y_3-y_1=\frac{\partial y}{\partial v}dv$$ (Il n'y a pas de dérivée partielle par rapport à u, car u est constant dans cette direction.)

En utilisant ces résultats, l'élément d'aire devient donc

$$\begin{aligned}dA&=\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|\\ &=\left|\frac{\partial x}{\partial u}du\frac{\partial y}{\partial v}dv-\frac{\partial x}{\partial v}dv\frac{\partial y}{\partial u}du\right|\\ &=\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|dudv\end{aligned}$$

Concentrons-nous sur ce qu'il y a dans la valeur absolue. On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

C’est donc le déterminant de matrice et cette matrice porte un nom : c’est le jacobien.

Le jacobien

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \det J$$

et l’élément d’aire est (selon l’ordre d’intégration qu’on va choisir)

Élément d’aire

$$dA = \left|\det J\right| dudv \qquad \text{ou} \qquad dA = \left|\det J\right| dvdu$$

Il est à noter que dans le cas d’une intégrale double, on peut également utiliser les dérivées de u et v par rapport à x et y. On se retrouvera alors avec une matrice différente, soit la matrice

$$K = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

C’est la matrice des dérivées inverses. De plus, on peut montrer que le déterminant de K est l’inverse du déterminant de J.

$$\left|\det J\right| = \frac{1}{\left|\det K\right|}$$

Il est donc parfois plus intéressant de calculer le déterminant de K et de trouver ensuite celui de J à partir de là.

Voyons premièrement si cette formule fonctionne si on transforme en coordonnées polaires. On sait qu’en coordonnées polaires, on a les lois de transformation suivantes.

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$

Le jacobien est donc

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(\rho\sin\theta)}{\partial \rho} & \frac{\partial(\rho\sin\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice est

$$\begin{aligned}
|J| &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta \\
&= \rho
\end{aligned}$$

Cela signifie que l'élément d'aire en coordonnées polaires est

$$dA = \rho d\rho d\theta$$

C'est effectivement ce qu'on avait trouvé.

Pour faire un changement de variable avec une fonction de deux variables, on doit donc suivre la règle suivante.

Changement de variable dans une intégrale double

$$\iint f(x,y)\,dA = \iint g(u,v)\left|\det J\right| dudv \quad \text{ou} \quad \iint g(u,v)\left|\det J\right| dvdu$$

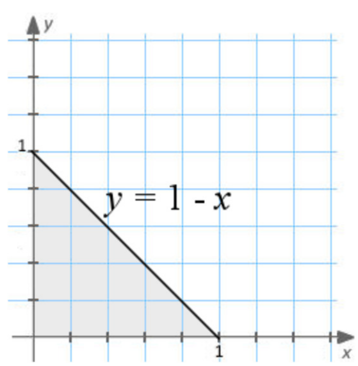
(Selon l'ordre d'intégration.)

Exemple

Calculer l'intégrale

$$\iint \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^4 dydx$$

Sur la région d'intégration montrée à droite.



Il est beaucoup trop difficile de faire cette intégrale directement.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^4 dydx$$

On va donc tenter un changement de variable. La forme de l'intégrale suggère fortement de poser

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$

Pour trouver le jacobien, on doit avoir les transformations inverses. Voici comment on peut les trouver.

$$v + u = (x + y) + (x - y)$$
$$v + u = 2x$$
$$x = \frac{v+u}{2}$$

$$v - u = (x + y) - (x - y)$$
$$v - u = 2y$$
$$y = \frac{v-u}{2}$$

Le jacobien est donc

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial((v+u)/2)}{\partial u} & \frac{\partial((v+u)/2)}{\partial v} \\ \frac{\partial((v-u)/2)}{\partial u} & \frac{\partial((v-u)/2)}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminent du jacobien est

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} - - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2}$$

L'intégrale devient alors

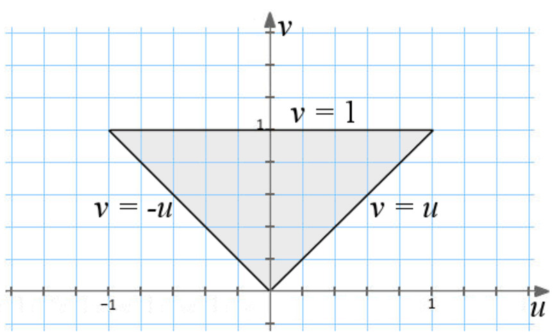
$$\iint \frac{u^4}{v^4} \frac{1}{2} dudv$$

Il ne reste qu'à trouver les bornes de cette intégrale. On pourrait y arriver en faisant comme on a fait avec les coordonnées polaires, soit en traçant des lignes dans le sens de $u = constante$ et de $v = constante$ dans le plan xy. Bien que cela soit possible (c'est ce qu'on avait fait avec les coordonnées polaires), on va prendre une autre technique ici. On va regarder ce que devient cette surface si on la trace dans le plan uv.

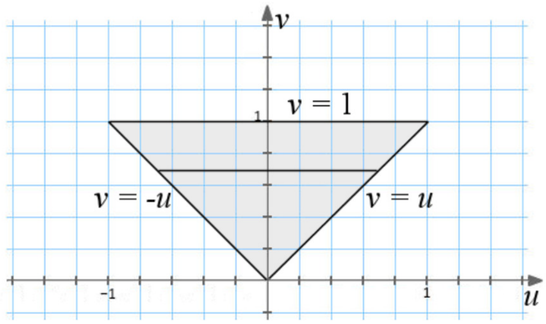
Pour tracer la région dans ce plan, il faut trouver l'équation de toutes les frontières de la zone d'intégration. Cette zone est délimitée par 3 droites : $x = 0$, $y = 0$ et $y = 1 - x$. Transformons chacune de ces droites

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(v - u) = 0$$
$$v = u$$
$$x = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(v + u) = 0$$
$$v = -u$$
$$y = 1 - x \rightarrow \frac{1}{2}(v - u) = 1 - \frac{1}{2}(v + u)$$
$$v = 1$$

Voici donc la forme de la région d'intégration dans le plan uv.



Comme la région est régulière en u, on va intégrer par rapport à u en premier. Si on trace une ligne dans le sens des u, on voit que cette ligne va de $u = -v$ à $u = v$.



Ensuite, on somme ces lignes, en partant de $v=0$ pour aller jusqu'à $v=1$. L'intégrale est donc

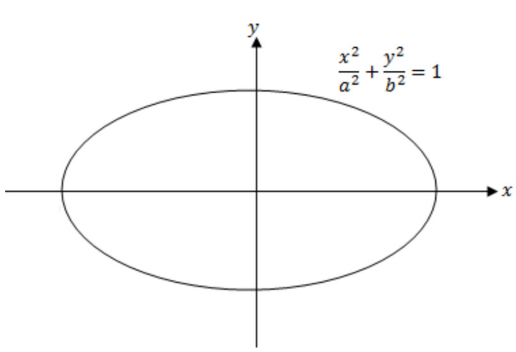
$$\int_0^1\int_{-v}^{v}\frac{u^4}{v^4}\frac{1}{2}dudv$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-v}^{v}\frac{u^4}{v^4}\frac{1}{2}dudv &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{u^5}{5v^4}\right]_{-v}^{v}dv\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\left[\frac{v^5}{5v^4}\right]-\left[\frac{-v^5}{5v^4}\right]\right)dv\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2v^5}{5v^4}dv\\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 vdv\\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)\\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Exemple

Trouver la formule donnant l'aire d'une ellipse.



Pour trouver l'aire, on doit faire l'intégrale

$$A=\int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-(x/a)^2}}^{b\sqrt{1-(x/a)^2}}dydx$$

C'est possible de faire cette intégrale, mais on va donc tenter un changement de variable pour simplifier un peu les bornes. L'équation de l'ellipse suggère fortement de poser

$$u=\frac{x}{a}\qquad\qquad v=\frac{y}{b}$$

Pour trouver le jacobien, on doit avoir les transformations inverses. C'est assez facile de trouver ces transformations inverses.

$$x=au\qquad\qquad y=bv$$

Le jacobien est donc

$$\begin{aligned}J&=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial(au)}{\partial u}&\frac{\partial(au)}{\partial v}\\\frac{\partial(bv)}{\partial u}&\frac{\partial(bv)}{\partial v}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le déterminent du jacobien est

$$\begin{aligned}\det J&=\begin{vmatrix}a&0\\0&b\end{vmatrix}\\&=ab-0\\&=ab\end{aligned}$$

L'intégrale devient alors

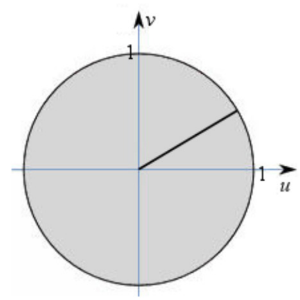
$$\iint abdudv$$

Il ne reste qu'à trouver les bornes de cette intégrale. On va regarder ce que devient cette surface si on la trace dans le plan uv. Avec les nouvelles variables, l'équation de la fonction qui délimite la zone d'intégration devient

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$
$$u^2+v^2=1$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon 1.

Puisque la zone d'intégration est un cercle, ce serait bien mieux de faire cette intégrale en coordonnées polaires en posant



$$u=\rho\cos\theta$$
$$v=\rho\sin\theta$$

Dans ce cas, l'intégrale devient

$$\iint abdudv \to \iint ab\rho d\rho d\theta$$

Il ne reste qu'à trouver les bornes. Si on trace une ligne dans le sens de ρ, on voit que cette ligne va toujours de $\rho = 0$ à $\rho = 1$. Puis on fait ces lignes dans toutes les directions (θ va de 0 à 2π). On a donc

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho d\rho d\theta$$

Il ne reste qu'à calculer la valeur de cette intégrale.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho d\rho d\theta &= ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho d\rho d\theta\\ &= ab\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 d\theta\\ &= ab\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-0\right)d\theta\\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\\ &= \frac{ab}{2}[\theta]_0^{2\pi}\\ &= \frac{ab}{2}(2\pi-0)\\ &= \pi ab\end{aligned}$$

C'est effectivement la formule de l'aire d'une ellipse.

SÉRIE D'EXERCICES 8

Trouvez le déterminant du jacobien des changements de variables suivants.

1. $x = u + v$, $y = uv$

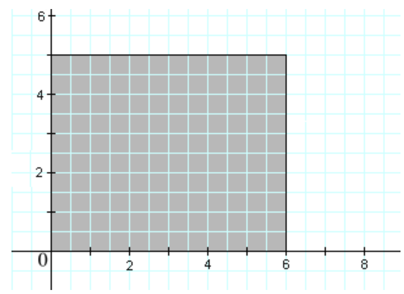
2. $x = u - v$, $y = u + v$

3. $x = u^2v^2$, $y = v^2 - u^2$

4. $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$

5. $x = u + v - w$, $y = 2u - v + 3w$, $z = -u + 2v - w$

6. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = we^{uv}$

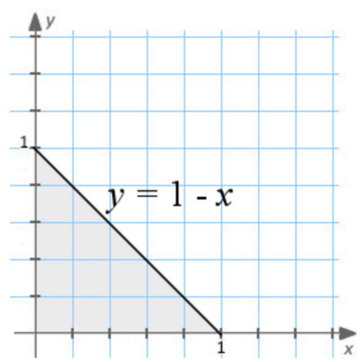


7. Une région d'intégration est donnée par la figure de droite. Tracez la région d'intégration dans le plan uv si les transformations sont $u = x + y$ et $v = x - y$.

8. Exprimer dA en termes de $du\,dv$ si le changement de variables est donné par les équations suivantes.

$$x = u(1 - v) \qquad y = uv$$

Utiliser le changement de variable $u = x - y$ et $v = x + y$ pour évaluer les intégrales suivantes dans la région d'intégration montrée sur la figure.



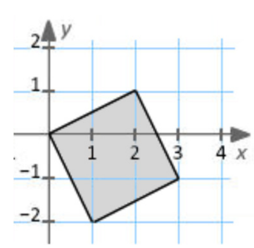
9. $\iint \frac{(x-y)^{10}}{(x+y)^4}\,dA$

10. $\iint (x-y)^6 (x+y)^4\,dA$

Avec les transformations

$$u = \frac{1}{5}(2x + y) \qquad v = \frac{1}{5}(x - 2y),$$

la zone d'intégration carrée dans le plan xy ayant la forme montrée sur la figure reste un carré dans le plan uv. Utiliser cette information pour calculer les intégrales suivantes dans cette région d'intégration.



11. $\iint \left(\frac{2x+y}{x-2y+5}\right)^2 dA$

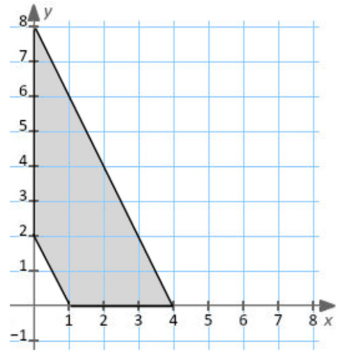
12. $\iint (2x+y)^2 (x-2y)\, dA$

13. $\iint (2x+y) \arctan(x-2y)\, dA$

14. Évaluez

$$\iint e^{\frac{2y-x}{y+2x}} dA$$

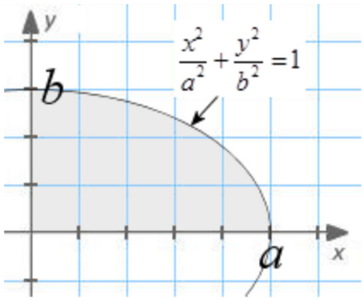
dans la région d'intégration montrée sur la figure de droite.



15. Utiliser les changements de variables $x = ar\cos\theta$ et $y = br\sin\theta$ pour évaluer l'intégrale

$$\iint e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dA$$

dans la région d'intégration montrée sur la figure de droite.

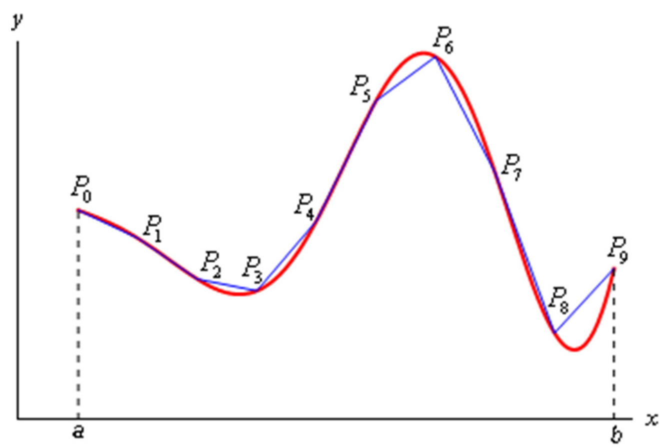


(Ici, il y a une subtilité : avec un tel changement de variables, le point (0,0) devient une frontière avec les nouvelles variables. On doit donc considérer le point (0,0) comme une frontière de la zone et on prend l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (qui est une ellipse qui n'a pas de grosseur) pour cette frontière.)

9. *Longueurs d'une courbe et aire d'une surface en 3 D*

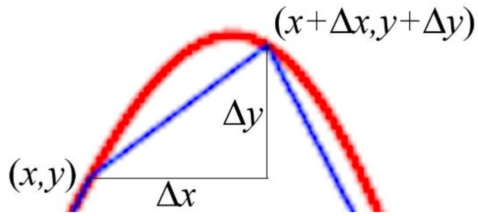
Rappel : la longueur d'une courbe en coordonnées cartésiennes

On va commencer par un petit rappel du cours de calcul intégral. Supposons qu'on veuille calculer la longueur de la courbe décrite par la fonction $y = f(x)$ entre a et b. (Courbe en rouge sur cette figure.



tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ArcLength.aspx

Pour calculer la longueur, on sépare la courbe en petits morceaux et on approxime la longueur totale en additionnant la longueur des droites entre chaque point de la courbe (ligne bleue sur la figure.) Évidemment, l'approximation sera meilleure s'il y a plus de points.



La longueur de chaque droite est simplement l'hypoténuse d'un triangle.

Cette longueur est

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta L = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

On somme ensuite tous ces petits bouts.

$$L \approx \sum_{i=1}^{N} \left(\Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \right)$$

Le calcul devient exact si les petits morceaux deviennent infiniment petits. On a alors

$$L = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \left(\Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \right)$$

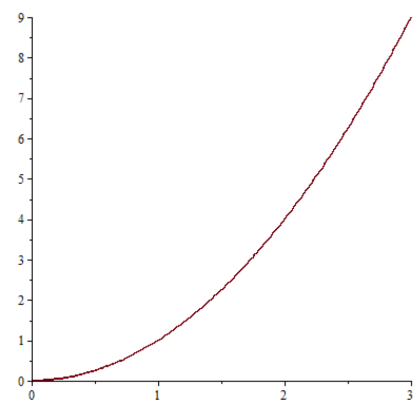
Or, cette somme infinie d'éléments infiniment petits est une intégrale.

Longueur d'un arc en coordonnées cartésiennes

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Exemple

Calculez la longueur de la courbe donnée par la fonction $y = x^2$ entre $x = 0$ et $x = 3$.



Pour trouver la longueur de la courbe, on doit calculer

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Puisque pour cette fonction on a

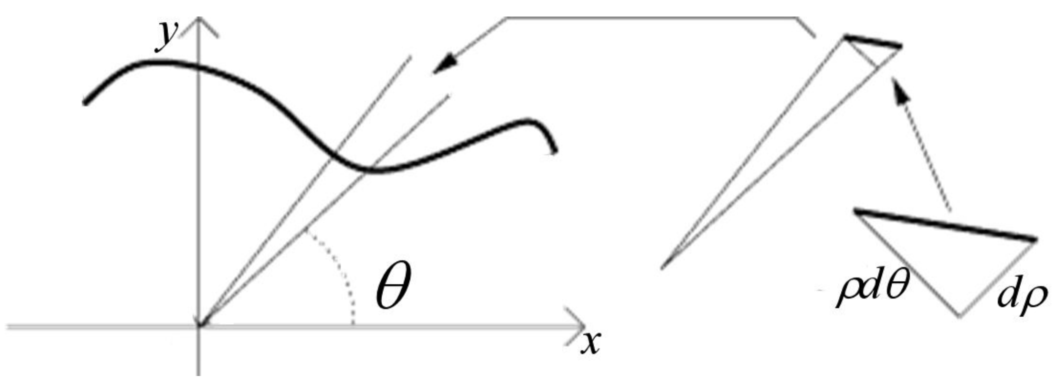
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

La longueur de la courbe est

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\, dx \\ &= \left[\frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{arsinh}(2x) \right]_0^3 \\ &= \left(\left[\frac{3\sqrt{1+36}}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{arsinh}(6) \right] - [0] \right) \\ &\approx 9{,}747 \end{aligned}$$

La longueur d'une courbe en coordonnées polaires

Selon la figure suivante,



math.feld.cvut.cz/mt/txtd/5/txe3da5c.htm

la longueur d'un petit bout d'arc en polaire est

$$dL = \sqrt{(\rho d\theta)^2 + (d\rho)^2}$$

$$dL = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

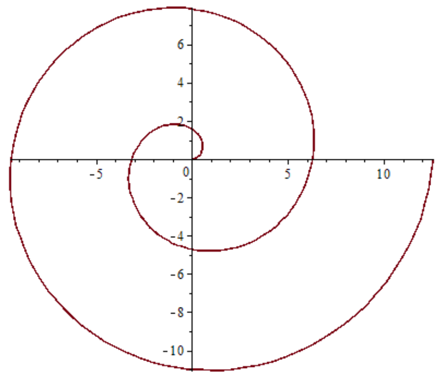
Si on somme tous ces petits bouts d'arc, on arrive à

Longueur d'un arc en coordonnées polaires

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Exemple

Calculez la longueur de la courbe donnée par la fonction $\rho=\theta$ entre $\theta=0$ et $\theta=4\pi$.



