Solutionnaire du chapitre 3

1.1

$$\begin{aligned} z &= 5x^2y + xy^2 \\ &= 5(1)^2\cdot 3 + 1\cdot(3)^2 \\ &= 15+9 \\ &= 24 \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} f &= xyz + xy + yz \\ &= (-1)\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ &= -2-1+2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{u^2+v^2} - wx \\ &= \sqrt{(3)^2+(4)^2} - (-1)(-2) \\ &= 5-2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

1.4 Comme on ne veut pas de division par 0, on a la restriction suivante.

$$\begin{aligned} x - y &\neq 0 \\ y &\neq x \end{aligned}$$

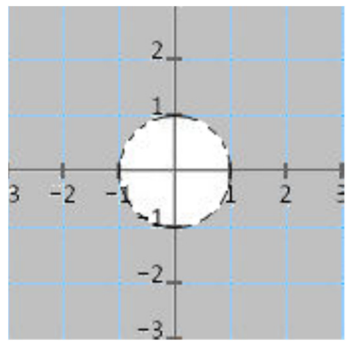
Le domaine est donc tout le plan *xy,* sauf la droite $y = x$.

1.5 Comme on ne veut pas de logarithme de nombre négatif ou d'un nombre nul, on a la restriction suivante.

$$x^2 + y^2 - 1 > 0$$
$$x^2 + y^2 > 1$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon 1. On doit donc se situer à l'extérieur d'un cercle de rayon 1 et le cercle lui-même n'est pas inclus.

Le domaine est donc

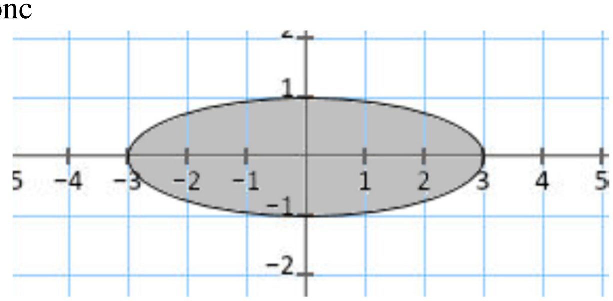


1.6 Comme on ne veut pas de racine de nombre négatif, on a la restriction suivante.

$$9 - x^2 - 9y^2 \geq 0$$
$$9 \geq x^2 + 9y^2$$
$$x^2 + 9y^2 \leq 9$$
$$\frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1$$

C'est l'équation d'une ellipse allant de -3 à 3 sur l'axe des x et de -1 à 1 sur l'axe des *y*. On doit donc se situer à l'intérieur de cette ellipse et l'ellipse elle-même est incluse.

Le domaine est donc



2.1 Si $z = 4$, l'équation de la courbe de niveau est

$$4 = y \arctan x$$
$$y = \frac{4}{\arctan x}$$

2.2 Au point (0,2) la fonction vaut

$$\begin{aligned} z &= \left(2x + y^2\right)e^{xy} \\ &= \left(2\cdot 0 + (2)^2\right)e^{0\cdot 2} \\ &= (0+4)\cdot 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

L'équation de la courbe de niveau est donc

$$4 = \left(2x + y^2\right)e^{xy}$$

4.1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy} = \frac{-2}{3}$$

4.2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4-(mx)^4}{x^2+(mx)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4-m^4x^4}{x^2+m^2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-m^4\right)x^4}{\left(1+m^2\right)x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-m^4\right)}{\left(1+m^2\right)}x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il y a peut-être un problème si $m = \infty$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $x = y^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(y^2\right)^4 - y^4}{\left(y^2\right)^2 + y^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{y^8 - y^4}{y^4 + y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{8y^7 - 4y^3}{4y^3 + 2y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{56y^6 - 12y^2}{12y^2 + 2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{0}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

La limite est donc 0.

4.3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to o} \frac{2x^2 - (mx)^2}{x^2 + 2(mx)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - m^2x^2}{x^2 + 2m^2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2 - m^2\right)x^2}{\left(1 + 2m^2\right)x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2 - m^2\right)}{\left(1 + 2m^2\right)} \\ &= \frac{\left(2 - m^2\right)}{\left(1 + 2m^2\right)}\end{aligned}$$

Comme la valeur de la limite dépend de m, la limite n'existe pas.

4.4

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y} = \frac{2-2}{1-1+4-4} = \frac{0}{0}$$

Pour trouver la limite, on peut simplifier un peu la fonction.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y(x-1)}{x(x-1)+2y(x-1)}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x+2y}\end{aligned}$$

La limite est alors

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x+2y} = \frac{2}{5}$$

Évidemment, il y a la version plus longue si on n'a pas vu la simplification.

