Solutionnaire du chapitre 9

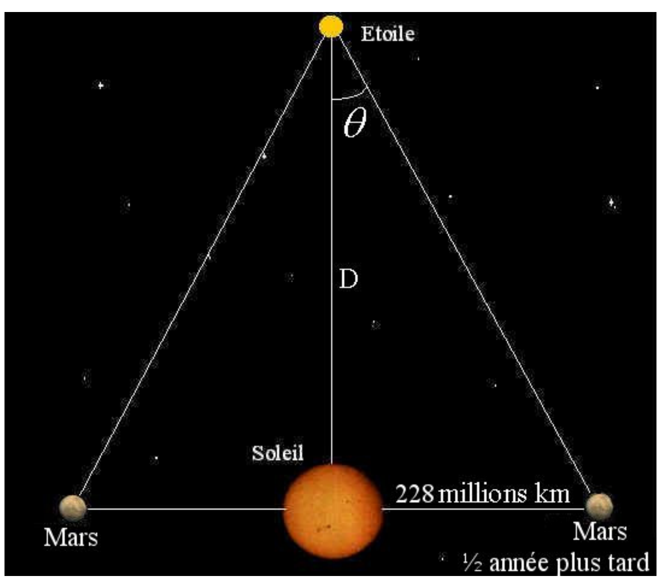
1. La distance est

$$\begin{aligned} D &= \frac{3,26156al}{\theta_{(\text{sec})}} \\ &= \frac{3,26156al}{0,0394} \\ &= 82,8al \end{aligned}$$

2. La parallaxe est

$$\begin{aligned} D &= \frac{1pc}{\theta_{(\text{sec})}} \\ 73,6pc &= \frac{1pc}{\theta_{(\text{sec})}} \\ \theta_{(\text{sec})} &= 0,0136'' \end{aligned}$$

3. La triangulation se ferait alors avec l'orbite de Mars. On aurait alors la situation suivante.



www.astrosurf.com/voyager3/astro/unites.htm

On aurait alors

$$\tan\theta = \frac{2,28\times 10^{11}m}{D}$$

En général, l'angle est très petit (le plus grand dépasse à peine 0,0002°). On peut donc utiliser l'approximation des petits angles

$$\tan\theta \approx \theta$$

où l'angle est en radian. On a donc

$$\theta_{(rad)} = \frac{2,28\times 10^{11}m}{D}$$
$$D = \frac{2,28\times 10^{11}m}{\theta_{(rad)}}$$

Généralement, on mesure l'angle en seconde d'arc, qui vaut 1/3600 degré (chaque degré est divisé en 60 minutes d'arc et chaque minute d'arc est divisé en 60 secondes d'arc). Aussi, on veut obtenir une réponse en année-lumière. On va donc transformer cette équation pour qu'on puisse utiliser les angles en secondes pour obtenir une distance en année-lumière.

Le lien entre l'angle en seconde et l'angle en radian est

$$\theta_{(rad)} = \theta_{(\sec)} \cdot \frac{1}{3600}\frac{\deg}{\sec} \cdot \frac{\pi}{180}\frac{rad}{\deg}$$

On divise l'angle en seconde par 3600 pour obtenir les degrés, puis on transforme les degrés en radian avec la fraction de droite dans l'équation.

On a donc

$$\begin{aligned} D &= \frac{2,28\times 10^{11}m}{\theta_{(rad)}} \\ &= \frac{2,28\times 10^{11}m}{\theta_{(\sec)} \cdot \frac{1}{3600}\frac{\deg}{\sec} \cdot \frac{\pi}{180}\frac{rad}{\deg}} \\ &= \frac{1}{\theta_{(\sec)}} \cdot \frac{2,28\times 10^{11}m}{\frac{1}{3600}\frac{\deg}{\sec} \cdot \frac{\pi}{180}\frac{rad}{\deg}} \end{aligned}$$

En calculant la valeur du terme de droite, on obtient

$$D = \frac{4,7028\times10^{16}\,m}{\theta_{(\text{sec})}}$$

Le parsec aurait donc une longueur de 4,7028 x 10^{16} m.