Pour trouver la longueur de la courbe, on doit calculer

$$L=\int_0^{4\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Puisque pour cette fonction on a

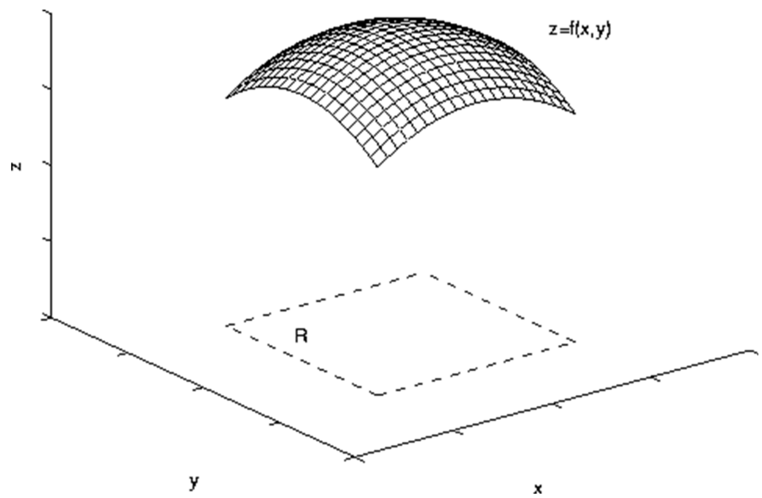
$$\rho=\theta \qquad\qquad \frac{d\rho}{d\theta}=1$$

La longueur de la courbe est

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{4\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta\\&=\left[\frac{\theta\sqrt{1+\theta^2}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(\theta)\right]_0^{4\pi}\\&=\left(\left[\frac{4\pi\sqrt{1+16\pi^2}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(4\pi)\right]-[0]\right)\\&\approx 80{,}819\end{aligned}$$

L'aire d'une surface en 3 D

On veut maintenant calculer l'aire d'une surface. Par exemple, on voudrait calculer l'aire de cette surface qui est au-dessus de la région d'intégration R.

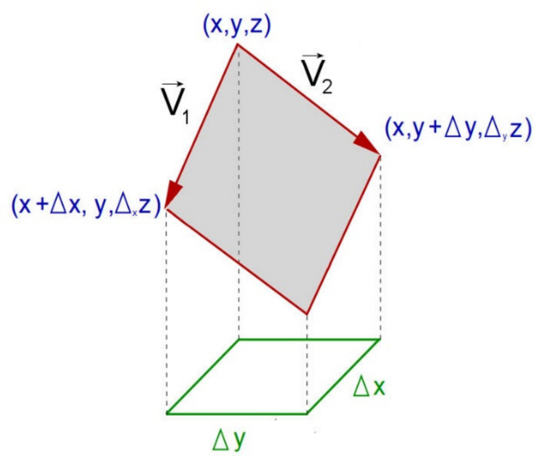


math.oregonstate.edu/home/programs/undergrad/CalculusQuestStudyGuides/vcalc/surfint/surfint.html

(On ne cherche pas l'aire de la région d'intégration R comme on le faisant auparavant, on cherche maintenant l'aire de la surface au-dessus de plan xy, surface que représente la fonction de deux variables.)

Pour calculer cette aire, on va séparer la surface en petits morceaux, un peu comme les petits carrés qui forment la surface sur la figure.

On sépare la surface avec des plans parallèles à l'axe de x (sur lesquelles y est constant) et de lignes parallèles à l'axe de y (sur lesquelles x est constant). On va alors prendre deux vecteurs qui suivent les côtés de ces rectangles. On pourra alors calculer l'aire de ce rectangle puisque le produit vectoriel entre les deux vecteurs donne un vecteur dont la grandeur est égale à l'aire du rectangle.



users.math.msu.edu/users/gnagy/teaching/11-fall/mth234/L35-234.pdf

Un de ces vecteurs est sur le plan pour lequel y est constant. Le point de départ de ce vecteur est (x,y,z) et le point final de ce vecteur est $(x + \Delta x,\ y,\ z + \Delta_x z)$, Les composantes de ce vecteur sont donc

$$\vec{V}_1 = \Delta x \vec{i} + 0\vec{j} + \Delta_x z \vec{k}$$

Si on prend des rectangles infiniment petits, on a

$$\Delta x \to dx$$

$$\Delta_x z \to dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

Le vecteur est donc

$$\vec{V}_1 = dx\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial x} dx\vec{k}$$

L'autre vecteur est sur le plan pour lequel *x* est constant. Le point de départ de ce vecteur est (x,y,z) et le point final de ce vecteur est $(x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta_y z)$, Les composantes de ce vecteur sont donc

$$\vec{V}_2 = 0\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta_y z\vec{k}$$

Si on prend des rectangles infiniment petits, on a

$$\Delta y \to dy$$
$$\Delta_y z \to dz = \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Le vecteur est donc

$$\vec{V}_2 = 0\vec{i} + dy\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y} dy\vec{k}$$

Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est donc

$$\begin{aligned}
\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} dx \\ 0 & dy & \frac{\partial z}{\partial y} dy \end{vmatrix} \\
&= -\left(\frac{\partial z}{\partial x} dxdy\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} dydx\right)\vec{j} + dxdy\vec{k}
\end{aligned}$$

La grandeur de ce vecteur, qui est égale à l'aire du rectangle, est

$$\begin{aligned}
dS &= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} dxdy\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} dydx\right)^2 + \left(dxdy\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ \ dxdy
\end{aligned}$$

Pour avoir l'aire totale, on somme donc toutes les aires de ces petits rectangles. Comme cette somme est une intégrale, on arrive à

Aire d'une surface en 3D

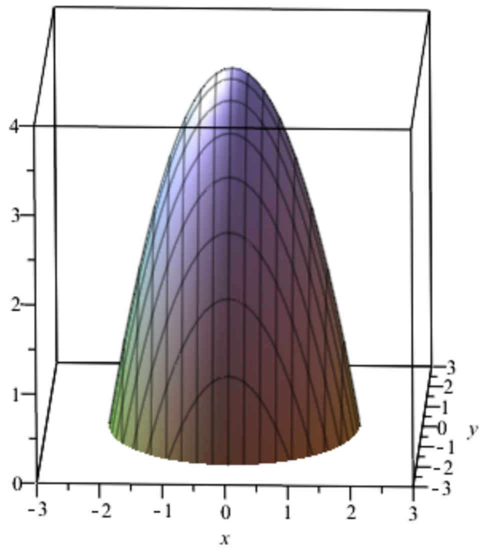
$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Exemple

Quelle est l'aire de la surface décrite par la fonction

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

qui est au-dessus du plan xy.



Pour trouver l'aire de la surface, on doit calculer

$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Puisque pour cette fonction on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

La surface est

$$S = \iint \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dA$$

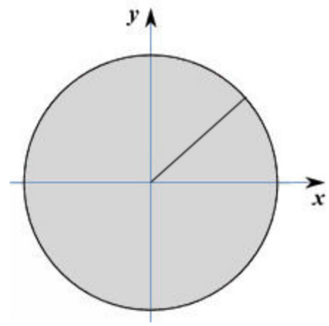
Reste maintenant à trouver la région d'intégration. Sur le plan xy, la région sous la surface est délimitée par un cercle correspondant à l'intersection de la surface et du plan z = 0. L'équation de la région d'intégration est donc

$$0 = 1 - x^2 - y^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

L'intersection de la surface et du plan xy est donc un cercle de rayon 1. Notre région d'intégration se situe à l'intérieur de ce cercle.

De toute évidence, on devrait plutôt travailler en coordonnées polaires (essayez-la en cartésien, vous allez voir…). Dans ce cas, l'intégrale devient

$$S=\iint\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$



On va intégrer en ρ en premier. La ligne va de $\rho = 0$ à $\rho = 1$. Ce sont nos bornes en ρ.

Ensuite, on additionne des lignes de $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$. Ce sont nos bornes en θ.

L'intégrale est donc

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$

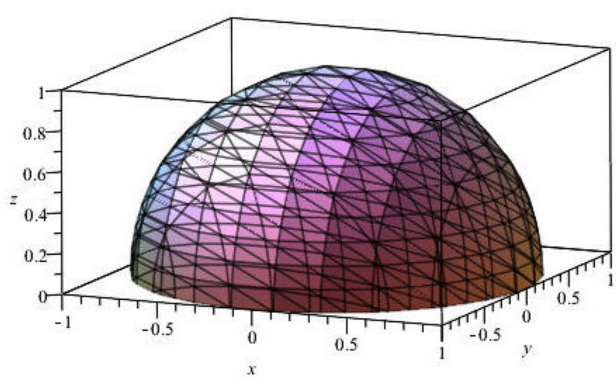
Il ne reste qu'à résoudre.

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\
&= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\left(\left[(1+4)^{3/2}\right]-\left[(1)^{3/2}\right]\right)d\theta \\
&= \frac{5^{3/2}-1}{12}\int_0^{2\pi}d\theta \\
&= \frac{5^{3/2}-1}{12}[\theta]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\left(5^{3/2}-1\right)\pi}{6} \\
&\approx 5,3304
\end{aligned}$$

Exemple

Montrer que l'aire d'une sphère est donnée par

$$A=4\pi R^2$$



Pour y arriver, on va calculer l'aire d'une sphère au-dessus du plan xy. À la fin, on devra multiplier l'aire obtenue par deux pour avoir la sphère au complet.

Ce dessus de sphère est donné par la fonction

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Pour trouver l'aire de la surface, on doit calculer

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Puisque pour cette fonction on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

La surface est

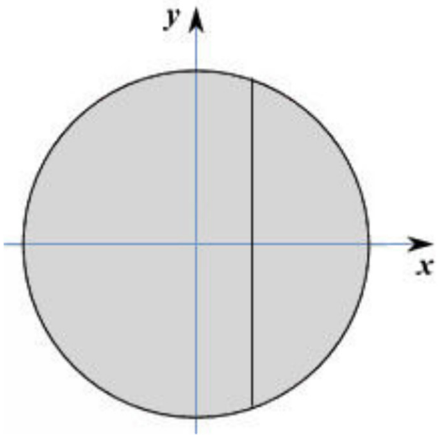
$$\begin{aligned} S &= \iint \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dA \\ &= \iint \sqrt{\frac{R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dA \\ &= \iint \sqrt{\frac{R^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dA \\ &= \iint \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dA \\ &= R \iint \sqrt{\frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}} dA \end{aligned}$$

Reste maintenant à trouver la région d'intégration. Sur le plan xy, $z = 0$. L'équation de la surface devient donc

$$0 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$
$$x^2 + y^2 = R^2$$

L'intersection de la surface et du plan xy est donc un cercle de rayon R. Notre région d'intégration se situe à l'intérieur de ce cercle.

Même si on devrait peut-être travailler en coordonnées polaires, on va continuer en coordonnées cartésiennes.



On va intégrer en y en premier. La ligne va de $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ à $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Ce sont nos bornes en y.

Ensuite, on additionne des lignes de x = -R jusqu'à $x = R$. Ce sont nos bornes en x.

L'intégrale est donc

$$S = R\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{\frac{1}{R^2-x^2-y^2}}dydx$$

Il ne reste qu'à résoudre…

$$\begin{aligned}
S &= R\int_{-R}^{R}\left[\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx \\
&= R\int_{-R}^{R}\left(\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]-\left[\arcsin\left(\frac{-\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]\right)dx \\
&= R\int_{-R}^{R}\left(\left[\arcsin(1)\right]-\left[\arcsin(-1)\right]\right)dx \\
&= R\int_{-R}^{R}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)dx \\
&= \pi R\int_{-R}^{R}dx \\
&= \pi R\left[x\right]_{-R}^{R} \\
&= \pi R\left(R--R\right) \\
&= 2\pi R^2
\end{aligned}$$

Si on multiplie par 2 pour avoir les 2 côtés de la sphère, on arrive à

$$A = 4\pi R^2$$

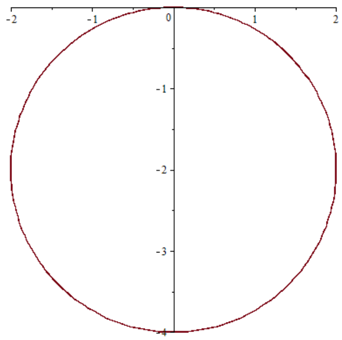
____

Dans toutes ces sections, on constate que les intégrales ne sont pas toujours faciles à résoudre à cause de la présence de la racine.

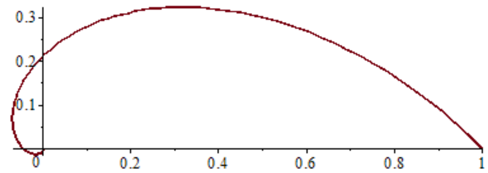
SÉRIE D'EXERCICES 9

Trouvez la longueur des courbes suivantes données en coordonnées polaires.

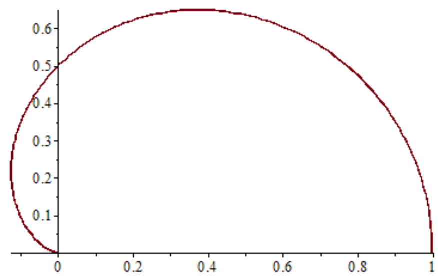
1. $\rho = -4\sin\theta$ entre $\theta = 0$ et π.



2. $\rho = e^{-\theta}$ entre $\theta = 0$ et 2π.



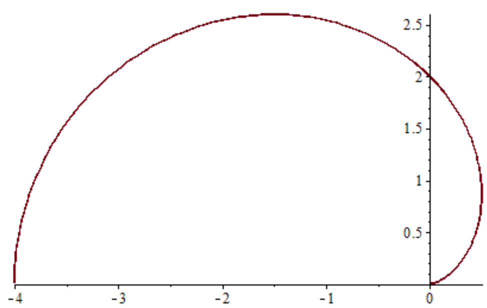
3. $\rho = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$ entre $\theta = 0$ et π.



4. $\rho = 2 - 2\cos\theta$ entre $\theta = 0$ et π.

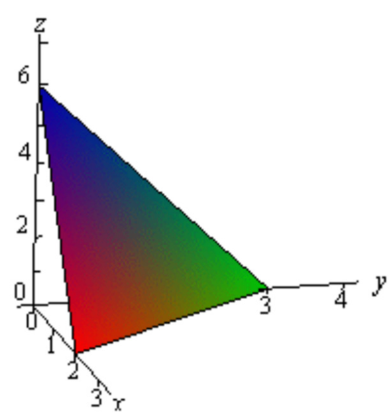
Identité trigonométrique qui peut être utile à la résolution :

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)$$



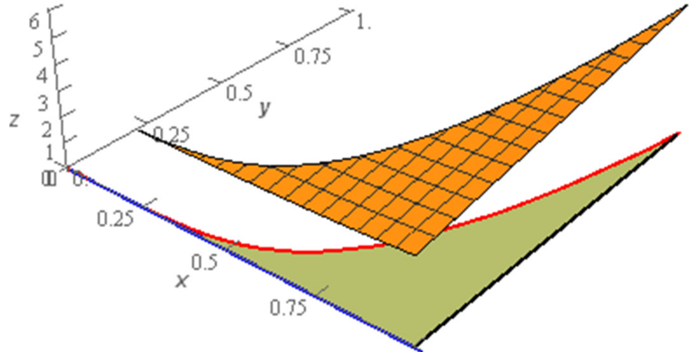
Trouver l'aire des surfaces suivantes.

5. L'aire du plan $z = 6 - 3x - 2y$ dans le premier octant.



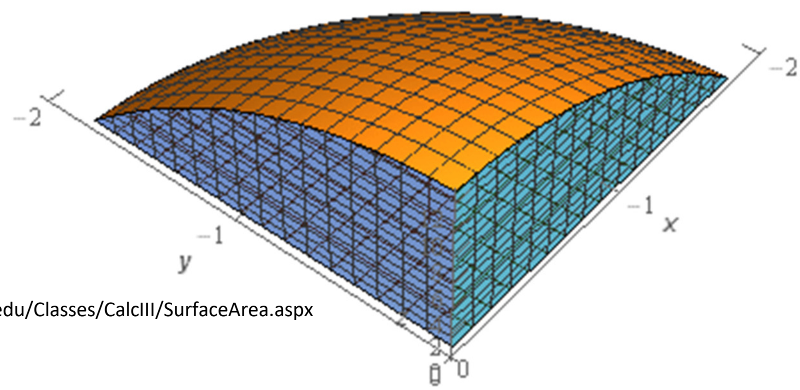
tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/SurfaceArea.aspx

6. L'aire de la surface décrite par $z = 3 + 2y + ¼x^4$ au-dessus de la zone dans le plan *xy* délimitée par $y = x^5$, $x = 1$ et $y = 0$.



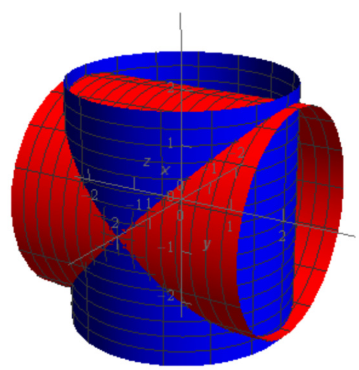
tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/SurfaceArea/Prob3.aspx

7. L'aire de la surface décrite par $z = 13 - 4x^2 - 4y^2$ au-dessus de $z = 1$ dans le deuxième quadrant (quand x est positif et y est négatif)

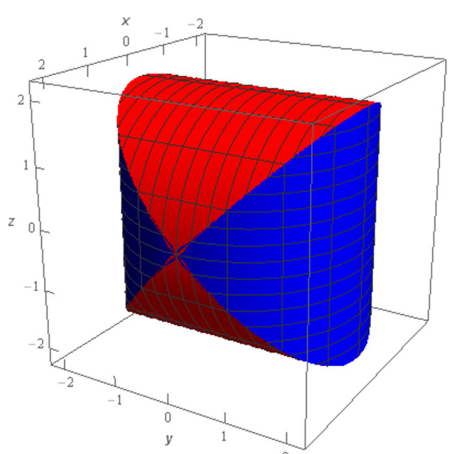


tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/SurfaceArea.aspx

8. Un objet est formé par la rencontre des deux cylindres



$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{et} \quad x^2 + z^2 = 4$$



L'objet a donc la forme montrée à gauche.