On pose alors $y - 2 = m(x - 1)$. On a alors

$$\begin{aligned}y-2&=m(x-1)\\ y&=mx-m+2\end{aligned}$$

La limite devient donc

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y(x-1)}{x^2-x+(2x-2)y}\\ &= \lim_{x\to1} \frac{(mx-m+2)(x-1)}{x^2-x+(2x-2)(mx-m+2)}\\ &= \lim_{x\to1} \frac{x(mx-m+2)-(mx-m+2)}{x^2-x+2x(mx-m+2)-2(mx-m+2)}\\ &= \lim_{x\to1} \frac{mx^2-mx+2x-mx+m-2}{x^2-x+2mx^2-2xm+4x-2mx+2m-4}\\ &= \lim_{x\to1} \frac{mx^2+(2-2m)x+m-2}{(1+2m)x^2+(3-4m)x+2m-4}\end{aligned}$$

On a toujours 0/0. Si on applique la règle de l'Hospital, on a

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} &= \lim_{x\to1} \frac{2mx+(2-2m)}{2(1+2m)x+(3-4m)}\\ &= \frac{2m+(2-2m)}{2(1+2m)+(3-4m)}\\ &= \frac{2m+2-2m}{2+4m+3-4m}\\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

4.5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^3}{2y^5-2x^5} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^3}{2y^5-2x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(mx)^3}{2(mx)^5-2x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3m^3x^5}{2m^5x^5-2x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3m^3x^5}{(2m^5-2)x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3m^3}{2m^5-2} \\
&= \frac{3m^3}{2m^5-2}
\end{aligned}$$

Comme la valeur de la limite dépend de *m,* la limite n'existe pas.

4.6

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2(mx)+x(mx)^2-(mx)^3}{x^2+(mx)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3-mx^3+m^2x^3-m^3x^3}{x^2+m^2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1-m+m^2-m^3)}{x^2(1+m^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} x\frac{1-m+m^2-m^3}{1+m^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Toutefois, il y a peut-être un problème si $m = \infty$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $x = y^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{\left(y^2\right)^3 - \left(y^2\right)^2 y + y^2 y^2 - y^3}{\left(y^2\right)^2 + y^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{y^6 - y^4 y + y^2 y^2 - y^3}{y^4 + y^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{y^6 - y^5 + y^4 - y^3}{y^4 + y^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{6y^5 - 5y^4 + 4y^3 - 3y^2}{4y^3 + 2y} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{30y^4 - 20y^3 + 12y^2 - 6y}{12y^2 + 2} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

La limite est donc 0.

4.7

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4+x}{2-y} = \frac{6}{1} = 6$$

4.8

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4 + 2y^4} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4 + 2y^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{3x(mx)}{5x^4 + 2(mx)^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3mx^2}{5x^4 + 2m^4 x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3mx^2}{\left(5 + 2m^4\right) x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3m}{\left(5 + 2m^4\right) x^2} \\ &= \frac{3m}{5 + 2m^4} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{3m}{5+2m^4}\infty$$

Il n'y a pas de limite, car la valeur peut changer selon la valeur de *m*. Si *m* est positif, la limite est +∞ et si *m* est négatif, la limite est -∞.

Donc, la limite n'existe pas.

4.9

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^x + y}{y\ln(x+2)} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xe^x + y}{y\ln(x+2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{xe^x + mx}{mx\ln(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + m)x}{mx\ln(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + m}{m\ln(x+2)} \\ &= \frac{1+m}{m\ln(2)}\end{aligned}$$

Comme la valeur dépend de *m*, la limite n'existe pas.

4.10

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+y^2)\sin x}{x} = \frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+y^2)\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+(mx)^2\right)\sin x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + m^2x^2\sin x}{x}\end{aligned}$$

Comme on a 0/0, on applique la règle de l'Hospital. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+m^2x^2\sin x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+m^2x^2\cos+2m^2x\sin x}{1}\\&=\frac{1}{1}\\&=1\end{aligned}$$

Il y a peut-être un problème si $m = \infty$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $x = y^2$. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(1+y^2\right)\sin x}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{\left(1+y^2\right)\sin y^2}{y^2}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)\sin u}{u}\\&=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}+\lim_{u\to 0}\sin u\\&=1+0\\&=1\end{aligned}$$

La limite est donc 1

4.11

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^2}{x^2-2y}=\frac{0}{0}$$

On va poser $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^2}{x^2-2y}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x(mx)^2}{x^2-2mx}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2m^2x^3}{x^2-2mx}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2m^2x^2}{x-2m}\\&=\frac{0}{-2m}\\&=0\end{aligned}$$

Il y a peut-être un problème si $m = 0$. Pour voir ce qu'on obtient dans cette direction, posons $y = x^2$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2-2y} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x\left(x^2\right)^2}{x^2-2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^5}{-x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{-1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

La limite est donc 0.