La distance faite par la lumière pendant une année sur Mars est

$$\begin{aligned} D &= ct \\ &= 3\times10^{8}\,\tfrac{m}{s}\cdot\left(686,971\cdot24\cdot60\cdot60s\right) \\ &= 1,7806\times10^{16}\,m \end{aligned}$$

Le nombre de parsecs par année-lumière est

$$\frac{4,7028\times10^{16}\,m}{1,7806\times10^{16}\,m} = 2,641$$

On aurait donc

1 pc = 2,641 al

au lieu de 1 pc = 3,262 al

4. La vitesse tangentielle est liée à la vitesse angulaire par

$$\omega = \frac{v_t}{D}$$

Puisque la distance est

$$D = \frac{1,496\times10^{11}\,m}{\theta}$$

On arrive donc à

$$\begin{aligned} v_t &= \omega D \\ &= 1,496\times10^{11}\,m\cdot\frac{\omega}{\theta} \end{aligned}$$

Dans cette formule, la vitesse angulaire est en radians par seconde et l'angle est en radians. Inutile de changer les radians en secondes d'arc puisqu'on fera ce changement en haut et en bas de la division et les facteurs de conversion s'annuleraient. Toutefois, il faut changer les secondes en années. On a alors

$$\begin{aligned} v_t &= \omega D \\ &= 1,496\times10^{11} m \cdot \frac{1an}{365,25\cdot24\cdot60\cdot60s}\cdot\frac{\omega}{\theta} \\ &= 4740 \tfrac{m\,an}{s}\cdot\frac{\omega}{\theta} \\ &= 4,74 \tfrac{km\,an}{s}\cdot\frac{\omega}{\theta} \end{aligned}$$

5. On trouve la luminosité avec la formule suivante.

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

$$1,29\times10^{-8} \tfrac{W}{m^2} = \frac{L}{4\pi\cdot\left(16,7\cdot9,46\times10^{15} m\right)^2}$$

$$L = 4,046\times10^{27} W$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$4,046\times10^{27} W\cdot\frac{1L_\odot}{3,828\times10^{26} W} = 10,6L_\odot$$

6. On trouve premièrement que l'intensité lumineuse est de

$$\begin{aligned} I &= 2,518\times10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4m_{bol}} \\ &= 2,518\times10^{-8} \tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4\cdot-0,90} \\ &= 5,768\times10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

On trouve la luminosité avec la formule suivante.

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

$$5,768\times10^{-8} \tfrac{W}{m^2} = \frac{L}{4\pi\cdot\left(863\cdot9,46\times10^{15} m\right)^2}$$

$$L = 4,831\times10^{31} W$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$4,831\times10^{31}W\cdot\frac{1L_{\odot}}{3,828\times10^{26}W}=126\,211L_{\odot}$$

7. On trouve premièrement que l'intensité lumineuse est de

$$\begin{aligned}I&=2,518\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4m}\\&=2,518\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0,4\cdot-0,58}\\&=4,296\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}\end{aligned}$$

On trouve ensuite la distance de l'étoile

$$\begin{aligned}D&=\frac{3,26156al}{\theta_{(\text{sec})}}\\&=\frac{3,26156al}{0,089}\\&=36,65al\end{aligned}$$

On trouve ensuite la luminosité avec la formule suivante.

$$\begin{aligned}I&=\frac{L}{4\pi D^2}\\4,296\times10^{-8}\tfrac{W}{m^2}&=\frac{L}{4\pi\cdot\left(36,65\cdot9,46\times10^{15}m\right)^2}\\L&=6,490\times10^{28}W\end{aligned}$$

En luminosité solaire, cette luminosité est

$$6,490\times10^{28}W\cdot\frac{1L_{\odot}}{3,828\times10^{26}W}=170L_{\odot}$$

8. L'intensité minimale est

$$\begin{aligned} I &= 2{,}518\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0{,}4m} \\ &= 2{,}518\times10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2}\cdot10^{-0{,}4\cdot6} \\ &= 1{,}00\times10^{-10}\,\tfrac{W}{m^2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\ 1{,}00\times10^{-10}\,\tfrac{W}{m^2} &= \frac{10^{11}\cdot3{,}828\times10^{26}W}{4\pi d^2} \\ d &= 1{,}743\times10^{23}m \end{aligned}$$

En année-lumière, cette distance est 18,43 millions d'années-lumière

9. La magnitude absolue est

$$\begin{aligned} M_{bol} &= 2{,}5\log\left(\frac{78{,}7L_\odot}{L}\right) \\ &= 2{,}5\log\left(\frac{78{,}7L_\odot}{6{,}93L_\odot}\right) \\ &= 2{,}64 \end{aligned}$$

10. On a

$$\begin{aligned} M_{bol} &= 2{,}5\log\left(\frac{78{,}7L_\odot}{L}\right) \\ -2{,}04 &= 2{,}5\log\left(\frac{78{,}7L_\odot}{L}\right) \\ L &= 515L_\odot \end{aligned}$$

11. On a

$$\begin{aligned} M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ 4,7 &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{326,2al}\right) \\ m &= 9,7 \end{aligned}$$