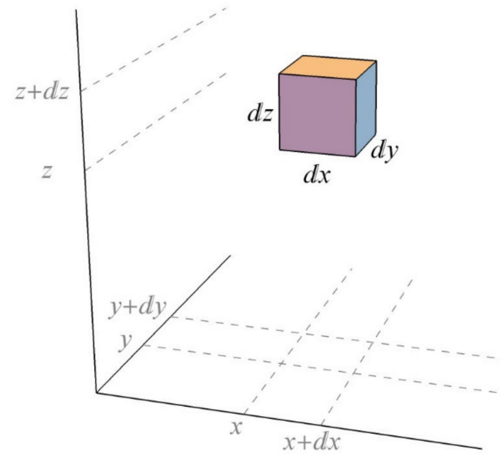
Quelle est la surface de cet objet ?

tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/SurfaceArea/Prob5.aspx

10. Les intégrales triples

Avec l'intégrale double, la région d'intégration était une surface dont l'aire était toute séparée en petits morceaux de surface.

Maintenant, la région d'intégration va devenir un volume. Ce volume sera séparé en petits morceaux infinitésimaux dV. En coordonnées cartésiennes, on va séparer le volume en petits morceaux de dimensions dx, dy et dz.



www.its.caltech.edu/~teinav/Lectures/Ph%201b/Math%20Boot%20Camp%20-%20Volume%20Elements.pdf

Le volume de ce petit élément est

Élément de volume en coordonnées cartésiennes

$$dV = dxdydz$$

(On peut changer l'ordre des variables selon l'ordre d'intégration.)

Voyons ce qu'on peut faire avec une telle intégrale.

Calcul de volume avec une intégrale triple

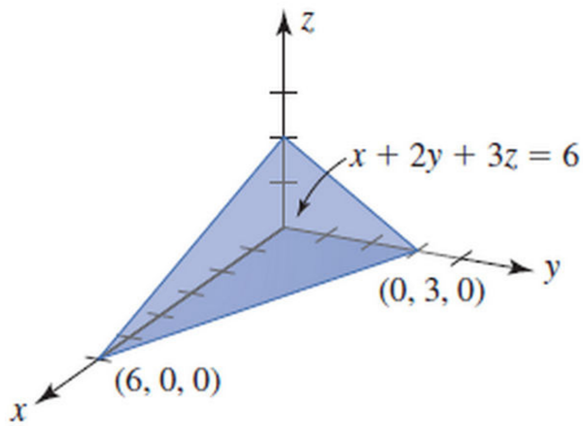
On peut premièrement calculer le volume d'une région d'intégration en sommant simplement le volume de tous les petits éléments de volume. Comme cette somme est une intégrale, on arrive à

Volume d'une région d'intégration en 3D

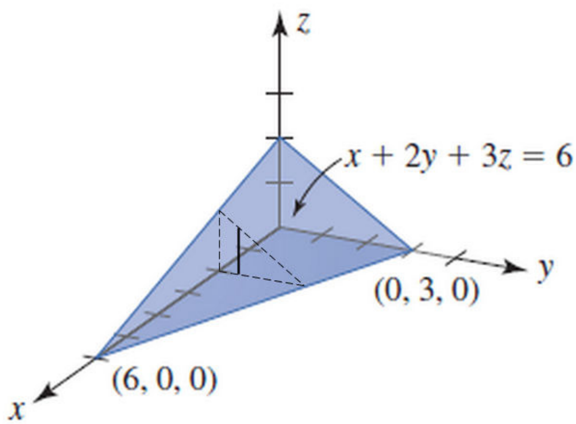
$$V = \iiint dV$$

Il ne reste qu'à trouver les bornes d'intégration, mais c'est là tout le défi… Prenons un exemple pour bien comprendre comment on y arrive.

Ici, on veut calculer le volume de ce tétraèdre.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/use-double-integral-find-volume-solid-shown-figure-q12339639



Ici, on va commencer par intégrer en z. On trace alors une petite ligne dans la direction des z.

Cette ligne va de z = 0 jusqu'au plan, donc jusqu'à

$$z = \frac{6-x-2y}{3}$$

Ce sont nos bornes pour z.

Notre première intégrale est donc

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} dzdydx \\ &= \int\int [z]_0^{\frac{6-x-2y}{3}} dydx \\ &= \int\int \left(\left[\frac{6-x-2y}{3}\right]-[0]\right)dydx \\ &= \int\int \left(\frac{6-x-2y}{3}\right)dydx \end{aligned}$$

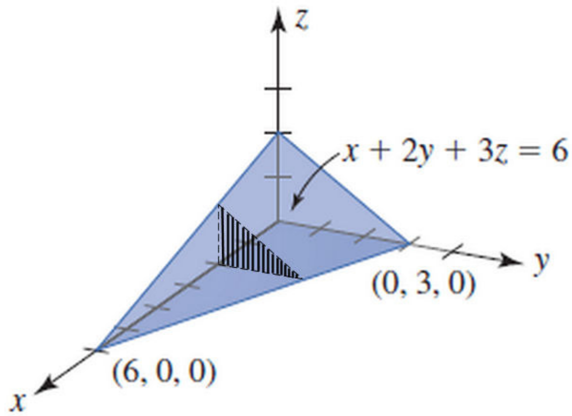
(Notez que si on avait cherché ce volume avec une intégrale double, on aurait commencé avec l'intégrale qu'on vient d'obtenir.)

Avec cette première intégrale, on obtient le volume de la petite colonne représenté par notre ligne.

$$dV = \left(\frac{6-x-2y}{3}\right)dxdy$$

Le terme entre parenthèses est la hauteur de cette colonne et $dxdy$ est l'aire de la base de cette colonne.

Ce volume dépend de la position en x et y. C'est normal puisque la hauteur de la ligne dépend de la position de la ligne.



Ensuite, on va additionner ces lignes dans le sens des y. Voici plusieurs de ces lignes.

On reste toujours à la même valeur de x. On déplace la ligne uniquement dans la direction des y.

Pour trouver les bornes en y, on détermine les valeurs de y des première et dernière lignes. La première de ces lignes est à y = 0 et la dernière ligne est à la droite qui va du point (0,3,0) au point (6,0,0). Cette droite est l'intersection de la surface avec le plan xy. Comme le plan xy est à z = 0, l'équation de cette droite est

$$x+2y=6$$

La dernière petite ligne verticale est donc à

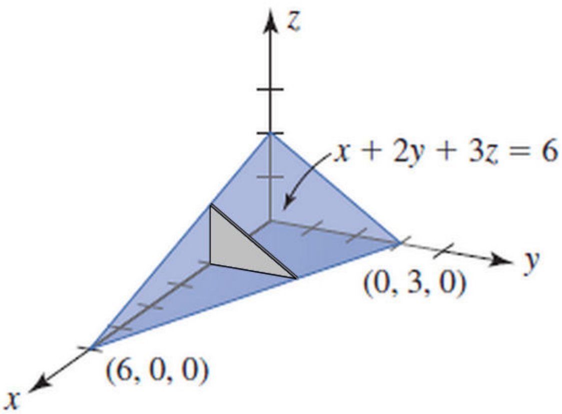
$$y=\frac{6-x}{2}$$

Nos bornes en y sont donc 0 et $(6-x)/2$.

Notre deuxième intégrale est donc

$$\begin{aligned}
V &= \int \int_0^{\frac{6-x}{2}} \left(\frac{6-x-2y}{3}\right) dydx \\
&= \int \left[\frac{6y}{3}-\frac{xy}{3}-\frac{y^2}{3}\right]_0^{\frac{6-x}{2}} dx \\
&= \int \left(\left[\frac{6\left(\frac{6-x}{2}\right)}{3}-\frac{x\left(\frac{6-x}{2}\right)}{3}-\frac{\left(\frac{6-x}{2}\right)^2}{3}\right]-[0]\right) dx \\
&= \int \left((6-x)-\frac{6x-x^2}{6}-\frac{36-12x+x^2}{12}\right) dx \\
&= \int \left(3-x+\frac{x^2}{12}\right) dx
\end{aligned}$$

Avec cette deuxième intégrale, on obtient le volume de cette petite couche montrée sur la figure de droite.



$$dV = \left(3 - x + \frac{x^2}{12}\right)dx$$

Le terme entre parenthèses est l'aire de cette couche et dx est l'épaisseur de la couche. Ce volume dépend de la position en x. C'est normal puisque cette couche est plus grande pour des petites valeurs de x et est nul à $x = 6$.

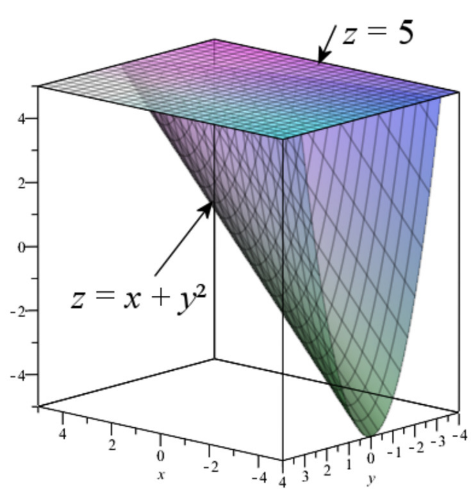
Finalement, on additionne de telles couches pour couvrir tout le volume de la région d'intégration. Pour trouver les bornes en x, on détermine où sont les première et dernière couches. La première couche sera à $x = 0$ et la dernière couche sera à $x = 6$. Ce sont nos bornes pour l'intégrale en x.

Ainsi, le volume de cette région est donné par

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 \left(3 - x + \frac{x^2}{12}\right)dx \\ &= \left[3x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{36}\right]_0^6 \\ &= \left(\left[3\cdot 6 - \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{36}\right] - [0]\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

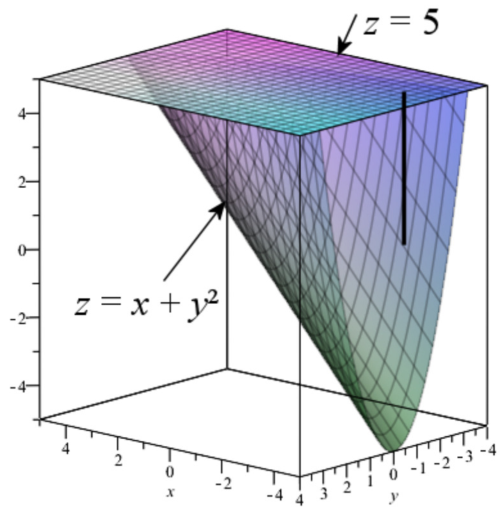
Exemple

Utiliser l'intégrale triple pour calculer le volume de cette région.



Le volume de cette région est donné par

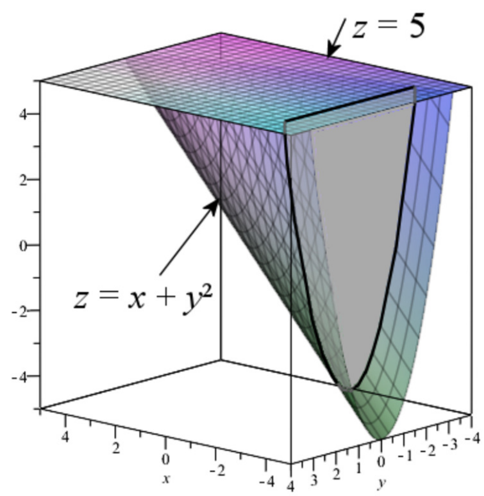
$$V = \iiint dV$$



Pour trouver les bornes, traçons une ligne parallèle à l'axe des z.

Cette ligne va de $z = x + y^2$ à $z = 5$. Ce sont nos bornes pour z.

Ensuite, on additionne les lignes dans le sens des y pour faire une mince couche.



C'est la partie supérieure de cette couche qui en détermine les limites (c'est là que la tranche est la plus large). Sur ce plan $z = 5$, la surface trace une limite qui est donnée par

$$5 = x + y^2$$

(On a simplement changé le z par 5.) La première ligne est à $y = -\sqrt{5-x}$ et la dernière est à $y = \sqrt{5-x}$. Ce sont nos bornes pour y.

Finalement, on additionne des couches dans le sens des x pour faire tout le volume. La première couche est à x = -5 et la dernière est à $x = 5$. Ce sont nos bornes pour x.

Ainsi, le volume est

$$V = \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{5-x}}^{\sqrt{5-x}} \int_{x+y^2}^{5} dzdydx$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{5-x}}^{\sqrt{5-x}} [z]_{x+y^2}^{5} \, dydx \\ &= \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{5-x}}^{\sqrt{5-x}} \left(5 - x - y^2\right) dydx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

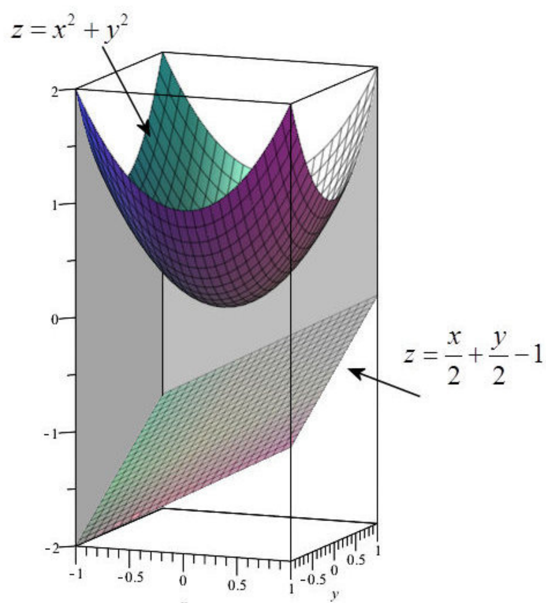
$$V=\int_{-5}^{5}\left[5y-xy-\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{5-x}}^{\sqrt{5-x}}dx$$
$$=\int_{-5}^{5}\left(\left[5\sqrt{5-x}-x\sqrt{5-x}-\frac{(5-x)^{3/2}}{3}\right]-\left[-5\sqrt{5-x}+x\sqrt{5-x}+\frac{(5-x)^{3/2}}{3}\right]\right)dx$$
$$=2\int_{-5}^{5}\left(5\sqrt{5-x}-x\sqrt{5-x}-\frac{(5-x)^{3/2}}{3}\right)dx$$

Finalement, la troisième intégrale donne

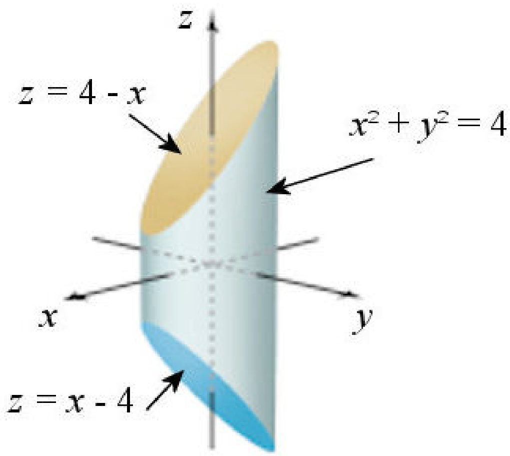
$$V=2\left[\frac{-10}{3}(5-x)^{3/2}+\frac{2}{15}(5-x)^{3/2}(3x+10)+\frac{2}{15}(5-x)^{5/2}\right]_{-5}^{5}$$
$$=2\left([0]-\left[\frac{-10}{3}(10)^{3/2}+\frac{2}{15}(10)^{3/2}(-5)+\frac{2}{15}(10)^{5/2}\right]\right)$$
$$=\frac{20}{3}(10)^{3/2}+\frac{4}{15}(10)^{3/2}(5)-\frac{4}{15}(10)^{5/2}$$
$$=\left(\frac{20}{3}(10)+\frac{4}{15}(10)(5)-\frac{4}{15}(10)^2\right)\sqrt{10}$$
$$=\frac{160\sqrt{10}}{3}$$

SÉRIE D'EXERCICES 10

1. Quel est le volume de cette région ?

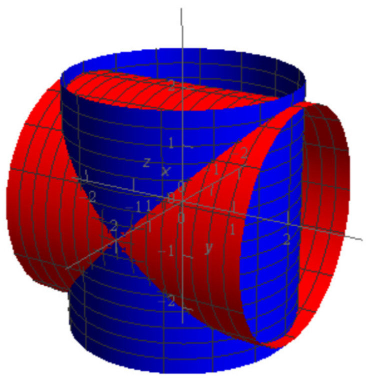


2. Quel est le volume de cette région ?



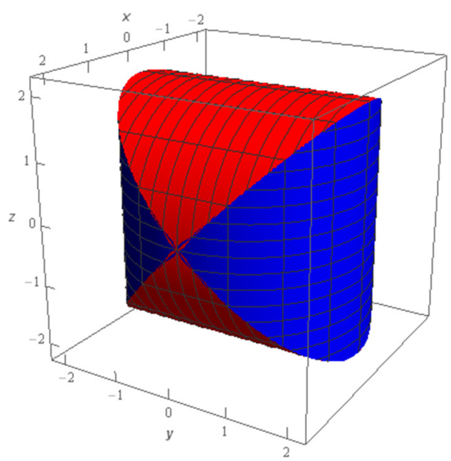
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/find-volume-following-solid-using-triple-integrals-wedge-cylinder-x-2-25y-2-25-created-pla-q7948315

3. Un objet est formé par la rencontre des deux cylindres $x^2 + y^2 = 4$ et $x^2 + z^2 = 4$



tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/SurfaceArea/Prob5.aspx

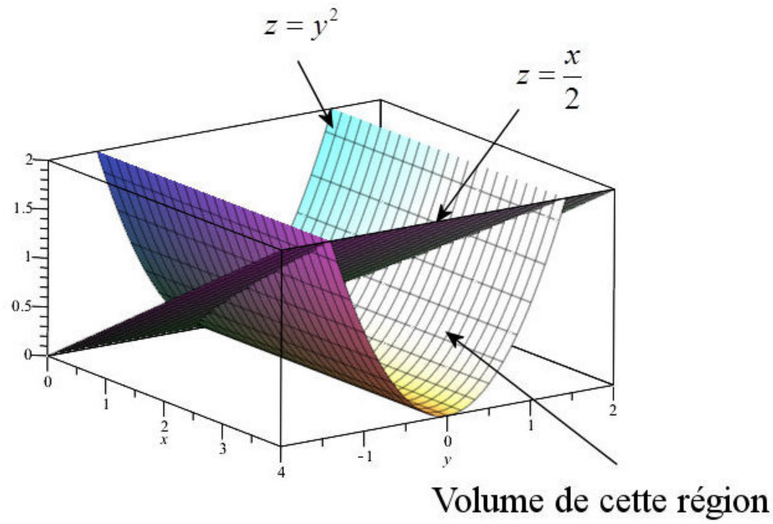
L'objet a donc la forme suivante.



tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/SurfaceArea/Prob5.aspx

Quel est le volume de cet objet ?

