

**Calcul avancé**  
**Examen 2**  
Les dérivées partielles  
25 % de la note finale

Hiver 2016

Nom : \_\_\_\_\_

---

1. (3 points)

Trouvez les dérivées partielles  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$  et la différentielle totale des fonctions suivantes.

a)  $z = e^x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

b)  $z = \arctan(xy)$

c)  $z = x + \frac{y}{wu}$

2. (3 points)

Trouvez

a)  $\frac{dy}{dx}$  pour la fonction  $e^x \cosh(y) - \ln(x) \cdot \sin(xy) = 0$

b)  $\frac{\partial z}{\partial x}$  pour la fonction  $2x^3 + 4x^2z + 2y^3z^4 = 6xy^2$

c)  $\frac{dz}{dt}$  quand  $t = 1$  pour la fonction  $z = xy(x + y)$  si  $x = 3t^2 - 5t + 2$  et  $y = 2t + 1$

3. (3 points)

Soit la fonction suivante

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

- Trouvez la dérivée directionnelle dans la direction donnée par le vecteur  $\vec{i} - \vec{j}$  au point  $(4,0)$ .
- Toujours au point  $(4,0)$ , trouvez la grandeur et la direction de la dérivée directionnelle maximale.
- Dans quelle direction la dérivée directionnelle sera-t-elle nulle ?

4. (2 points)

Trouvez l'équation du plan tangent à la surface décrite par la fonction

$$z = x^2 - y^2$$

au point  $(3,2,5)$ .

5. (2 Points)

Trouvez les extremums relatifs de la surface décrite par la fonction

$$z = e^{-x^2+1} + x^2 + y^2$$

6. (2 Points)

La formule donnant le potentiel électrique  $V$  dans le vide doit toujours satisfaire l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Ainsi,

$$V = \frac{4}{\pi} e^{-\pi y} \sin \pi x$$

pourrait-elle être une formule valable pour le potentiel électrique ?

Réponses

$$1a) \frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{e^x}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$dz = \left( e^x \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{e^x}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right) dx + \frac{xe^x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy$$

$$1b) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2}$$

$$dz = \frac{y}{1+x^2y^2} dx + \frac{x}{1+x^2y^2} dy$$

$$1c) \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{wu} \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{-y}{w^2u} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-y}{wu^2}$$

$$dz = dx + \frac{1}{wu} dy - \frac{y}{w^2u} dw - \frac{y}{wu^2} du$$

$$2a) \frac{dy}{dx} = - \frac{xe^x \cosh(y) - \sin(xy) - xy \ln(x) \cdot \cos(xy)}{xe^x \sinh(y) - x^2 \ln(x) \cdot \cos(xy)}$$

$$2b) \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{6x^2 + 8xz - 6y^2}{4x^2 + 8y^3z^3}$$

2c) 9

$$3a) \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3b) 1/2 dans la direction de l'axe des x

3c) Dans la direction de l'axe des y (négatif ou positif)

$$4) z = 6x - 4y - 5$$

5) (0,0) : point de selle      (1,0) : Minimum      (-1,0) : Minimum

6) Oui