Calcul avancé
Examen 4
Chapitre 6 : les équations différentielles
25 % de la note finale

Hiver 2016 Nom :________________________

---

1. Résoudre

$$y'' + 6y' + 10y = 3x$$

2. Résoudre

$$xy' = y + x\sec\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. Résoudre

$$2\left(e^{x^2} + y\right)dx + xdy = 0$$

4. Résoudre

$$xy' - 3y = 5x^4y^2$$

et trouvez la solution particulière pour $y(1) = 1$.

5. Résoudre

$$(10x + 3y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

6. Résoudre

$$yy'' + 2(y')^2 = 0$$

7. Résoudre

$$(y')^2 - (2x - y)\,y' - 2xy = 0$$

8. Un modèle de croissance de la population : la loi logistique

   La *loi de Malthus* affirme que le taux de variation de la population $y(t)$ est proportionnel à la population. Cette loi est vraie pour plusieurs populations en autant qu'elles ne soient pas trop grandes. Un modèle plus raffiné est obtenu avec l'équation logistique qui est

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

   où le terme de « freinage » de la population $-by^2$ fait que la population ne peut croître indéfiniment, à cause des ressources limitées.

   a) Résoudre cette équation.

   b) Pour les États-Unis, Verhulst a prédit en 1845 les valeurs de $a = 0{,}028$ et $b = 1{,}6 \times 10^{-4}$, quand le temps est mesuré en années et y en millions de personnes. Trouvez la solution particulière qui satisfait $y(0) = 5.3$ (correspondant à l'année 1800). Utilisez cette formule pour calculer la population en 1980. (La véritable population en 1980 était de 230 millions de personnes.)

Réponses

1) $y = e^{-3x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) + \frac{3}{10}x - \frac{9}{50}$

2) $y = x \arcsin\left(\ln\left(Cx\right)\right)$

3) $y = \dfrac{C - e^{x^2}}{x^2}$

4) $y = \dfrac{7x^3}{12 - 5x^7}$

5) $3xy + 5x^2 + y^2 + 4x - y = C$

6) $y = \sqrt[3]{\left(C_1 x + C_2\right)}$

7) $y = x^2 + C \quad \text{et} \quad y = Ce^{-x}$

8) $y = \dfrac{a}{b + Ce^{-at}}$

Selon cette équation, la population en 1980 aurait dû être de 145 millions