4. Quel est le volume de cette région (sous le plan $z = x/2$, au-dessus de $z = y^2$ et entre $x = 0$ et $x = 4$) ?



Calcul de masse avec une intégrale triple

On veut maintenant calculer la masse d'un objet ayant une masse volumique variable. On commence par calculer la masse d'un petit élément infinitésimal en multipliant la masse volumique par le volume. La masse volumique est habituellement dénotée par ρ, mais on va plutôt utiliser $\tilde{\rho}$ pour éviter la confusion avec une autre variable qui sera utilisée plus loin. On arrive alors à

$$dm = \tilde{\rho} dV$$

On calcule ensuite la masse d'une région d'intégration en sommant simplement la masse de tous les petits éléments de volume. Comme cette somme est une intégrale, on arrive à l'intégrale suivante.

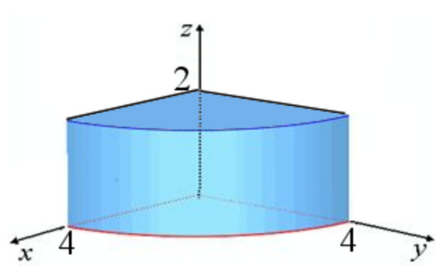
Masse d'un objet délimité par une région d'intégration en 3D

$$M = \iiint \tilde{\rho} dV$$

Exemple

Quelle est la masse de cette partie de cylindre si sa masse volumique est donnée par la formule suivante ?

$$\tilde{\rho} = 3\tfrac{kg}{m^4} x + 2\tfrac{kg}{m^4} y + 1\tfrac{kg}{m^4} z$$

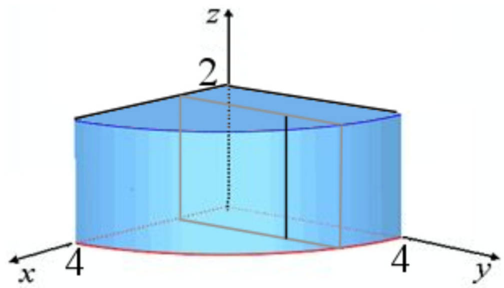


slideplayer.com/slide/7362196/

La masse de cette région est donnée par

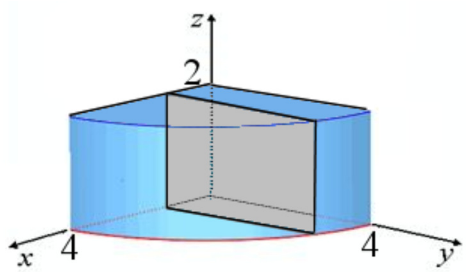
$$\begin{aligned} M &= \iiint \tilde{\rho} dV \\ &= \iiint \left(3\tfrac{kg}{m^4}x + 2\tfrac{kg}{m^4}y + 1\tfrac{kg}{m^4}z\right) dV \end{aligned}$$

Pour trouver les bornes, traçons une ligne parallèle à l'axe des z.



Cette ligne va de $z = 0$ à $z = 2\text{ m}$. Ce sont nos bornes pour z.

Ensuite, on additionne les lignes dans le sens des y pour faire une mince couche.



La première de ces lignes est à $y = 0$ et la dernière est au cercle de rayon 4 m, donc à $y = \sqrt{16m^2 - x^2}$. Ce sont nos bornes pour y.

Finalement, on additionne des couches dans le sens des x pour faire tout le volume. La première couche est à $x = 0$ et la dernière est à $x = 4\text{ m}$. Ce sont nos bornes pour x.

Ainsi, la masse est

$$M = \int_0^{4m} \int_0^{\sqrt{16m^2 - x^2}} \int_0^2 \left(3\tfrac{kg}{m^4}x + 2\tfrac{kg}{m^4}y + 1\tfrac{kg}{m^4}z\right) dzdydx$$

Il ne reste qu'à résoudre. La première intégrale donne

$$M = \int_0^{4m} \int_0^{\sqrt{16m^2 - x^2}} \left[3\tfrac{kg}{m^4}xz + 2\tfrac{kg}{m^4}yz + 1\tfrac{kg}{m^4}\frac{z^2}{2}\right]_0^{2m} dydx$$

$$=\int_0^{4m}\int_0^{\sqrt{16m^2-x^2}}\left(\left[3\tfrac{kg}{m^4}x\cdot 2m+2\tfrac{kg}{m^4}y\cdot 2m+1\tfrac{kg}{m^4}\frac{(2m)^2}{2}\right]-[0]\right)dydx$$
$$=\int_0^{4m}\int_0^{\sqrt{16m^2-x^2}}\left(6\tfrac{kg}{m^3}x+4\tfrac{kg}{m^3}y+2\tfrac{kg}{m^2}\right)dydx$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}M&=\int_0^{4m}\left[6\tfrac{kg}{m^3}x\cdot y+2\tfrac{kg}{m^3}y^2+2\tfrac{kg}{m^2}y\right]_0^{\sqrt{16m^2-x^2}}dx\\&=\int_0^{4m}\left(\left[6\tfrac{kg}{m^3}x\cdot\sqrt{16m^2-x^2}+2\tfrac{kg}{m^3}\left(16m^2-x^2\right)+2\tfrac{kg}{m^2}\sqrt{16m^2-x^2}\right]-[0]\right)dx\\&=\int_0^{4m}\left(6\tfrac{kg}{m^3}x\cdot\sqrt{16m^2-x^2}+32\tfrac{kg}{m}-2\tfrac{kg}{m^3}x^2+2\tfrac{kg}{m^2}\sqrt{16m^2-x^2}\right)dx\end{aligned}$$

Finalement, la dernière intégrale donne

$$\begin{aligned}M&=\left[-2\tfrac{kg}{m^3}\left(16m^2-x^2\right)^{3/2}+32\tfrac{kg}{m}\cdot x-2\tfrac{kg}{m^3}\frac{x^3}{3}+2\tfrac{kg}{m^2}\left(\frac{x\sqrt{16m^2-x^2}}{2}+8m^2\arcsin\left(\frac{x}{4m}\right)\right)\right]_0^{4m}\\&=\left[32\tfrac{kg}{m}\cdot 4m-2\tfrac{kg}{m^3}\frac{(4m)^3}{3}+2\tfrac{kg}{m^2}\cdot 8m^2\arcsin\left(\frac{4m}{4m}\right)\right]-\left[-2\tfrac{kg}{m^3}\left(16m^2\right)^{3/2}\right]\\&=\left[128kg-\frac{128kg}{3}+16kg\cdot\frac{\pi}{2}\right]-[-128kg]\\&\approx 238.466kg\end{aligned}$$

Calcul de la position du centre de masse avec une intégrale triple

On veut maintenant calculer la position du centre de masse d'un objet. On se rappelle que la position du centre de masse est donnée par

$$x_{cm}=\frac{1}{M}\sum x_i m_i$$

On sépare le volume en petite partie de volume ΔV. La masse de ce petit morceau est

$$m_i=\tilde{\rho}_i\Delta V_i$$

On a alors

$$x_{cm}=\frac{1}{M}\sum x_i\tilde{\rho}_i\Delta V_i$$

Si on prend des morceaux très petits, la somme devient une intégrale et on a

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\iiint x\tilde{\rho}dV$$

On a la même chose pour les autres composantes.

Position du centre de masse d'un objet délimité par une région d'intégration en 3D

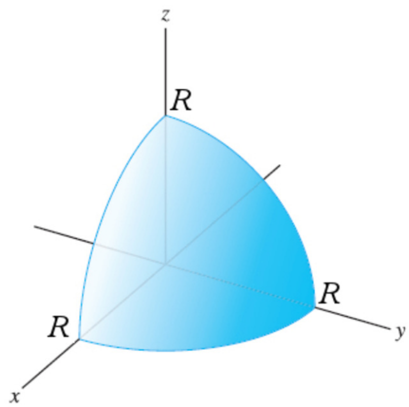
$$x_{cm} = \frac{1}{M}\iiint x\tilde{\rho}dV$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\iiint y\tilde{\rho}dV$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\iiint z\tilde{\rho}dV$$

Exemple

Quelle est la position du centre de masse de cette partie de sphère dans le premier octant si sa masse volumique est constante ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/find-z-coordinate-center-mass-first-octant-unit-sphere-mass-density-x-y-z -3y-round-answer--q6999335

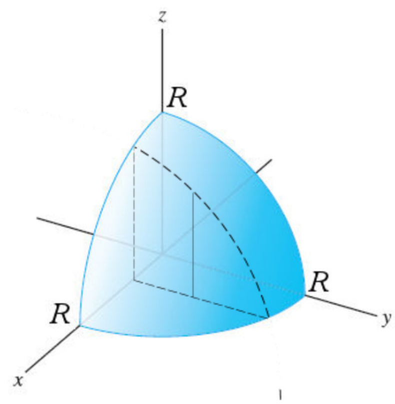
Par symétrie, la position en x, en y et en z sera la même.

La position du centre de masse de cette région est donnée par

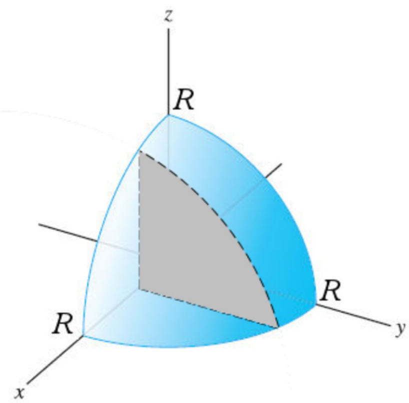
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\iiint y\tilde{\rho}dV$$

(On choisit de prendre y puisque l'intégrale est plus facile à faire dans ce cas. En fait, on ne peut pas le savoir d'avance que c'est plus facile avec y en premier. C'est le genre de chose qu'on apprend en tentant les calculs pour x et y et en comparant les deux solutions.)

Pour trouver les bornes, traçons une ligne parallèle à l'axe des z.



Cette ligne va de z = 0 jusqu'à la sphère $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Ce sont nos bornes pour z.



Ensuite, on additionne les lignes dans le sens des y pour faire une mince couche.

La première ligne est à y = 0 et la dernière ligne est au cercle de rayon R, donc à $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Ce sont nos bornes pour y.

Finalement, on additionne des couches dans le sens des x pour faire tout le volume. La première couche est à x = 0 et la dernière est à x = R. Ce sont nos bornes pour x.

Ainsi, la position en y du centre de masse est

$$y_{cm}=\frac{1}{M}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} y\tilde{\rho}dzdydx$$

Il ne reste qu'à résoudre.

$$\begin{aligned}
y_{cm}&=\frac{\tilde{\rho}}{M}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left[yz\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dydx\\
&=\frac{\tilde{\rho}}{M}\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}y\sqrt{R^2-x^2-y^2}dydx\\
&=\frac{\tilde{\rho}}{M}\int_0^R\left[\frac{-\left(R^2-x^2-y^2\right)^{3/2}}{3}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx\\
&=\frac{\tilde{\rho}}{3M}\int_0^R\left(\left[0\right]-\left[-\left(R^2-x^2\right)^{3/2}\right]\right)dx\\
&=\frac{\tilde{\rho}}{3M}\int_0^R\left(R^2-x^2\right)^{3/2}dx\\
&=\frac{\tilde{\rho}}{3M}\left[\frac{x\left(R^2-x^2\right)^{3/2}}{4}+\frac{3R^2x\sqrt{R^2-x^2}}{8}+\frac{3}{8}R^4\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R\\
&=\frac{\tilde{\rho}}{3M}\left(\left[0+0+\frac{3}{8}R^4\arcsin 1\right]-\left[0+0+0\right]\right)\\
&=\frac{\tilde{\rho}}{3M}\left(\frac{3}{8}R^4\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{\tilde{\rho}\pi R^4}{16M}
\end{aligned}$$

Pour finalement avoir la réponse, il nous faut la masse de la sphère. Puisque la masse volumique est constante, la masse est simplement la masse volumique multipliée par le volume. Ce volume est le huitième du volume d'une sphère.

$$\begin{aligned} M &= \tilde{\rho} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= \tilde{\rho} \cdot \frac{1}{6} \pi R^3 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{\tilde{\rho} \pi R^4}{16} \cdot \frac{1}{M} \\ &= \frac{\tilde{\rho} \pi R^4}{16} \cdot \frac{6}{\tilde{\rho} \pi R^3} \\ &= \frac{3R}{8} \end{aligned}$$

La position du centre de masse est donc

$$x_{cm} = \frac{3}{8} R \qquad y_{cm} = \frac{3}{8} R \qquad z_{cm} = \frac{3}{8} R$$

Calcul du moment d'inertie avec une intégrale triple

On veut maintenant calculer le moment d'inertie d'un objet. On se rappelle que le moment d'inertie est donné par

$$I = \sum r_i^2 m_i$$

On sépare le volume en petites parties ayant un volume de ΔV. La masse de ce petit morceau est $m_i = \rho_i \Delta V_i$.

On a alors

$$I_{cm} = \sum r_i^2 \tilde{\rho}_i \Delta V_i$$

Si on prend des morceaux très petits, la somme devient une intégrale et on a

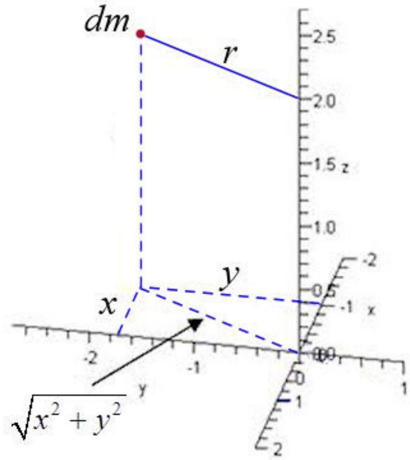
$$I = \iiint r^2 \tilde{\rho} dV$$

Si l'axe de rotation est l'axe des z, la distance entre l'axe et chaque morceau est

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Le moment d'inertie est alors

$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2 \right) \tilde{\rho} dV$$



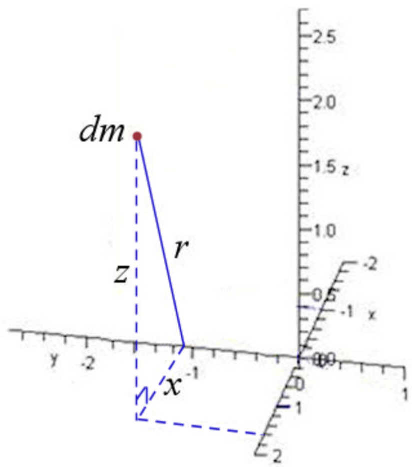
moodle.capilanou.ca/mod/book/view.php?id=328667&chapterid=1412

Si l'axe de rotation est l'axe des y, la distance entre l'axe et chaque morceau est

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Le moment d'inertie est alors

$$I_y = \iiint \left(x^2 + z^2 \right) \tilde{\rho} dV$$

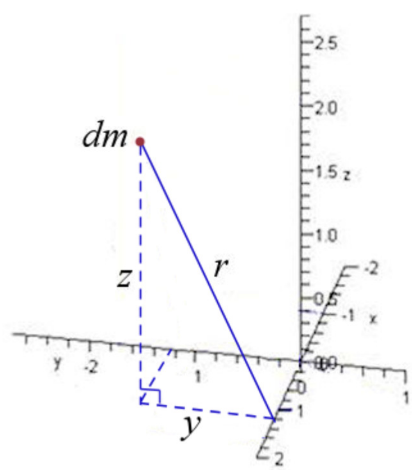


Si l'axe de rotation est l'axe des x, la distance entre l'axe et chaque morceau est

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

Le moment d'inertie est alors

$$I_x = \iiint \left(y^2 + z^2 \right) \tilde{\rho} dV$$



On a donc les moments d'inertie suivants.

Moment d'inertie d'un objet délimité par une région d'intégration en 3D

$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2\right) \tilde{\rho} dV$$
$$I_y = \iiint \left(x^2 + z^2\right) \tilde{\rho} dV$$
$$I_x = \iiint \left(y^2 + z^2\right) \tilde{\rho} dV$$

Exemple

Une sphère de rayon R et de masse M a une masse volumique constante. Montrez que le moment d'inertie de cette sphère si l'axe de rotation passe par le centre de la sphère est donné par la formule suivante.

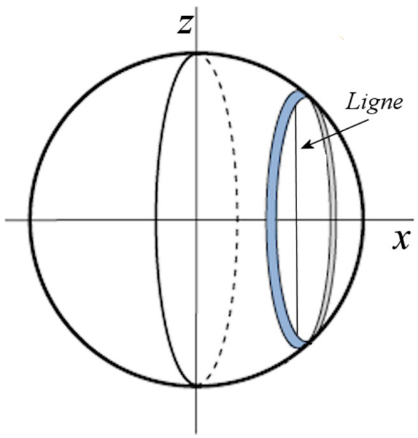
$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

On peut prendre n'importe quel axe dans le cas d'une sphère puisqu'il y a symétrie. Ici, on va prendre l'axe des z comme axe de rotation. Le moment d'inertie est

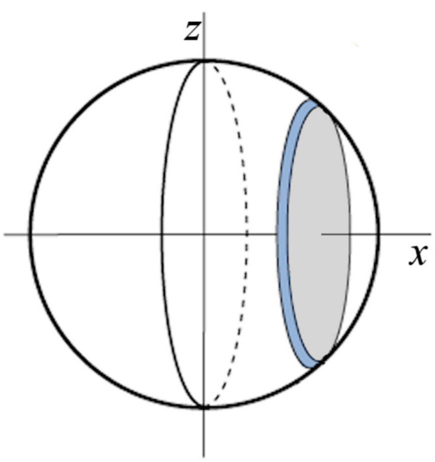
$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2\right) \tilde{\rho} dV$$

Pour trouver les bornes, traçons une ligne parallèle à l'axe des z.

Cette ligne va du bas de la sphère $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ jusqu'au-dessus de la sphère $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Ce sont nos bornes pour z.

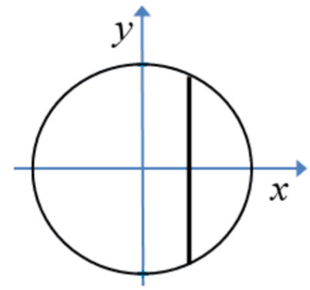


www.mathalino.com/reviewer/derivation-formulas/derivation-formula-total-surface-area-sphere-integration



Ensuite, on additionne les lignes dans le sens des y pour faire une mince couche.

Vue de haut, voici cette mince couche.



La couche commence d'un côté du cercle de rayon R, à $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ et se termine de l'autre côté du cercle de rayon R, donc à $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Ce sont nos bornes pour y.

Finalement, on additionne des couches dans le sens des x pour faire tout le volume. La première couche est à x = -R et la dernière est à x = R. Ce sont nos bornes pour x.