12. a) On a

$$\begin{aligned} M_{bol} &= m_{bol} + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ &= -0,851 + 5\log\left(\frac{32,62al}{139al}\right) \\ &= -4,0 \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} M_{bol} &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right) \\ -4,0 &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right) \\ L &= 3129L_\odot \end{aligned}$$

13. On a

$$\begin{aligned} \overline{M} &= -2,43\log\left(\frac{P}{10j}\right) - 4,05 \\ &= -2,43\log\left(\frac{48j}{10j}\right) - 4,05 \\ &= -5,71 \end{aligned}$$

14. La magnitude visuelle absolue est

$$\begin{aligned}\overline{M} &= -2,43\log\left(\frac{P}{10j}\right)-4,05\\ &= -2,43\log\left(\frac{8j}{10j}\right)-4,05\\ &= -3,81\end{aligned}$$

Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned}M &= m+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ -3,81 &= 2,72+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ D &= 661al\end{aligned}$$

15. Puisque c'est une étoile RR de la Lyre on va prendre une luminosité de 45 $L_\odot$. Avec une telle luminosité, la magnitude bolométrique absolue est

$$\begin{aligned}M_{bol} &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{L}\right)\\ &= 2,5\log\left(\frac{78,7L_\odot}{45L_\odot}\right)\\ &= 0,61\end{aligned}$$

On trouve finalement la distance avec la formule

$$\begin{aligned}M_{bol} &= m_{bol}+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ 0,61 &= 12,26+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right)\\ D &= 6974al\end{aligned}$$

16. a) La période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{tot}}}$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\left(9 \cdot 1,496 \times 10^{11} m\right)^3}{6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \left(2,7 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg\right)}}$$

$$= 5,1855 \times 10^8 s$$

$$= 16,43 ans$$

b) Les rayons des orbites se trouvent avec ces deux équations.

$$r = r_A + r_B$$
$$M_A r_A = M_B r_B$$

On a donc

$$9UA = r_A + r_B$$
$$9UA = r_A + \frac{M_A r_A}{M_B}$$
$$9UA = r_A \left(1 + \frac{M_A}{M_B}\right)$$
$$9UA = r_A \cdot \left(1 + \frac{1,8}{0,9}\right)$$
$$9UA = 3 \cdot r_A$$
$$r_A = 3UA$$

De là, on trouve que

$$r_B = 6UA$$

c) La vitesse de l'étoile de 1,8 $M_\odot$ est

$$v_A = \frac{M_B}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}}$$

$$= \frac{0,9}{2,7} \cdot \sqrt{\frac{6,6743 \times 10^{-11} \frac{kgm^2}{s^2} \cdot \left(2,7 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg\right)}{9 \cdot 1,496 \times 10^{11} m}}$$

$$= 5438 \tfrac{m}{s}$$

La vitesse de l'étoile de 0,9 $M_\odot$ est

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{M_A}{M_{tot}}\sqrt{\frac{GM_{tot}}{r}} \\ &= \frac{1,8}{2,7}\cdot\sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\frac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(2,7\cdot1,9885\times10^{30}kg\right)}{9\cdot1,496\times10^{11}m}} \\ &= 10\,876\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

N.B. On aurait pu aussi trouver ces vitesses avec

$$v_A = \frac{2\pi r_A}{T} = \frac{2\pi\left(3\cdot1,496\times10^{11}\right)}{5,1855\times10^8 s} = 5438\tfrac{m}{s}$$

$$v_B = \frac{2\pi r_B}{T} = \frac{2\pi\left(6\cdot1,496\times10^{11}\right)}{5,1855\times10^8 s} = 10\,876\tfrac{m}{s}$$

d) L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= -\frac{GM_AM_B}{2r} \\ &= -\frac{6,6743\times10^{-11}\frac{kgm^2}{s^2}\cdot\left(0,9\cdot1,9885\times10^{30}kg\right)\cdot\left(1,8\cdot1,9885\times10^{30}kg\right)}{2\cdot\left(9\cdot1,496\times10^{11}m\right)} \\ &= -1,588\times10^{38}J \end{aligned}$$

17. On trouve la masse avec la formule suivante

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2\cdot\left(15\cdot1,496\times10^{11}m\right)^3}{6,6743\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(32\cdot365,25\cdot24\cdot60\cdot60\right)^2} \\ &= 6,554\times10^{30}kg \end{aligned}$$

En masse solaire, cette masse est

$$6,554\times10^{30}kg\cdot\frac{1M_\odot}{1,9885\times10^{30}kg} = 3,296M_\odot$$

