

Calcul avancé
Examen 3
Les intégrales multiples
25 % de la note finale

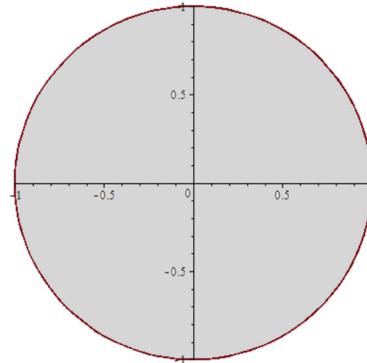
Hiver 2018

Nom : _____

1. Déterminez

$$\iint x^2 dA$$

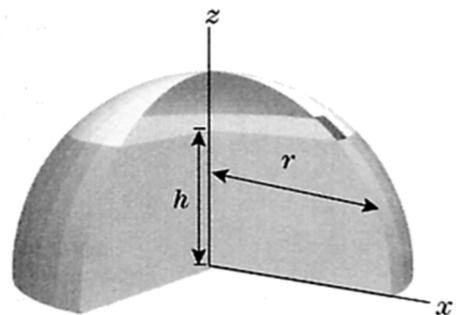
si la région d'intégration est un cercle de rayon 1.



2. Convertissez l'intégrale suivante en coordonnées polaires et calculez sa valeur.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy dx dy$$

3. Un réservoir d'eau en forme d'hémisphère a un rayon de $r = 5$ m. Sa base est le plan xy . Trouver le volume d'eau à l'intérieur du réservoir quand le niveau d'eau est de $h = 3$ m dans le réservoir.

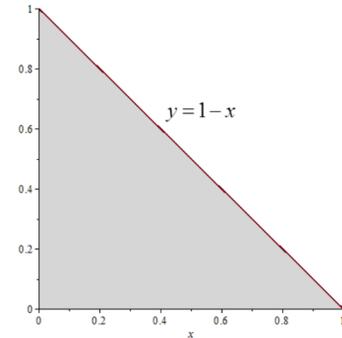


4. Évaluer l'intégrale

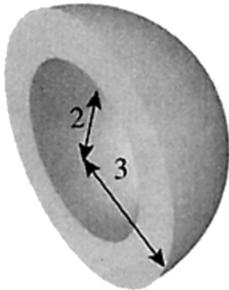
$$\iint \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$$

dans la région d'intégration bornée par les droites $x + y = 1$,
 $x = 0$ et $y = 0$.

Indice : faire un changement de variables.



5. Calculer le moment d'inertie I_z d'une sphère creuse centrée sur l'origine dont le rayon extérieur est 3 m, le rayon intérieur est 2 m et dont la densité à une valeur constante de 300 kg/m³.

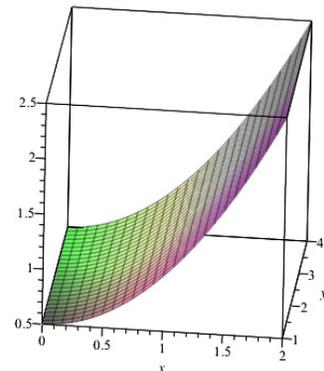


Sur la figure, il n'y a que la moitié de la sphère, pour qu'on puisse voir qu'elle est creuse.

6. Calculez l'aire de la surface donnée par

$$z = \frac{x^2 + 1}{2}$$

au-dessus de la région d'intégration dans le plan
 xy délimité par les droites $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$ et $y = 4$

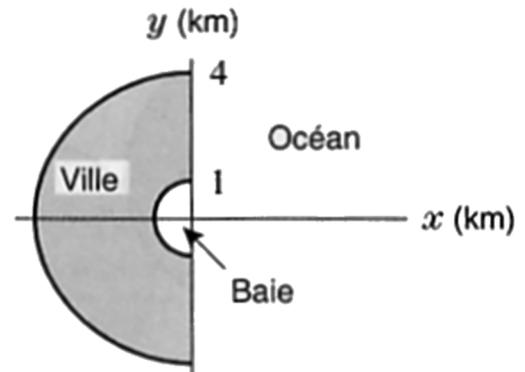


Calcul avancé - examen 3

7. Une ville située en bordure de l'océan entoure une baie, comme le montre la figure. Si la densité de population (en millier d'habitant par km^2) de la ville est donnée par

$$d = (4 - \rho)(2 + \cos \theta)$$

où ρ et θ sont les coordonnées polaires par rapport aux axes x et y représentés sur la figure, déterminez la population totale de la ville.



Réponses

1) $\frac{\pi}{4}$

2) 2

3) 66π

4) $\frac{1}{2}\sin(1) = 0,42074$

5) $33760\pi\text{kgm}^2 = 106\,060\text{kgm}^2$

6) $3\sqrt{5} + \frac{3}{2}\operatorname{arsinh}(2) \approx 8,874$

7) 38 549 habitants