Ainsi, le moment d'inertie est

$$I_z=\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)\tilde{\rho}dzdydx$$

Il ne reste qu'à résoudre. La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_z&=\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left[\left(x^2+y^2\right)z\right]_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dydx\\
&=\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\left[\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]-\left[-\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]\right)dydx\\
&=2\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)dydx
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_z=2\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\Bigg[&\left(\frac{yx^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{2}+\frac{x^2\left(R^2-x^2\right)}{2}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right)+\\
&\left(\frac{-y\left(R^2-x^2-y^2\right)^{3/2}}{4}+\frac{\left(R^2-x^2\right)y\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{8}+\frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{8}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right)\Bigg]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_z=2\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\Bigg[&\left(0+\frac{x^2\left(R^2-x^2\right)}{2}\arcsin(1)\right)+\left(0+0+\frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{8}\arcsin(1)\right)\Bigg]-\\
&\left[\left(0+\frac{x^2\left(R^2-x^2\right)}{2}\arcsin(-1)\right)+\left(0+0+\frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{8}\arcsin(-1)\right)\right]dx
\end{aligned}$$

$$I_z = 2\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\left[\left(0+\frac{x^2\left(R^2-x^2\right)}{2}\frac{\pi}{2}\right)+\left(0+0+\frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{8}\frac{\pi}{2}\right)\right]-$$

$$\left[\left(0+\frac{x^2\left(R^2-x^2\right)}{2}\frac{-\pi}{2}\right)+\left(0+0+\frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{8}\frac{-\pi}{2}\right)\right]dx$$

$$I_z = 2\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\left(\frac{x^2\left(R^2-x^2\right)}{2}\pi+\frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{8}\pi\right)dx$$

Finalement, la dernière intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_z &= 2\pi\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\left(\frac{x^2\left(R^2-x^2\right)}{2}+\frac{\left(R^2-x^2\right)^2}{8}\right)dx \\
&= 2\pi\tilde{\rho}\int_{-R}^{R}\left(\frac{x^2R^2-x^4}{2}+\frac{R^4-2R^2x^2+x^4}{8}\right)dx \\
&= 2\pi\tilde{\rho}\left[\frac{x^3R^2}{6}-\frac{x^5}{10}+\frac{R^4x}{8}-\frac{R^2x^3}{12}+\frac{x^5}{40}\right]_{-R}^{R} \\
&= 2\pi\tilde{\rho}\left(\left[\frac{R^5}{6}-\frac{R^5}{10}+\frac{R^5}{8}-\frac{R^5}{12}+\frac{R^5}{40}\right]-\left[\frac{-R^5}{6}-\frac{-R^5}{10}+\frac{-R^5}{8}-\frac{-R^5}{12}+\frac{-R^5}{40}\right]\right) \\
&= \frac{8\pi\tilde{\rho}R^5}{15}
\end{aligned}$$

Puisque la masse de la sphère est

$$M = \tilde{\rho}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

on a

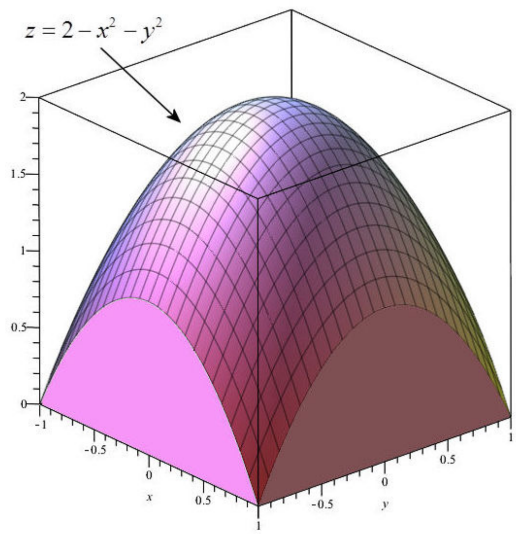
$$\tilde{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned}
I_z &= \frac{8\pi R^5}{15}\cdot\frac{3M}{4\pi R^3} \\
&= \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}$$

SÉRIE D'EXERCICES 11

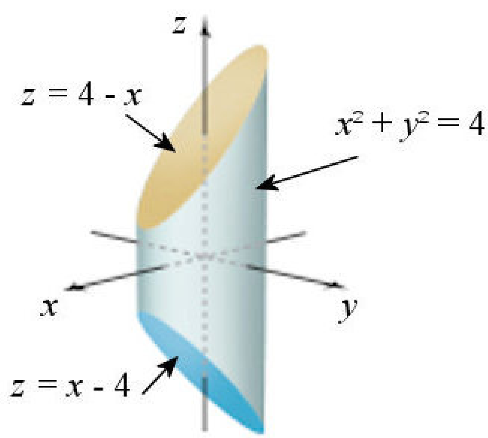
1. La densité de cet objet est constante et vaut 1800 kg/m³.



a) Quelle est la masse de cet objet ?
b) Où est le centre de masse de cet objet ?
c) Quel est le moment d'inertie de cet objet si l'axe de rotation est l'axe des *z* ?

2. La densité de cet objet, dont les dimensions sont données en cm, est donnée par

$$\tilde{\rho} = 3\tfrac{g}{cm^5}x^2 + 2\tfrac{g}{cm^3}$$



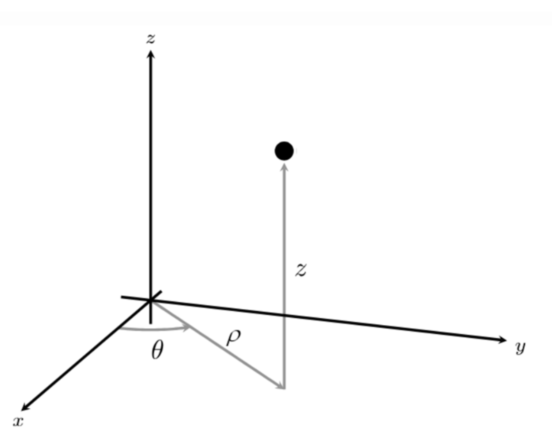
a) Quelle est la masse de cet objet ?
b) Où est le centre de masse de cet objet ?
c) Quel est le moment d'inertie de cet objet si l'axe de rotation est l'axe des *z* ?

11. Les coordonnées cylindriques

Que sont les coordonnées cylindriques ?

On peut aussi séparer notre région d'intégration autrement en utilisant un autre système de coordonnées.

On va premièrement examiner les coordonnées cylindriques. Dans ce système de coordonnées, on donne la position avec ρ, θ et z.

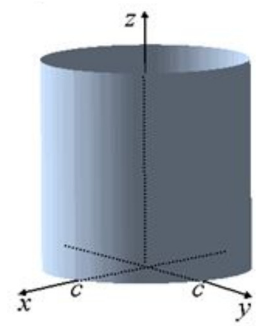


ximera.osu.edu/mooculus/calculus3/commonCoordinates /digInCylindricalCoordinates

C'est essentiellement les coordonnées polaires auxquelles on a ajouté un axe z.

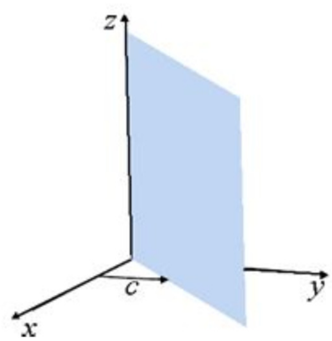
En coordonnées sphériques, quelques surfaces ont des équations assez simples.

Premièrement, l'équation $\rho = c$ (une constante) est l'ensemble des points qui sont à la même distance de l'axe des z. On a alors un cylindre de rayon c.



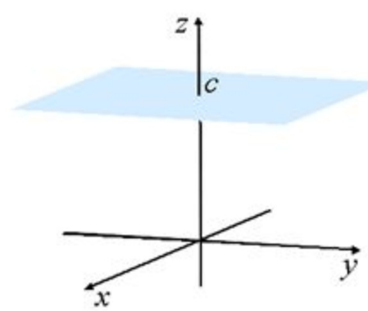
slideplayer.com/slide/7362196/

Deuxièmement, l'équation $\theta = c$ (une constante) est l'ensemble des points qui sont au même angle c par rapport à l'axe des x. Ces points forment un plan passant par l'axe des z.



slideplayer.com/slide/7362196/

Finalement, l'équation $z = c$ (une constante) est l'ensemble des points qui sont à la même hauteur par rapport au plan xy.



slideplayer.com/slide/7362196/

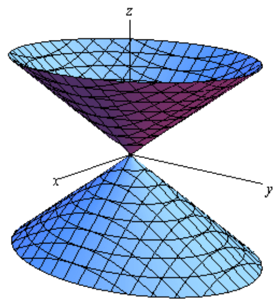
Ainsi, les coordonnées cylindriques seront particulièrement utiles pour des régions d'intégration limitées par ces surfaces.

Notez aussi que l'équation d'un cône circulaire passant par l'origine et ayant pour axe l'axe des z est particulièrement simple en coordonnées cylindriques. (Par cône circulaire, on veut dire un cône qui a le même étirement en x et en y. La rencontre de ce cercle et d'un plan à une certaine hauteur est donc un cercle.) En coordonnées cartésiennes, l'équation de ce cône est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(Les diviseurs de x^2 et de y^2 sont identiques puisque l'étirement est le même en x et en y.) En coordonnées cylindriques, on a

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$$
$$\frac{\rho^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$$
$$\frac{\rho}{a}=\frac{z}{c}$$
$$z=\frac{c}{a}\rho$$
$$z=k\rho$$

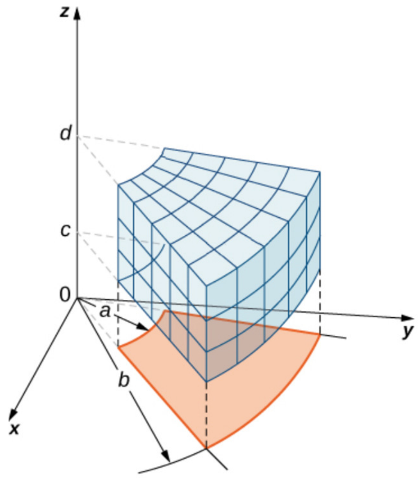


(On a simplement appelé k le résultat de la division c/a. Plus ce k est élevé, plus le cône est étiré dans le sens de l'axe des z.) Si k = 1, alors le cône est à un angle de 45° de l'axe des z (figure de droite).

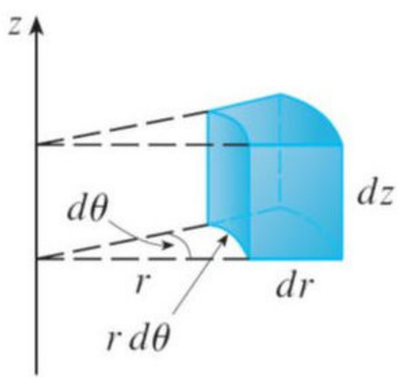
tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/QuadricSurfaces.aspx

Élément de volume en coordonnées cylindriques

Voyons ce que devient l'élément de volume avec de telles coordonnées. Le volume est maintenant séparé ainsi.



math.libretexts.org/TextMaps/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/15%3A_Multiple_Integration/15.5%3A_Triple_Integrals_in_Cylindrical_and_Spherical_Coordinates



Voici un de ces éléments de volume.

slideplayer.com/slide/8062138/

La surface de la base de cet élément est identique à l'élément de surface en coordonnées polaires et la hauteur est dz. Le volume de cet élément est donc

$$\begin{aligned} dV &= (\text{Aire de la base}) \cdot \text{hauteur} \\ &= (\rho d\rho d\theta) dz \\ &= \rho d\rho d\theta dz \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale triple en coordonnées cylindriques est

$$\iiint f(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

Notez qu'on pouvait arriver aussi à ce résultat avec le jacobien puisqu'on pourrait prouver qu'avec un changement de variable dans lequel on change x,y,z pour les variables u,v,w, l'intégrale devient

$$\iiint f(x,y,z)\, dzdydx \to \iiint g(u,v,w) \left|\det J\right| dudvdw$$

On sait ce qu'est le jacobien pour les intégrales doubles, mais ce n'est pas bien difficile de deviner ce que devient le jacobien pour les intégrales triples. Si on change nos variables x,y,z pour les variables u,v,w, alors le jacobien est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Voyons ce qu'on obtient ici en coordonnées cylindriques. Dans ce cas, les règles de transformation sont

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Le jacobien est alors

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial\theta} & \frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho\sin\theta)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\rho\sin\theta)}{\partial\theta} & \frac{\partial(\rho\sin\theta)}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminent de cette matrice est

$$\begin{aligned}\det J &= 1\left(\rho\cos\theta\cdot\cos\theta - -\rho\sin\theta\cdot\sin\theta\right)\\ &= \rho\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\\ &= \rho\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale devient

$$\begin{aligned}\iiint f(\rho,\theta,\mathrm{z})\left|\det J\right| d\rho d\theta dz &= \iiint f(\rho,\theta,\mathrm{z})\left|\rho\right| d\rho d\theta dz\\ &= \iiint f(\rho,\theta,\mathrm{z})\rho d\rho d\theta dz\end{aligned}$$

C'est le même résultat que ce qu'on avait obtenu précédemment.

On peut donc conclure que

Élément de volume en coordonnées cylindriques

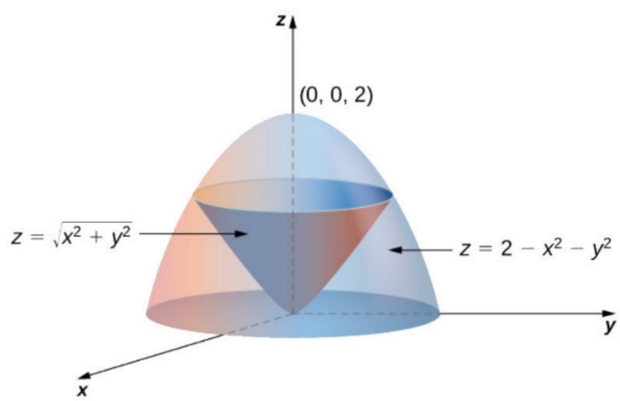
$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

Intégrales triples en coordonnées cylindriques

On peut maintenant utiliser les coordonnées cylindriques pour calculer des intégrales triples.

Exemple

Quel est le volume entre ce cône et ce paraboloïde ?



philschatz.com/calculus-book/contents/m53967.html

Pour trouver le volume, il faut faire l'intégrale suivante.

$$V = \iiint dV$$

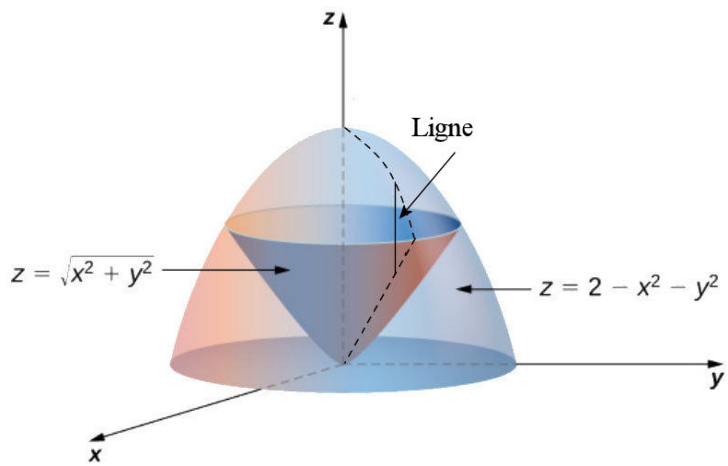
Le fait qu'on ait une symétrie circulaire autour de l'axe des z nous suggère fortement de passer en coordonnées cylindriques. L'intégrale devient donc

$$V = \iiint \rho d\rho d\theta dz$$

En coordonnées cylindriques, les équations des deux surfaces sont

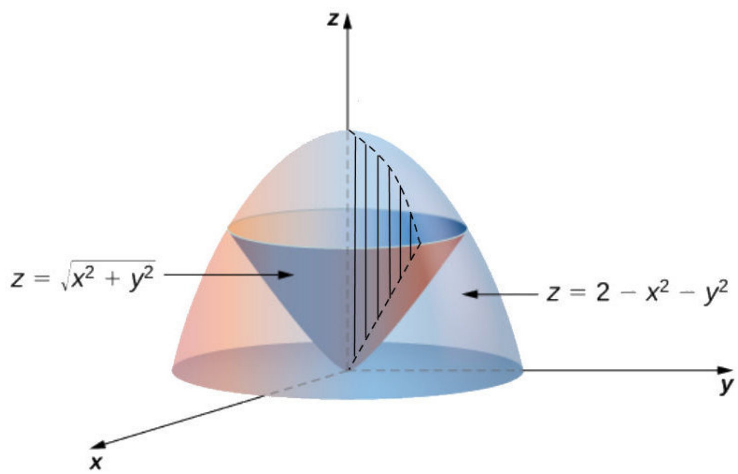
$$z_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z_1 = \sqrt{\rho^2}$$
$$z_1 = \rho$$
$$z_2 = 2 - x^2 - y^2$$
$$z_2 = 2 - \rho^2$$

Reste maintenant à trouver les bornes d'intégration. Pour trouver les bornes en z, on trace une petite ligne parallèle à l'axe des z. On a alors



Cette ligne commence sur le cône, donc à $z = \rho$ et se termine au paraboloïde, donc à $z = 2 - \rho^2$. Ce sont nos bornes en z.

Maintenant, on va additionner ces lignes dans le sens de ρ.

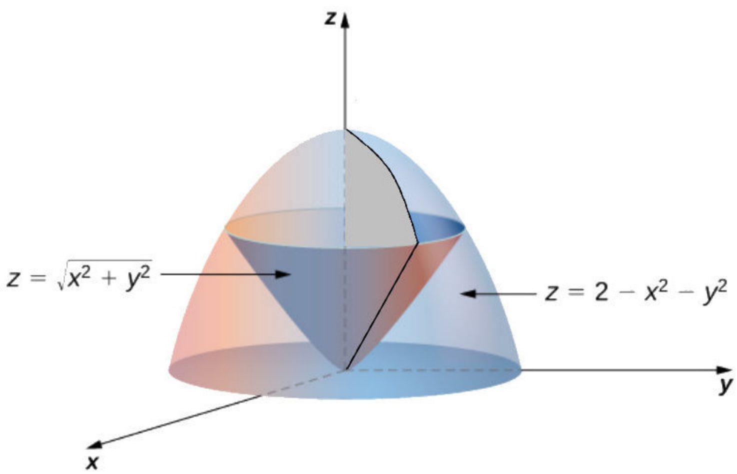


La première ligne est à $\rho = 0$ et la dernière est à l'intersection des deux surfaces. À l'intersection, les deux surfaces sont à la même hauteur, donc $z_1 = z_2$. On a alors

$$\begin{gathered} z_1 = z_2 \\ \rho = 2 - \rho^2 \\ \rho^2 + \rho - 2 = 0 \end{gathered}$$

La solution de cette équation est $\rho = 1$. (Il y a aussi une solution négative qui ne nous intéresse pas ici.). Les bornes en ρ sont donc 0 et 1.

Après cette somme, on a couvert un mince secteur du volume.