18. On trouve la distance entre les étoiles avec

$$\theta_{(rad)} = \frac{r}{D}$$

$$\left(\frac{17,6}{3600}\right)^{\circ} \cdot \frac{2\pi rad}{360°} = \frac{r}{4,36 \cdot 9,46 \times 10^{15} m}$$

$$r = 3,519 \times 10^{12} m$$

La masse totale est donc

$$\begin{aligned} M_{tot} &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \cdot \left(3,519 \times 10^{12} m\right)^3}{6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \left(79,9 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\right)^2} \\ &= 4,0555 \times 10^{30} kg \end{aligned}$$

En masse solaire, cette masse est

$$4,0555 \times 10^{30} kg \cdot \frac{1M_{\odot}}{1,9885 \times 10^{30} kg} = 2,039 M_{\odot}$$

Notre première équation est donc

$$M_A + M_B = 2,039 M_{\odot}$$

Avec l'équation du centre de masse, on a

$$M_A r_A = M_B r_B$$

$$M_A \theta_{A(rad)} D = M_B \theta_{B(rad)} D$$

$$M_A \theta_{A(rad)} = M_B \theta_{B(rad)}$$

$$M_A \left(\frac{\theta_{A('')}}{3600}\right) \cdot \frac{2\pi rad}{360°} = M_B \left(\frac{\theta_{B('')}}{3600}\right) \cdot \frac{2\pi rad}{360°}$$

$$M_A \theta_{A('')} = M_B \theta_{B('')}$$

On a donc

$$M_A\theta_{A(")} = M_B\theta_{B(")}$$
$$M_A \cdot 7,9 = M_B \cdot 9,7$$
$$M_A = M_B \cdot 1,2278$$

En utilisant ce résultat dans notre autre équation, on a

$$M_A + M_B = 2,039M_\odot$$
$$1,2278M_B + M_B = 2,039M_\odot$$
$$2,2278M_B = 2,039M_\odot$$
$$M_B = 0,915M_\odot$$

Ainsi, la masse de l'autre étoile est

$$M_A + M_B = 2,04M_\odot$$
$$M_A + 0,915M_\odot = 2,039M_\odot$$
$$M_A = 1,124M_\odot$$

19. On trouve le diamètre à partir

$$\theta_{(rad)} = \frac{diamètre}{D}$$

Pour calculer le diamètre, il nous faut donc la distance de l'étoile. Cette distance est

$$\begin{aligned} D &= \frac{3,26156al}{\theta_{(\text{sec})}} \\ &= \frac{3,26156al}{0,00589} \\ &= 553,7al \end{aligned}$$

Le diamètre est donc

$$\theta_{(rad)} = \frac{diamètre}{D}$$
$$\left(\frac{0,0373}{3600}\right)^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180°} = \frac{diamètre}{553,7 \cdot 9,46\times 10^{15} m}$$
$$diamètre = 9,473\times 10^{11} m$$
$$diamètre = 1362R_\odot$$

20. On trouve le diamètre avec la formule

$$\theta_{(rad)} = \frac{diamètre}{D}$$

Pour le trouver, il nous faut l'angle et la distance. La largeur angulaire de l'étoile est

$$\begin{aligned}\theta &= 1,33\frac{\lambda}{d} \\ &= 1,33 \cdot \frac{5\times10^{-6} m}{317m} \\ &= 2,098\times10^{-8} rad\end{aligned}$$

La distance est

$$\begin{aligned}D &= \frac{3,26156al}{\theta_{(\text{sec})}} \\ &= \frac{3,26156al}{0,0023} \\ &= 1418al\end{aligned}$$

Le diamètre est donc

$$\begin{aligned}\theta_{(rad)} &= \frac{diamètre}{D} \\ 2,098\times10^{-8} rad &= \frac{diamètre}{1418\cdot 9,46\times10^{15} m} \\ diamètre &= 2,815\times10^{11} m \\ diamètre &= 404,5R_{\odot}\end{aligned}$$

Le rayon est donc

$$rayon = 202,3R_{\odot}$$

21. a) La durée de vie est

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \cdot \frac{M}{M_\odot} \cdot \frac{L_\odot}{L} \\ &= 10,9Ga \cdot \frac{1,92M_\odot}{M_\odot} \cdot \frac{L_\odot}{16,6L_\odot} \\ &= 10,9Ga \cdot \frac{1,92}{16,6} \\ &= 1,26Ga \end{aligned}$$

b) La durée de vie est

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \cdot \frac{M}{M_\odot} \cdot \frac{L_\odot}{L} \\ &= 10,9Ga \cdot \frac{0,144M_\odot}{M_\odot} \cdot \frac{L_\odot}{0,0035L_\odot} \\ &= 10,9Ga \cdot \frac{0,144}{0,0035} \\ &= 448Ga \end{aligned}$$

c) La durée de vie est

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10,9Ga \cdot \frac{M}{M_\odot} \cdot \frac{L_\odot}{L} \\ &= 10,9Ga \cdot \frac{18M_\odot}{M_\odot} \cdot \frac{L_\odot}{126\,000L_\odot} \\ &= 10,9Ga \cdot \frac{18}{126\,000} \\ &= 1,56\times10^{-3}Ga \\ &= 1,56Ma \end{aligned}$$

