

Calcul Avancé
Examen 2

Les dérivées partielles
25 % de la note finale

Hiver 2017

Nom : _____

1. (3 points)

Trouvez les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ et la différentielle totale des fonctions suivantes.

a) $z = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

b) $z = x^2 + \frac{y}{w} \ln u$

2. (3 points)

Trouvez

a) $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction $e^x \cos(xy) - \ln(x) \cdot \sinh(y) = 0$

b) $\frac{\partial z}{\partial x}$ pour la fonction $5x^2z^2 - 2y^3z^4 = 6x^3y^2$

c) $\frac{dz}{dt}$ à $t = 2$ pour la fonction $z = x + e^{x+y}$ si $x = t^2 + 2$ et $y = -4t + 2$

d) $\frac{\partial w}{\partial x}$ à $x = 1$ et $y = -1$ pour la fonction $w = (u+v)^8$ si $u = x + y$ et $v = x^2 + xy + y^2$

3. (3 points)

Soit la fonction suivante

$$z = \sin(x^2 + y^2)$$

- Trouvez la dérivée directionnelle dans la direction donnée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ au point (0,1).
- Toujours au point (0,1), trouvez la grandeur et la direction de la dérivée directionnelle maximale.
- Dans quelle direction la dérivée directionnelle sera-t-elle nulle ?

4. (2 points)

Trouvez l'équation du plan tangent à la surface décrite par la fonction

$$z = 2x^2 + y^2$$

au point (2, 3, 17).

5. (2 Points)

Trouvez les extremums relatifs de la surface décrite par la fonction

$$z = x^3 - y^3 - 3x + 3y$$

6. (2 Points)

Calculez $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

Réponses

$$1a) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$dz = -\frac{1}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx + \frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy$$

$$1b) \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{w} \ln u \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{-y}{w^2} \ln u \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{wu}$$

$$dz = x^2 dx + \frac{1}{w} \ln u dy - \frac{y}{w^2} \ln u dw + \frac{y}{wu} du$$

$$2a) \frac{dy}{dx} = \frac{xe^x \cos(xy) - xye^x \sin(xy) - \sinh(y)}{x^2 e^x \sin(xy) + x \ln(x) \cdot \cosh(y)}$$

$$2b) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{10xz^2 - 18x^2 y^2}{10x^2 z - 8y^3 z^3}$$

2c) 4

2d) 16

$$3a) \sqrt{2} \cdot \cos(1)$$

3b) $2 \cdot \cos(1)$ dans la direction de l'axe des y

3c) Dans la direction de l'axe des x (négatif ou positif)

$$4) z = 8x + 6y - 17$$

5) (1,1) : point de selle, (1,-1) : Minimum, (-1,1) : Maximum, (-1,-1) : point de selle

6) 0