Il reste à sommer ces minces couches dans toutes les directions. On aura une première couche à $\theta = 0$ et on en mettra dans toutes les directions jusqu'à $\theta = 2\pi$. Ce sont nos bornes pour θ.

L'intégrale est donc

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^{2-\rho^2} \rho dz d\rho d\theta$$

Il ne reste qu'à résoudre.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho z]_\rho^{2-\rho^2} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\left[\rho \left(2 - \rho^2 \right) \right] - [\rho \cdot \rho] \right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2\rho - \rho^3 - \rho^2 \right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 d\theta \end{aligned}$$

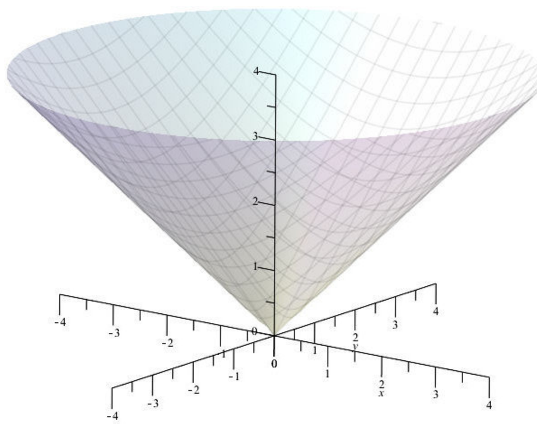
$$= \int_0^{2\pi} \left(\left[1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right] - [0] \right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{12} \right) d\theta$$
$$= \frac{5}{12} [\theta]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{5\pi}{6}$$

Exemple

Voici un cône délimité par l'équation $z = \rho$. (Les dimensions sont en cm.)

Ce cône, qui va jusqu'à z = 4 cm, est plein d'une substance ayant une masse volumique de $\tilde{\rho}$ = 5 g/cm³.

Quel est le moment d'inertie de ce cône si l'axe de rotation est l'axe des z ?

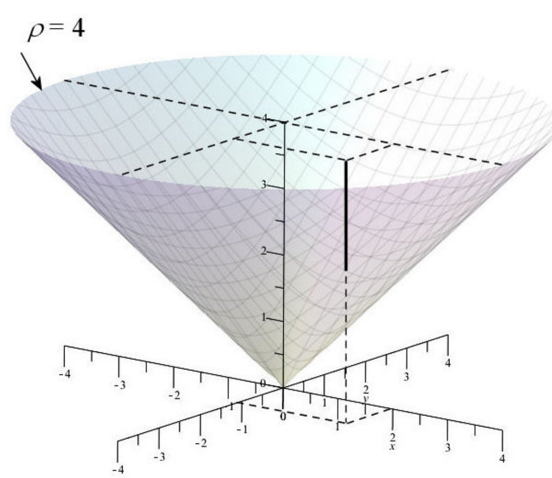


Pour trouver le moment d'inertie, il faut faire l'intégrale suivante.

$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2 \right) \tilde{\rho} dV$$

Le fait qu'on ait une symétrie circulaire autour de l'axe des z nous suggère fortement de passer en coordonnées cylindriques. Dans ce cas, l'intégrale devient

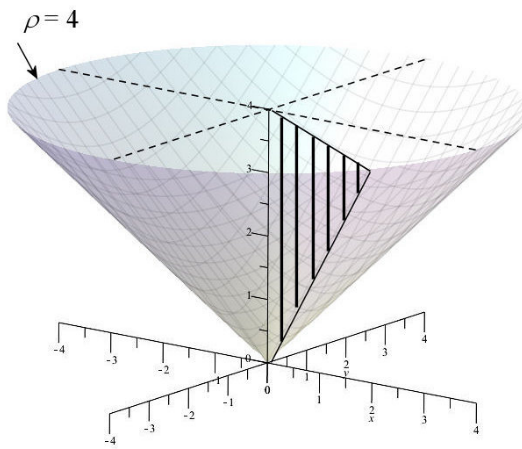
$$I_z = \iiint \rho^2 \tilde{\rho} \rho d\rho d\theta dz$$
$$= \tilde{\rho} \iiint \rho^3 d\rho d\theta dz$$
$$= 5 \tfrac{g}{cm^3} \iiint \rho^3 d\rho d\theta dz$$

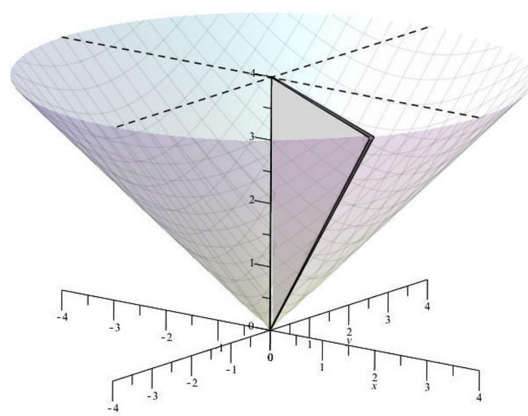


Reste maintenant à trouver la région d'intégration. Pour trouver les bornes en z, on trace une petite ligne parallèle à l'axe des z. Cette ligne commence sur le cône, donc à $z = \rho$, et se termine à z = 4 cm. Ce sont nos bornes en z.

Maintenant, on va additionner ces lignes dans le sens de ρ.

La première ligne est à $\rho = 0$ et la dernière est à $\rho = 4\text{ cm}$. Ce sont nos bornes pour ρ.





Après cette somme, on a couvert un mince secteur du volume (figure de gauche).

Il reste à sommer ces minces couches dans toutes les directions. On aura une première couche à $\theta = 0$ et on en mettra dans toutes les directions jusqu'à $\theta = 2\pi$. Ce sont nos bornes pour θ.

L'intégrale est donc

$$I_z = 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{4cm}\int_\rho^{4cm}\rho^3 dz d\rho d\theta$$

Il ne reste qu'à résoudre.

$$\begin{aligned}
I_z &= 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{4cm}\left[\rho^3 z\right]_\rho^{4cm} d\rho d\theta \\
&= 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{4m}\left(4cm\cdot\rho^3 - \rho^4\right) d\rho d\theta \\
&= 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{4cm\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5}\right]_0^{4cm} d\theta \\
&= 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{4cm\cdot(4cm)^4}{4} - \frac{(4cm)^5}{5}\right] - [0]\right) d\theta \\
&= 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{256cm^5}{5}\right) d\theta \\
&= 256gcm^2\int_0^{2\pi} d\theta
\end{aligned}$$

$$= 256\,gcm^2 \cdot [\theta]_0^{2\pi}$$
$$= 512\pi\,gcm^2$$
$$= 1,6085\times 10^{-4}\,kgm^2$$

SÉRIE D'EXERCICES 12

1. Trouvez les coordonnées cylindriques des points suivants donnés en coordonnées cartésiennes.

a) (3, -4, 1)
b) (-2, 0, 4)

2. Trouvez les coordonnées cartésiennes des points suivants donnés en coordonnées cylindriques.

a) $\left(4, \frac{\pi}{3}, 3\right)$
b) $\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

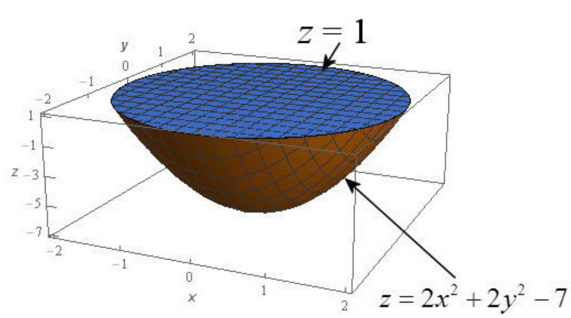
3. Trouvez ce que deviennent les équations suivantes en coordonnées cylindriques.

a) Le plan $x - 3y + 2z = 5$
b) Le cylindre $x^2 + y^2 = 4$
c) La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
d) Le paraboloïde $z = 3x^2 + 3y^2$

4. Trouvez ce que deviennent les équations suivantes en coordonnées cartésiennes.

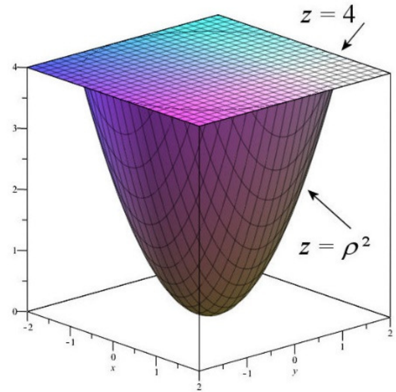
a) $z = \rho\cos 2\theta$
b) $z = 3\tan\theta$
c) $z^2 = \rho^2 \sin 2\theta$

5. Calculez $\iiint 60\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ dans la région d'intégration montrée à droite.

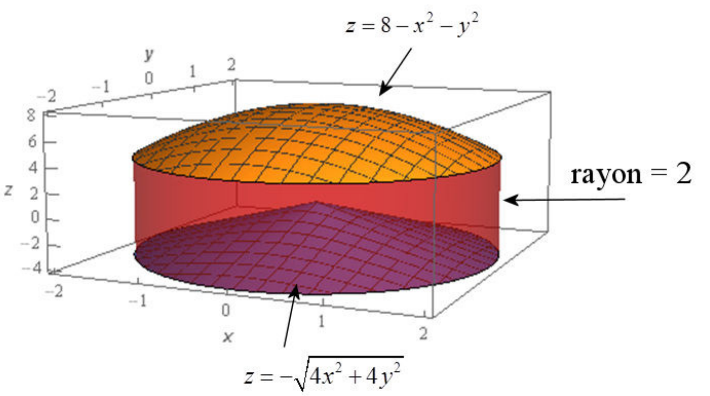


tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/TICylindricalCoords/Prob1.aspx

6. Quel est le volume de cette région ?

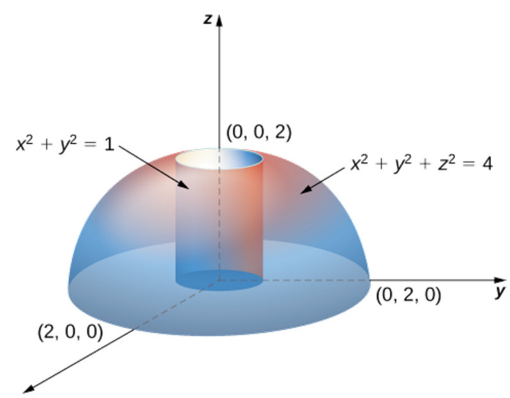


7. Quel est le volume de cette région ?



tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/TripleIntegrals/Prob9.aspx

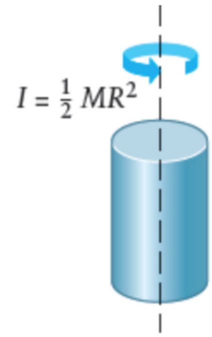
8. Cet objet a une densité constante de $1000\ \mathrm{kg/m^3}$. (Les dimensions de l'objet sont en mètres.)



math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/15%3A_Multiple_Integration/15.5%3A_Triple_Integrals_in_Cylindrical_and_Spherical_Coordinates

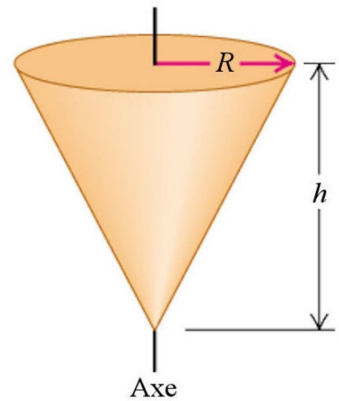
a) Quelle est la masse de cet objet ?
b) Quelle est la hauteur du centre de masse de cet objet ?
c) Quel est le moment d'inertie de cet objet s'il tourne autour de l'axe des z ?

9. Montrez que la formule du moment d'inertie d'un cylindre est ½MR^2.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/calculate-moment-inertia-uniform-solid-cylinder-mass-m-radius-r-axis-rotation-tangent-side-q5948109

10. Trouvez la formule du moment d'inertie d'un cône de densité constante ayant une hauteur de h et un rayon de R. Donnez une réponse en termes de M, R et h.



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/calculate-moment-inertia-uniform-solid-cone-axis-center-cone-mass-m-altitude-h-radius-circ-q9105313

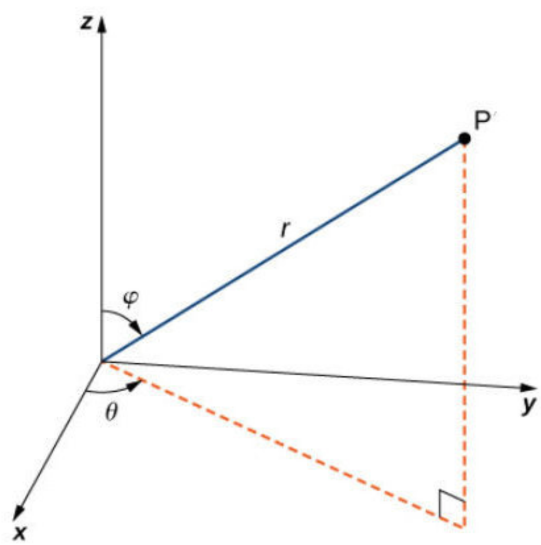
12. Les coordonnées sphériques

Que sont les coordonnées sphériques ?

On va maintenant examiner les coordonnées sphériques. Dans ce système de coordonnées, on donne la position avec r, θ et ϕ.

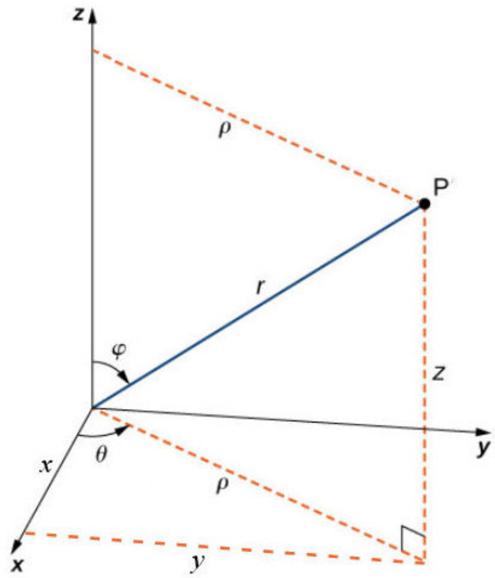
La valeur de r est la distance entre le point et l'origine. Les deux angles donnent la direction du point. L'angle ϕ est l'angle entre la direction et l'axe des z, et l'angle θ est l'angle entre l'axe des x et la projection de la distance sur le plan xy.

Notez qu'avec cette façon de donner la direction, ϕ ne peut jamais être plus grand que π. Par contre, θ peut prendre des valeurs entre 0 et 2π.



philschatz.com/calculus-book/contents/m53967.html

Pour trouver les lois de transformation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques, ajoutons quelques lignes à la figure.



On a alors (tout comme on avait en coordonnées polaires)

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \theta$$

Toujours selon la figure, on a aussi

$$z = r \cos \phi$$
$$\rho = r \sin \phi$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ &= r \sin \phi \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \rho \sin \theta \\ &= r \sin \phi \sin \theta \end{aligned}$$

Les lois de transformations des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes sont donc les suivantes.

Lois de transformation des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$
$$y = r \sin \phi \sin \theta$$
$$z = r \cos \phi$$

La figure nous permet aussi de trouver les transformations inverses. On a

$$r^2 = \rho^2 + z^2$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

et

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

et

$$\tan\phi = \frac{\rho}{z}$$
$$\tan\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

On a donc les lois de transformation suivantes.

Lois de transformation des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$
$$\phi = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Exemple

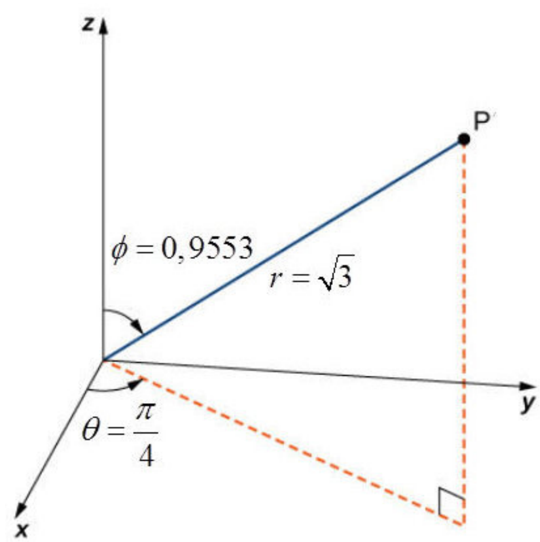
Quelles sont les coordonnées du point $x = 1$, $y = 1$ et $z = 1$ en coordonnées sphériques ?

On a

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2+1^2+1^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\frac{1}{1} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

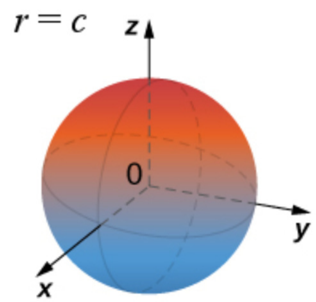
$$\begin{aligned} \phi &= \arctan\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{1} \\ &= 0{,}9953 rad \end{aligned}$$



____

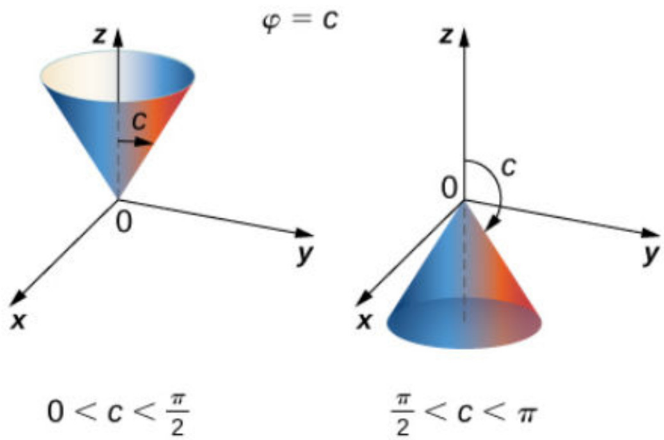
En coordonnées sphériques, quelques surfaces ont des équations assez simples.

1) L'équation $r = \text{constante}$ est l'ensemble des points qui sont à la même distance de l'origine. On a alors une sphère.



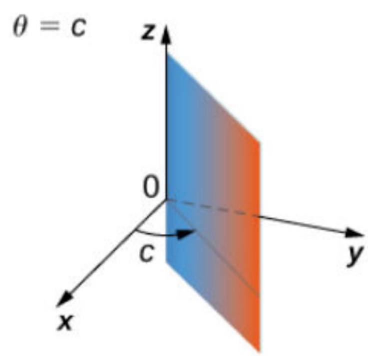
philschatz.com/calculus-book/contents/m53967.html

2) L'équation $\phi = \text{constante}$ est l'ensemble des points qui sont au même angle de l'axe des z. Ces points forment un cône.



