Les proportions

Voici une petite règle peu connue concernant les proportions. Si

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

alors

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{k_1a+k_2c+k_3e}{k_1b+k_2d+k_3f}$$

où les k sont n'importe quel nombre. En fait, c'est vrai peu importe le nombre de proportions, pas uniquement quand il y a 3.

Preuve

$$\frac{k_1a+k_2c+k_3e}{k_1b+k_2d+k_3f}=\frac{k_1a\left(1+\frac{k_2c}{k_1a}+\frac{k_3e}{k_1a}\right)}{k_1b\left(1+\frac{k_2d}{k_1b}+\frac{k_3f}{k_1b}\right)}$$

Comme $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ et $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{e}{a}=\frac{f}{b}$, on a

$$\frac{k_1a+k_2c+k_3e}{k_1b+k_2d+k_3f}=\frac{k_1a\,\cancel{\left(1+\frac{k_2d}{k_1b}+\frac{k_3f}{k_1b}\right)}}{k_1b\,\cancel{\left(1+\frac{k_2d}{k_1b}+\frac{k_3f}{k_1b}\right)}}=\frac{a}{b}$$

Cela veut dire que les égalités suivantes sont vraies

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{a+kc}{b+kd}$$

Exemple Calculez

$$\frac{x}{y}$$

Si

$$\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$$

Si on adopte la règle générale avec tous les k = 1, on a

$$\frac{x}{y} = \frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y} = \frac{2(x+y)}{x+y} = 2$$