22. a) La durée de vie de l'étoile est

$$\begin{aligned} t_{vie} &= 10{,}9Ga \cdot \frac{M}{M_{\odot}} \cdot \frac{L_{\odot}}{L} \\ &= 10{,}9Ga \cdot \frac{18M_{\odot}}{M_{\odot}} \cdot \frac{L_{\odot}}{60\,000L_{\odot}} \\ &= 10{,}9Ga \cdot \frac{18}{60\,000} \\ &= 3{,}27\times10^{-3}Ga \\ &= 3{,}27Ma \end{aligned}$$

L'énergie libérée par la fusion pour cette étoile est donc

$$\begin{aligned} E &= L \cdot t_{vie} \\ &= \left(60\,000 \cdot 3{,}828\times10^{26}W\right)\cdot\left(3{,}27\times10^{6} \cdot 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s\right) \\ &= 2{,}37\times10^{45}J \end{aligned}$$

On trouve la masse qui fusionne avec le rendement de la fusion de l'hydrogène.

$$\begin{aligned} E &= R \cdot M \\ 2{,}37\times10^{45}J &= 6{,}397\times10^{14}\tfrac{J}{kg} \cdot M \\ M &= 3{,}7\times10^{30}kg \end{aligned}$$

Le pourcentage de la masse de l'étoile qui a fusionné est donc

$$\frac{3{,}7\times10^{30}kg}{18 \cdot 1{,}9885\times10^{30}kg} = 0{,}104 = 10{,}4\%$$

b) La durée de vie de l'étoile est

$$t_{vie} = 10{,}9Ga \cdot \frac{M}{M_{\odot}} \cdot \frac{L_{\odot}}{L}$$

L'énergie libérée par la fusion pour cette étoile est donc

$$E = L \cdot t_{vie}$$

On trouve la masse qui fusionne avec le rendement de la fusion de l'hydrogène.

$$E = R \cdot M_{fusionnée}$$

$$M_{fusionnée} = \frac{E}{R}$$

$$M_{fusionnée} = \frac{Lt_{vie}}{R}$$

Le pourcentage de la masse de l'étoile qui a fusionné est donc

$$\begin{aligned}\frac{M_{fusionnée}}{M} &= \frac{1}{M}\frac{Lt_{vie}}{R} \\ &= \frac{1}{M}\frac{L}{R}\cdot 10,9Ga\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{L_\odot}{L} \\ &= \frac{1}{R}\cdot 10,9Ga\cdot\frac{L_\odot}{M_\odot}\end{aligned}$$

Avec les valeurs, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{M_{fusionnée}}{M} &= \frac{1}{6,397\times10^{14}\,\frac{J}{kg}}\cdot 10,9Ga\cdot\frac{3,828\times10^{26}W}{1,9885\times10^{30}kg} \\ &= 3,0093\times10^{-19}\,\tfrac{1}{s}\cdot 10,9Ga \\ &= 3,0093\times10^{-19}\,\tfrac{1}{s}\cdot 3,4398\times10^{17}s \\ &= 0,104\end{aligned}$$

23. La baisse relative d'intensité est

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I}{I} &= \frac{R_{planète}^2}{R_{étoile}^2} \\ &= \frac{(6371km)^2}{(695700km)^2} \\ &= 8,386\times10^{-5} \\ &= 0,008386\%\end{aligned}$$

24. a) On trouve la taille de la planète avec la formule de baisse d'intensité

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{R_{planète}^2}{R_{étoile}^2}$$

$$0,005 = \frac{R_{planète}^2}{\left(1,1 \cdot 695700 km\right)^2}$$

$$R_{planète} = 5,411 \times 10^7 m$$

$$R_{planète} = 8,49 R_{\oplus}$$

b) On trouve le demi-grand axe de l'orbite avec

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_{étoile}}}$$

On a alors

$$\left(3,2 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 s\right) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \left(1,2 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg\right)}}$$

$$a = 3,452 \times 10^{11} m$$

Comme une unité astronomique est de 1,496 x 10^{11} m, cette distance est de 2,31 UA.