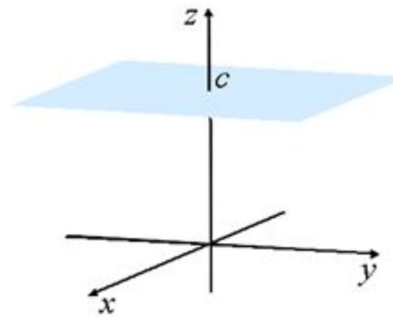
philschatz.com/calculus-book/contents/m53967.html

3) L'équation $\theta = \text{constante}$ est l'ensemble des points qui sont au même angle de l'axe des x. Ces points forment un plan passant par l'axe des z.



philschatz.com/calculus-book/contents/m53967.html

4) L'équation du plan $z = c$ (une constante)



slideplayer.com/slide/7362196

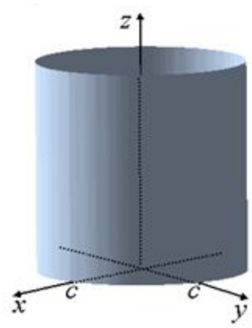
est relativement simple en sphérique. On a alors

$$z = c$$
$$r\cos\phi = c$$

Ce qui donne comme équation

$$r = c\sec\phi$$

5) Finalement, l'équation du cylindre $x^2 + y^2 = c^2$ (une constante)



slideplayer.com/slide/7362196/

est relativement aussi simple en sphérique. On a alors

$$x^2 + y^2 = c^2$$
$$r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi = c^2$$
$$r^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = c^2$$
$$r^2\sin^2\phi = c^2$$
$$r\sin\phi = c$$

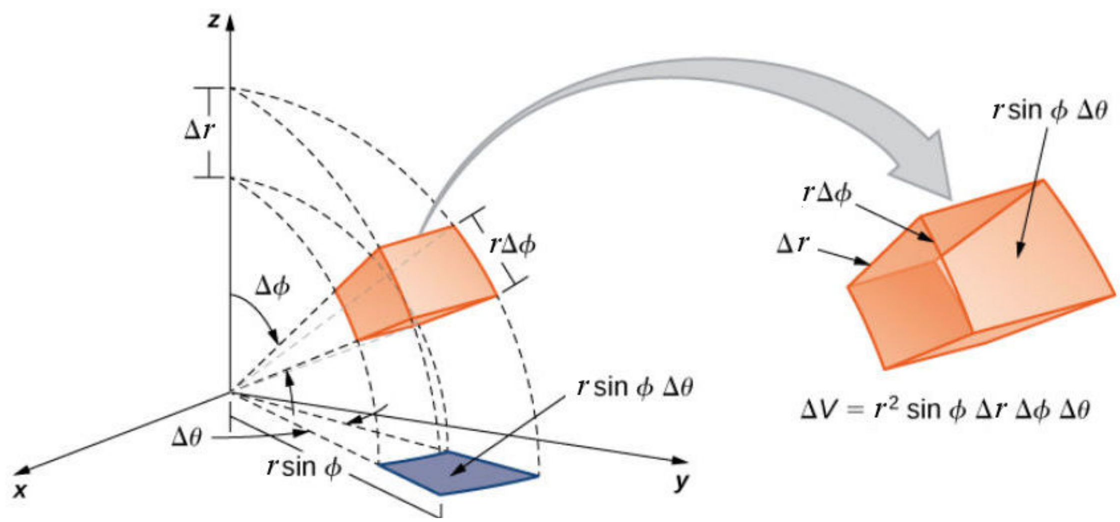
Ce qui donne comme équation

$$r = c\csc\phi$$

Ainsi, les coordonnées sphériques seront particulièrement utiles pour des régions d'intégration limitées par ces surfaces.

Élément de volume en coordonnées sphériques

Avec les coordonnées sphériques, on va séparer l'espace en suivant des surfaces pour lesquelles $r = \text{constante}$ (des sphères), $\phi = \text{constante}$ (des cônes) et $\theta = \text{constante}$ (des plans passant par l'axe des z). On aura alors des éléments d'aires ressemblant à ceci.



philschatz.com/calculus-book/contents/m53967.html

Comme ils le font sur cette figure, on pourrait chercher le volume de cette région avec des arguments géométriques. Toutefois, on peut aussi le trouver avec le jacobien. C'est ce qu'on va faire ici. Dans ce cas, le jacobien est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Avec les lois de transformations suivantes

$$\begin{aligned} x &= r\sin\phi\cos\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\phi \end{aligned}$$

on obtient

$$J=\begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & r\sin\phi & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminent de cette matrice est

$$\begin{aligned}\det J = \cos\phi\left(r\cos\phi\cos\theta\cdot r\sin\phi\cos\theta - -r\sin\phi\sin\theta\cdot r\cos\phi\sin\theta\right) \\ +r\sin\phi\left(\sin\phi\cos\theta\cdot r\sin\phi\cos\theta - -r\sin\phi\sin\theta\cdot\sin\phi\sin\theta\right)\end{aligned}$$

Ça semble compliqué, mais on peut le simplifier.

$$\begin{aligned}\det J &= \cos\phi\left(r^2\cos\phi\cos^2\theta\sin\phi + r^2\sin\phi\sin^2\theta\cos\phi\right) \\ &\qquad + r\sin\phi\left(r\sin^2\phi\cos^2\theta + r\sin^2\phi\sin^2\theta\right) \\ &= r^2\cos^2\phi\sin\phi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) + r^2\sin^3\phi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) \\ &= r^2\cos^2\phi\sin\phi + r^2\sin^3\phi \\ &= r^2\sin\phi\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right) \\ &= r^2\sin\phi\end{aligned}$$

Ainsi, l'élément de volume devient

$$dxdydz \to \left|\det J\right| drd\phi d\theta$$

Ce qui donne

Élément de volume en coordonnées sphériques

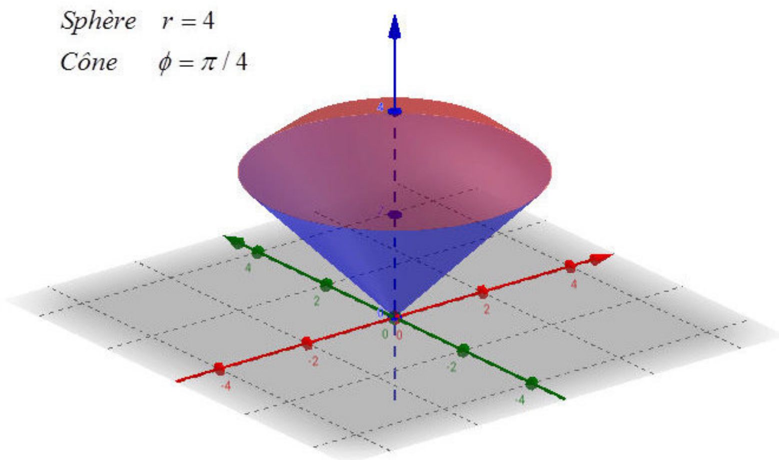
$$dV = r^2\sin\phi drd\phi d\theta$$

Intégrales triples en coordonnées sphériques

On va maintenant utiliser les coordonnées sphériques pour résoudre quelques intégrales. On va commencer par une situation qui montre clairement que certaines intégrales deviennent nettement plus simples en coordonnées sphériques par rapport aux mêmes intégrales en coordonnées cartésiennes.

Exemple

Voici un objet délimité par la sphère $r = 4$ m (dessus) et le cône $\phi = \pi/4$.



tananyag.geomatech.hu/material/simple/id/2080931

Calculez la masse de cet objet si sa masse volumique est donnée par

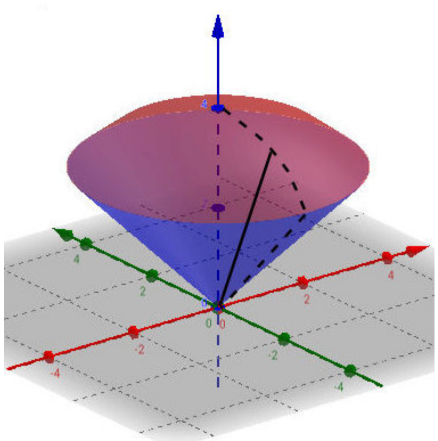
$$\tilde{\rho} = \frac{12 \frac{kg}{m^2}}{r}$$

La masse de cet objet est donnée par

$$M = \iiint \tilde{\rho} dV$$

Comme l'objet est délimité par une sphère et un cône, il est probablement plus approprié de faire cette intégrale en coordonnées sphériques. Avec ces coordonnées, la masse est

$$M = \iiint \tilde{\rho} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$$

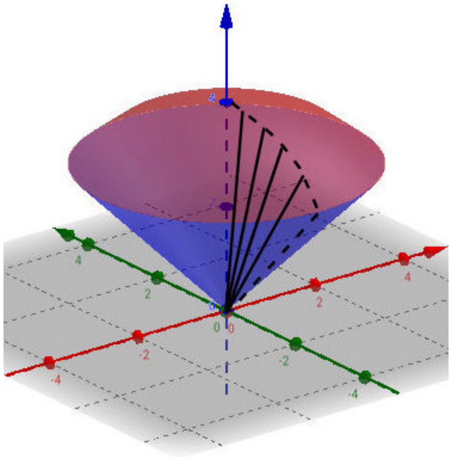


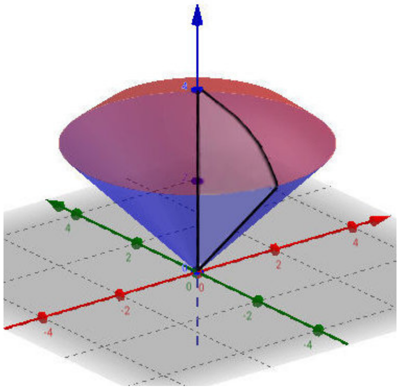
Pour trouver les bornes, traçons une ligne dans la direction des r.

Cette ligne va de l'origine $r = 0$ jusqu'à la sphère $r = 4$ m. Ce sont nos bornes pour r.

Ensuite, on additionne les lignes dans le sens des ϕ.

La première de ces lignes est à $\phi = 0$ et la dernière de ces lignes est à $\phi = \pi/4$. Ce sont nos bornes pour ϕ.





Une fois qu'un a additionné toutes ces lignes, on a couvert une mince tranche de l'objet (figure de gauche).

Finalement, on additionne des couches dans le sens des θ pour couvrir tout le volume de l'objet. La première couche est à $\theta = 0$ et la dernière est à $\theta = 2\pi$. Ce sont nos bornes pour θ.

Ainsi, la masse est

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4m} \tilde{\rho} r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

Avec la formule de la masse volumique, on obtient

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4m} \frac{12 \frac{kg}{m^2}}{r} r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= 12 \tfrac{kg}{m^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4m} r \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à résoudre. La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= 12 \tfrac{kg}{m^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \sin\phi \right]_0^{4m} d\phi \, d\theta \\ &= 12 \tfrac{kg}{m^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left(\left[\frac{(4m)^2}{2} \sin\phi \right] - [0] \right) d\phi \, d\theta \\ &= 96kg \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin\phi \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

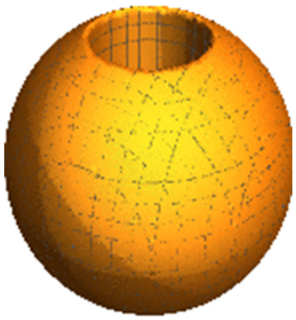
La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= 96kg\int_0^{2\pi}[-\cos\phi]_0^{\pi/4}\,d\theta \\ &= 96kg\int_0^{2\pi}\left(\left[-\cos\tfrac{\pi}{4}\right]-\left[-\cos 0\right]\right)d\theta \\ &= 96kg\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}--1\right)d\theta \\ &= 96kg\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta \end{aligned}$$

Finalement, la dernière intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= 96kg\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)[\theta]_0^{2\pi} \\ &= 192kg\cdot\pi\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\approx 176,67kg \end{aligned}$$

Exemple



Cette sphère ayant un rayon de 6 cm est percée d'un trou ayant un rayon de 2 cm. (On obtient alors un anneau sphérique.) Quel est le volume de cet anneau sphérique ?

Le volume de cet objet est donné par

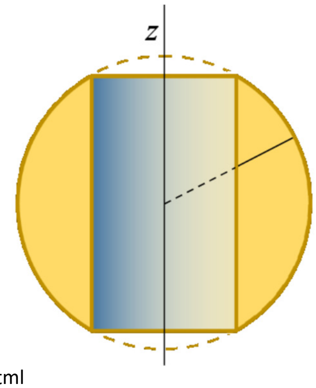
$$V=\iiint dV$$

Comme l'objet est délimité par une sphère et un cylindre, on peut faire cette intégrale en coordonnées cylindriques ou sphériques. Ici, on va évidemment choisir de la faire en coordonnées sphériques (puisque c'est le sujet de la section). Avec ces coordonnées, le volume est

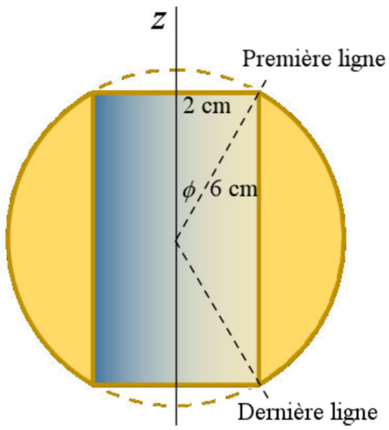
$$V=\iiint r^2\sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

Pour trouver les bornes, traçons une ligne dans la direction des r.

Cette ligne va du cylindre $r = 2\text{ cm}\csc\phi$ jusqu'à la sphère $r = 6\text{ cm}$. Ce sont nos bornes pour r.



datagenetics.com/blog/july22014/index.html



Ensuite, on additionne les lignes dans le sens des ϕ.

La première de ces lignes est à $\phi = \arcsin\frac{1}{3} = 0{,}3398$ et la dernière de ces lignes est à $\phi = \pi - \arcsin\frac{1}{3} = 2{,}8018$. Ce sont nos bornes pour ϕ.

Une fois qu'un a additionné toutes ces lignes, on a couvert une mince tranche de l'objet.

Finalement, on additionne des couches dans le sens des θ pour couvrir tout le volume de l'objet. La première couche est à $\theta = 0$ et la dernière est à $\theta = 2\pi$. Ce sont nos bornes pour θ.

Ainsi, le volume est

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{0,3398}^{2,8018} \int_{2cm\cdot\csc\phi}^{6cm} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$$

Il ne reste qu'à résoudre. La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_{0,3398}^{2,8018} \left[\frac{r^3}{3}\sin\phi\right]_{2cm\cdot\csc\phi}^{6cm} d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{0,3398}^{2,8018} \left(\left[\frac{(6cm)^3}{3}\sin\phi\right] - \left[\frac{(2cm\cdot\csc\phi)^3}{3}\sin\phi\right]\right) d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{0,3398}^{2,8018} \left(\left[72cm^3\sin\phi\right] - \left[\tfrac{8}{3}cm^3\frac{\sin\phi}{\sin^3\phi}\right]\right) d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{0,3398}^{2,8018} \left(72cm^3\sin\phi - \tfrac{8}{3}cm^3\frac{1}{\sin^2\phi}\right) d\phi d\theta
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \left[-72cm^3\cos\phi - \tfrac{8}{3}cm^3(-\cot\phi)\right]_{0,3398}^{2,8018} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\left[-72cm^3\cos(2{,}8018) + \tfrac{8}{3}cm^3\cot(2{,}8018)\right] - \left[-72cm^3\cos(0{,}3398) + \tfrac{8}{3}cm^3\cot(0{,}3398)\right]\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\left[-72cm^3\cdot\left(-\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \tfrac{8}{3}cm^3\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)\right] - \left[-72cm^3\cdot\left(-\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \tfrac{8}{3}cm^3\cdot\left(2\sqrt{2}\right)\right]\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{256\sqrt{2}}{3} cm^3 d\theta
\end{aligned}$$

Finalement, la dernière intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{256\sqrt{2}}{3} cm^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{256\sqrt{2}}{3} cm^3 \cdot [2\pi] \\ &= \tfrac{512\pi\sqrt{2}}{3} cm^3 \\ &\approx 758,25 cm^3 \end{aligned}$$

(Voyez ici un résultat intéressant concernant les anneaux sphériques. http://physique.merici.ca/calcul/volume_anneau_spherique.pdf)

Exemple

Une sphère de rayon R et de masse M a une masse volumique constante. Montrez que le moment d'inertie de cette sphère si l'axe de rotation passe par le centre de la sphère est donné par la formule suivante.

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

On peut prendre n'importe quel axe dans le cas d'une sphère puisqu'il y a symétrie. Ici, on va prendre l'axe des z comme axe de rotation. Le moment d'inertie est

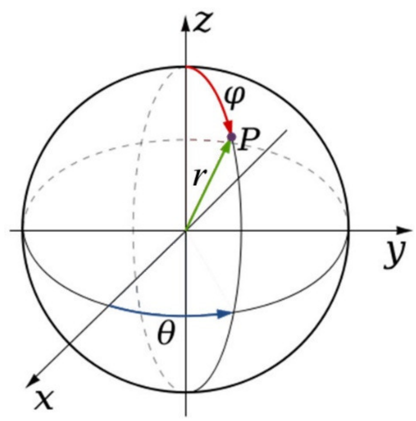
$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2 \right) \tilde{\rho} dV$$

Comme l'objet est de forme sphérique, il est probablement plus approprié de faire cette intégrale en coordonnées sphériques. Avec ces coordonnées, la fonction à intégrer est

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(r \sin\phi \cos\theta \right)^2 + \left(r \sin\phi \sin\theta \right)^2 \\ &= r^2 \sin^2\phi \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \right) \\ &= r^2 \sin^2\phi \end{aligned}$$

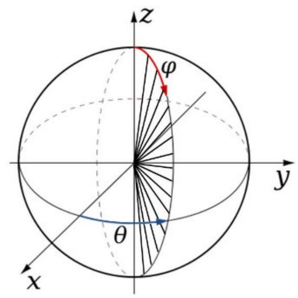
On doit donc résoudre l'intégrale suivante.

$$I_z = \iiint \left(r^2 \sin^2\phi \right) \tilde{\rho} r^2 \sin\phi \, dr d\phi d\theta$$



Pour trouver les bornes, traçons une ligne dans la direction des r. (C'est la ligne verte identifiée r sur cette figure.)

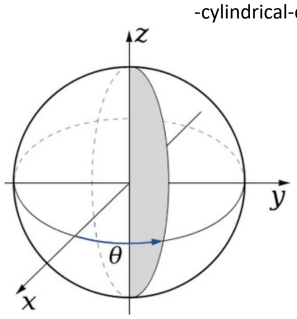
Cette ligne va de l'origine $r = 0$ jusqu'à la sphère $r = R$. Ce sont nos bornes pour r.



Ensuite, on additionne les lignes dans le sens des ϕ.

La première de ces lignes est à $\phi = 0$ et la dernière de ces lignes est à $\phi = \pi$. Ce sont nos bornes pour ϕ.

www.quora.com/What-is-the-difference-between-the-cylindrical-coordinate-system-and-spherical-coordinate-system



Une fois qu'un a additionné toutes ces lignes, on a couvert une mince tranche de la sphère (figure de gauche).

Finalement, on additionne des couches dans le sens des θ pour couvrir tout le volume. La première couche est à $\theta =$ 0 et la dernière est à $\theta = 2\pi$. Ce sont nos bornes pour θ.

Ainsi, le moment d'inertie est

$$I_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \left(r^2 \sin^2 \phi \right) \tilde{\rho} r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

Il ne reste qu'à résoudre. La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^4 \sin^3 \phi dr d\phi d\theta \\ &= \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{r^5}{5} \sin^3 \phi \right]_0^R d\phi d\theta \\ &= \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\left[\frac{R^5}{5} \sin^3 \phi \right] - [0] \right) d\phi d\theta \\ &= \frac{\tilde{\rho} R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{\tilde{\rho} R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi d\theta \\ &= \frac{\tilde{\rho} R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos^3 \phi}{3} - \cos \phi \right]_0^{\pi} d\theta \\ &= \frac{\tilde{\rho} R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{\cos^3 \pi}{3} - \cos \pi \right] - \left[\frac{\cos^3 0}{3} - \cos 0 \right] \right) d\theta \\ &= \frac{\tilde{\rho} R^5}{5} \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{-1}{3} - -1 \right] - \left[\frac{1}{3} - 1 \right] \right) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tilde{\rho}R^5}{5}\int_0^{2\pi}\frac{4}{3}d\theta \\ &= \frac{4\tilde{\rho}R^5}{15}\int_0^{2\pi}d\theta \end{aligned}$$

Finalement, la dernière intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{4\tilde{\rho}R^5}{15}[\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{8\pi\tilde{\rho}R^5}{15} \end{aligned}$$

(Comparez ces calculs avec l'exemple dans lequel on a calculé ce moment d'inertie en cartésien. Les intégrales sont nettement plus simples en coordonnées sphériques.)

Puisque la masse de la sphère est

$$M = \tilde{\rho}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$

On a

$$\tilde{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{8\pi R^5}{15}\cdot\frac{3M}{4\pi R^3} \\ &= \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned}$$

SÉRIE D'EXERCICES 13

1. Trouvez les coordonnées sphériques (r,ϕ,θ) des points suivants donnés en coordonnées cartésiennes.

a) (-1, -1, 1)
b) (-2, 0, -2)

2. Trouvez les coordonnées cartésiennes des points suivants donnés en coordonnées sphériques (r,ϕ,θ).

a) $\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$
b) $\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

3. Trouvez ce que deviennent les équations suivantes en coordonnées sphériques.

a) Le cylindre $x^2 + y^2 = 4$
b) La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
c) Le cône $z^2 = 3x^2 + 3y^2$
d) La surface $z = 2xy$

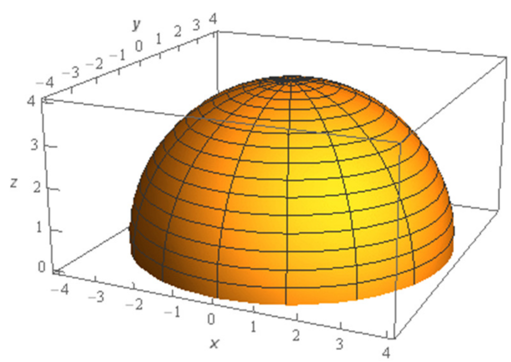
4. Trouvez ce que deviennent les équations suivantes en coordonnées cartésiennes.

a) $r^2 = \sin 2\theta \tan^2 \phi$
b) $r = \sin\theta \sin\phi$
c) $r = \dfrac{1}{\sin\theta \sin^2 \phi}$

Notez que les 4 équations suivantes peuvent aussi être bien utiles pour faire ces transformations.

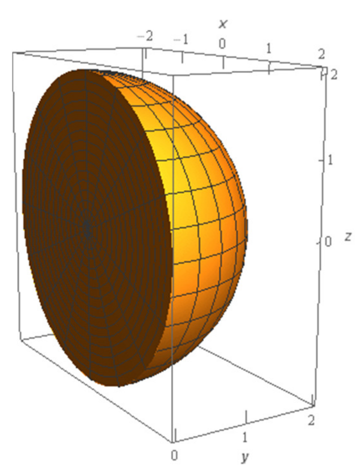
$$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta \quad z = r\cos\phi \quad \rho = r\sin\phi$$

5. Calculez $\iiint (10xz + 3)\, dxdydz$ dans la région d'intégration montrée à droite.



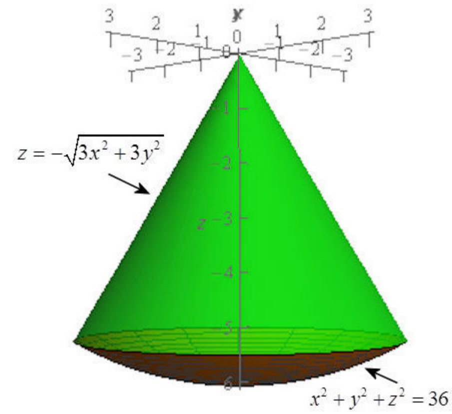
tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/TISphericalCoords/Prob1.aspx

6. Calculez $\iiint (x^2 + y^2)\, dxdydz$ dans la région d'intégration montrée à droite.



tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/TISphericalCoords/Prob2.aspx

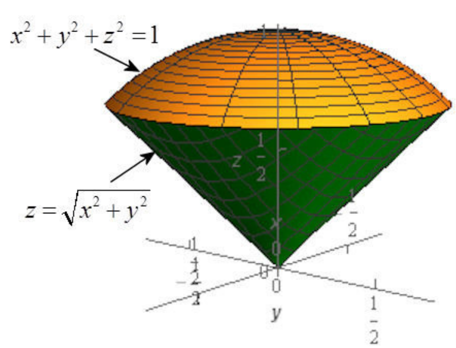
7. Calculez $\iiint x^2 dxdydz$ dans la région d'intégration montrée à droite.



tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/TISphericalCoords/Prob4.aspx

8. Voici un objet dont la densité est donnée par $\tilde{\rho} = 3000 \frac{kg}{m^4} z$. (Les dimensions de l'objet sont en m.)

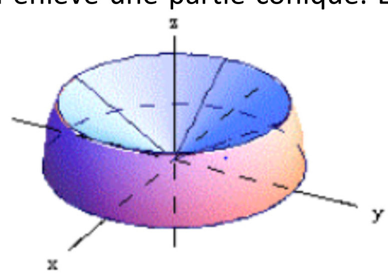
a) Quel est le volume de cet objet ?
b) Quelle est la masse de cet objet ?
c) Quelle est la hauteur du centre de masse de cet objet ?
d) Quel est le moment d'inertie de cet objet s'il tourne autour de l'axe des z ?



tutorial.math.lamar.edu/Solutions/CalcIII/TISphericalCoords/Prob3.aspx

9. Cet objet est un dessus de sphère dans laquelle on a enlevé une partie conique. La sphère a un rayon de 6 cm et le cône fait un angle de 60° avec l'axe des z.

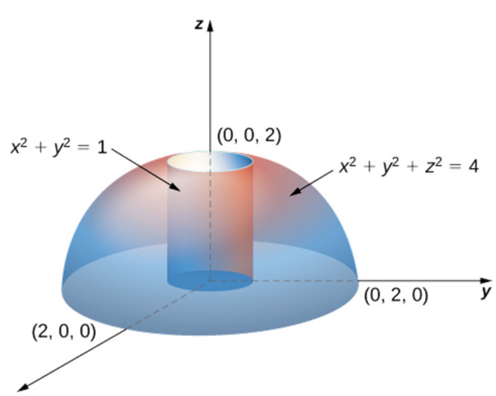
a) Quelle est la masse de cet objet si sa densité est de 5 g/cm³ (elle est constante) ?
b) Quelle est la hauteur du centre de masse de cet objet ?



10. Cet objet a une densité constante de 1000 kg/m³. (Les dimensions de l'objet sont en mètres.)

a) Quelle est la masse de cet objet ?
b) Quelle est la hauteur du centre de masse de cet objet ?

(On a déjà eu cette question, mais cette fois on va utiliser les coordonnées sphériques pour calculer.)



Solutions des exercices

Série d'exercices 1

1. 8

2. 4

3. 2

4. $128\sqrt{2}/3 - 64/3 \approx 39{,}006$

5. 19/42

6. $1/20 - \sqrt{2}/160 \approx 0{,}04116$

7. $\sqrt{2} - 1$

8. $1 + \text{arsinh}\ 1 - \sqrt{2} \approx 0{,}46716$

9. ½

10. 1/15

Série d'exercices 2

1. – 17/20

2. 8/3

3. 7/15

4. 8/5

5. 1/2

6. – 64/15

7. $(1 - \sin(1))/2 \approx 0{,}07926$

8. $e - 2 \approx 0{,}7183$

9. 5/2

10. – 9/2

11. $(8+32\sqrt{2})/5$

12. – 64

13a. $\int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{x^7+1} dydx$

13 b. $\int_0^2 \int_{-y^2}^0 x^{-2/3} \sqrt{y^{5/3}+1} dxdy$

13c. $\int_{-2}^0 \int_{-y}^2 \left(5y^2x^3+2\right) dxdy + \int_0^6 \int_{y/3}^2 \left(5y^2x^3+2\right) dxdy$

14. $(e^4 - 1)/4 \approx 13{,}3995$

Série d'exercices 3

1. $16\sqrt{2}/3$

2. 4/3

3. 1

Série d'exercices 4

1. 1/3

2. 8

3. 5/12

4. 1/12

5. 512/15

6. 128π

Série d'exercices 5

1. M = 0,25 kg x = 0,4 m y = 0,4 m

2a. M = 9 kg x = 5/2 m y = 13/5 m

2 b. M = 45 kg x = 67/25 m y = 139/50 m

3a. M = 2 kg x = 0,45 m y = 0,45 m

3 b. M = 1,2 kg x = 275/432 m y = 275/432 m

Série d'exercices 6

1. $I_x = 32kgm^2$ $I_y = 230,4kgm^2$ $I_z = 262,4kgm^2$

2. $I_x = 2kgm^2$ $I_y = 8,4kgm^2$ $I_z = 10,4kgm^2$

3. $I_x = 12kgm^2$ $I_y = 5,6kgm^2$ $I_z = 17,6kgm^2$

Série d'exercices 7

1. $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$

2. (5, 2,214)

3. (13, -1,176)

4. (29, 3,9514)

5. $\left(1,\sqrt{3}\right)$

6. (0, 3)

7. $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8. (4,0)

9. $\rho = 3\sec\theta$

10. $\rho = 2\csc\theta$

11. $\theta = 1,4056$

12. $\rho^2 = \frac{-4}{\cos 2\theta}$

13. $\rho = 4\cos\theta$

14. $\rho^2 = \dfrac{4}{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} = \dfrac{4}{1+3\sin^2\theta}$

15. $y = x$

16. $x^2 + y^2 = 9$

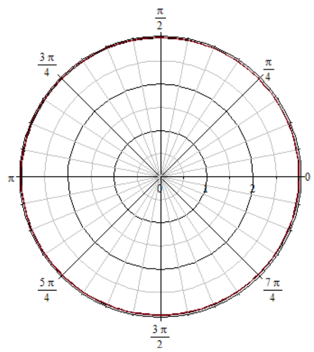
17. $x = 5$

18. $x^2 - y^2 = 1$

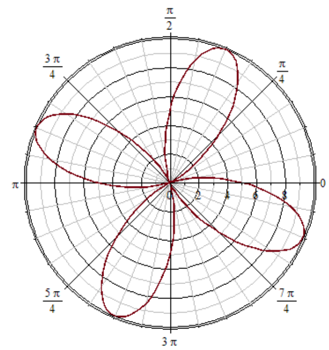
19. $y = 1 - x^2$

20. Centre est $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$, rayon est $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

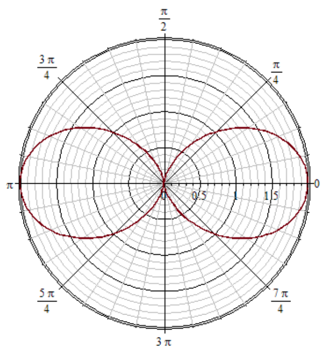
21.



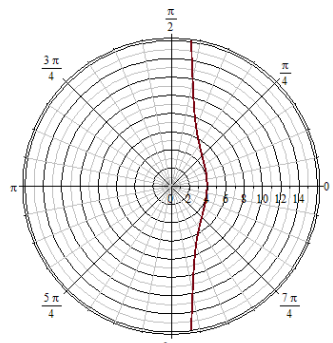
22.



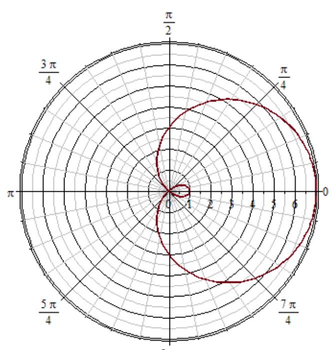
23.



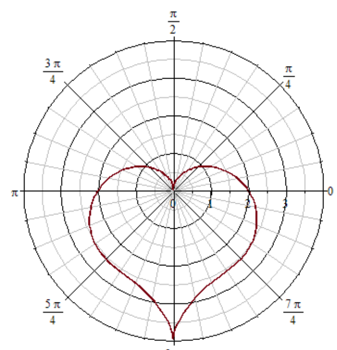
24.



25.



26.



27. $\pi/2$

28. $\dfrac{107\pi}{4} - 42 \approx 42{,}038$

29. $\dfrac{11\sqrt{3}}{2} + \dfrac{14\pi}{3} \approx 24{,}187$

30. 7π

31. $125\pi/3$

32a. $M = \dfrac{75\pi}{4} kg \quad \overline{x} = \overline{y} = \dfrac{20}{3\pi} m$

32 b. $M = \dfrac{325\pi}{6} kg \quad \overline{x} = \overline{y} = \dfrac{95}{13\pi} m$

33a. $M = \dfrac{9\pi}{2} kg \quad \overline{x} = \dfrac{5}{6} m \qquad \overline{y} = 0$

33 b. $M = \dfrac{19\pi}{3} kg \quad \overline{x} = \dfrac{18}{19} m \qquad \overline{y} = 0$

34a. $I_z = \dfrac{208\pi}{5} kgm^2$

34 b. $I_z = 16\pi kgm^2$

35. $I_x = \dfrac{63\pi}{32} kgm^2, I_y = \dfrac{147\pi}{32} kgm^2, I_z = \dfrac{105\pi}{16} kgm^2$

Série d'exercices 8

1. $u - v$

2. 2

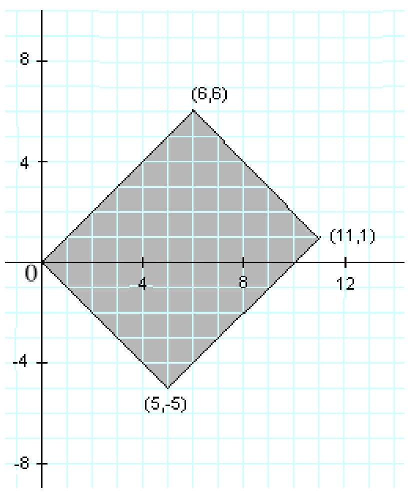
3. $4uv(v^2 + u^2)$

4. $-2e^{2u}$

5. -9

6. ue^{uv}

7.



8. $dA = u\, du\, dv$

9. $1/88$

10. $1/84$

11. $5/6$

12. $625/6$

13. $13{,}0949$

14. $40{,}6952$

15. $\dfrac{\pi ab}{4}\left(1 - e^{-1}\right)$

Série d'exercices 9

1. 4π

2. $\sqrt{2}\left(1-e^{-2\pi}\right)\approx 1,4116$

3. 2

4. 8

5. $3\sqrt{14}\approx 11,225$

6. $\dfrac{6^{3/2}-5^{3/2}}{9}\approx 0,3907$

7. $\dfrac{\pi}{384}\left(193^{3/2}-1\right)\approx 21,928$

8. 64

Série d'exercices 10

1. 20/3

2. 32π

3. 128/3

4. $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}$

Série d'exercices 11

1a. 9600 kg

1b. $\overline{x}=0,\quad \overline{y}=0,\quad \overline{z}=\frac{11}{15}m$

1c. 5120 kgm²

2a. $160\pi g = 0,50265 kg$

2b. $\overline{x}=-0,4cm,\quad \overline{y}=0,\quad \overline{z}=0$

2c. 384π gcm² = 1,2064 x 10^{-4} kgm²

Série d'exercices 12

1a. $(5,\ -0,927,\ 1)$

1b. $(2,\ \pi,\ 4)$

2a. $\left(2,\ 2\sqrt{3},\ 3\right)$

2b. $(0,\ 1,\ 0)$

3a. $\rho\left(\cos\theta-3\sin\theta\right)+2z=5$

3b. $\rho=2$

3c. $\rho^2+z^2=9$

3d. $z=3\rho^2$

4a. $z=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4b. $z=3\dfrac{y}{x}$

4c. $z^2 = 2xy$

5. 1024π

6. 8π

7. $104\pi/3$

8a. $2000\sqrt{3}\pi kg \approx 10\ 883kg$

8b. $\frac{3\sqrt{3}}{8}m \approx 0,64951m$

8c. $4400\sqrt{3}\pi kgm^2 \approx 23\ 942kgm^2$

10. $\frac{3}{10}MR^2$

Série d'exercices 13

1a. $\left(\sqrt{3},\ 0,9553,\ \tfrac{5\pi}{4}\right)$

1b. $\left(2\sqrt{2},\ \tfrac{3\pi}{4},\ \pi\right)$

2a. $\left(0,\ 2\sqrt{3},\ 2\right)$

2b. $\left(1,\ 0,\ 0\right)$

3a. $r\sin\phi = 2$

3b. $r = 3$

3c. $\phi = \frac{\pi}{6}$ et $\phi = \frac{5\pi}{6}$

3d. $r = \frac{\cos\phi}{\sin^2\phi\sin 2\theta}$

4a. $z^2\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2xy$

4b. $x^2+y^2+z^2 = y$

4c. $y^2\left(x^2+y^2\right) = x^2+y^2+z^2$

5. 128π

6. $128\pi/15$

7. $\left(\frac{5184}{5} - \frac{2916}{5}\sqrt{3}\right)\pi \approx 83,7799$

8a. $\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi m^3 \approx 0,613m^3$

8b. $375\pi kg \approx 1178kg$

8c. $\left(\frac{16}{15} - \frac{4\sqrt{2}}{15}\right)m \approx 0,6895m$

8d. $\frac{125\pi}{2}kgm^2 \approx 196,35kgm^2$

9a. $360\pi g \approx 1130,97g$

9b. $1,125\ cm$

10a. $2000\sqrt{3}\pi kg \approx 10\ 883kg$

10b. $\frac{3\sqrt{3}}{8}m \approx 0,64951m$