Solutionnaire du chapitre 8

1. On trouve le rayon minimal avec

$$R > \sqrt{\frac{3S}{2\pi G\rho^2}}$$

$$R > \sqrt{\frac{3\cdot 2\times10^8 Pa}{2\pi\cdot 6,6743\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2750\frac{kg}{m^3}\right)^2}}$$

$$R > 435km$$

2. Pour avoir une planète sphérique en roche, on doit avoir

$$R > \sqrt{\frac{3S}{2\pi G\rho^2}}$$

$$R > \sqrt{\frac{3\cdot 2\times10^8 Pa}{2\pi\cdot 6,6743\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2300\frac{kg}{m^3}\right)^2}}$$

$$R > 520km$$

Est-ce qu'on atteint ce rayon avec 10^{21} kg. Si on frome une boule avec cette quantité de roche, on a

$$\rho = \frac{masse}{volume}$$

$$2300\frac{kg}{m^3} = \frac{10^{21}kg}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$R = 470km$$

La planète n'est donc pas sphérique.

3. L'angle par jour est

$$\frac{\theta}{\Delta t} = \frac{360°}{365,25\,j}\cdot\frac{\frac{1UA}{r}}{1+\sqrt{\frac{1UA}{r}}}$$

À 55 UA, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{\Delta t} &= \frac{360°}{365,25\,j}\cdot\frac{\frac{1UA}{55UA}}{1+\sqrt{\frac{1UA}{55UA}}}\\ &= 0,01579\,\tfrac{°}{j}\end{aligned}$$

En 14 jours, le changement est

$$\begin{aligned}\theta &= 0,01579\,\tfrac{°}{j}\cdot 14\,j\\ &= 0,221°\end{aligned}$$

4. L'angle par jour est de 1/75 °/jour. On a donc

$$\frac{1}{75}\,\frac{°}{j} = \frac{360°}{365,25\,j}\cdot\frac{\frac{1UA}{r}}{1+\sqrt{\frac{1UA}{r}}}$$

$$0,013528 = \frac{\frac{1UA}{r}}{1+\sqrt{\frac{1UA}{r}}}$$

Il ne reste qu'à isoler la distance. Pour y arriver, on va poser que

$$u = \sqrt{\frac{1UA}{r}}$$

On a alors

$$\begin{aligned}0,013528 &= \frac{u^2}{1+u}\\ 0,013528\cdot(1+u) &= u^2\\ 0 &= u^2 - 0,013528\cdot u - 0,013528\end{aligned}$$

La solution de cette équation quadratique est u = 0,12327 (Il y a aussi une solution négative, qui n'a pas de sens ici.)

On a donc

$$\begin{aligned}0,12327 &= \sqrt{\frac{1UA}{r}}\\ r &= 65,8UA\end{aligned}$$

5. a) La période est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}}$$

Pour la trouver, il nous faut la valeur de *a*. Avec les informations données, on sait que

$$76,06UA = a(1-e)$$
$$\left(4648,2\tfrac{m}{s}\right)^2 = \frac{GM_\odot(1+e)}{a(1-e)}$$

En utilisant la 1re équation dans la 2e, on arrive à

$$\left(4648,2\tfrac{m}{s}\right)^2 = \frac{GM_\odot(1+e)}{76,06UA}$$
$$1+e = \frac{\left(4648,2\tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot 76,06UA}{GM_\odot}$$
$$1+e = \frac{\left(4648,2\tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(76,06 \cdot 1,496\times10^{11}m\right)}{6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30}kg}$$
$$1+e = 1,85236$$
$$e = 0,85236$$

De là, on trouve que

$$76,06UA = a(1-e)$$
$$76,06UA = a(1-0,85236)$$
$$a = 515,2UA$$

et

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}}\\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\left(515,2\cdot 1,496\times 10^{11}m\right)^3}{6,6743\times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times 10^{30}kg}}\\ &= 3,6902\times 10^{11}s\\ &= 11\,694ans\end{aligned}$$

b) À l'aphélie, la distance est

$$\begin{aligned}r_a &= a(1+e)\\ &= 515,2UA\cdot(1+0,85236)\\ a &= 954,3UA\end{aligned}$$

6. La température moyenne est

$$\begin{aligned}T &= 278,3K\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2(1-A)}\\ &= 278,3K\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1L_\odot}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{49,32UA}\right)^2(1-0,60)}\\ &= 278,3K\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1}{49,32}\right)^2(0,40)}\\ &= 278,3K\cdot 0,11324\\ &= 31,5K\\ &= -241,6°C\end{aligned}$$

7. a) La température moyenne est

$$T = 278,3K\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2(1-A)}$$

Pour avoir une température de 150 K, on doit avoir

$$150K = 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_\odot}{1L_\odot}\right) \cdot \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot (1-0,5)}$$

$$0,53899 = \sqrt[4]{\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot 0,5}$$

$$0,08439 = \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot 0,5$$

$$D = 2,43UA$$

b) La température locale maximale est

$$T = 393,6K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)}$$

Pour avoir une température de 150 K, on doit avoir

$$150K = 393,6K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_\odot}{1L_\odot}\right) \cdot \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot (1-0,5)}$$

$$0,3811 = \sqrt[4]{\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot 0,5}$$

$$0,02109 = \left(\frac{1UA}{D}\right)^2 \cdot 0,5$$

$$D = 4,87UA$$

8. La perte de masse à chaque passage est

$$\begin{aligned} M &= 25\,000 \tfrac{kg}{s} \cdot (365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s) \\ &= 7,89 \times 10^{11} kg \end{aligned}$$

Le nombre de passages est donc

$$N = \frac{M_{tot}}{M} = \frac{10^{14} kg}{7,89 \times 10^{11} kg} = 127$$

9. Pour déterminer le type d'orbite, nous allons calculer l'énergie mécanique. Le signe de l'énergie nous dira le type d'orbite. Cette énergie est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{r}$$

On n'a pas la masse de la comète, mais ce n'est pas grave, car on veut uniquement savoir le signe de l'énergie. On a donc

$$\begin{aligned}
E_{mec} &= m\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{-GM}{r}\right) \\
&= m\left(\frac{1}{2}\cdot\left(45\,000\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{-6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}kg}{0,652\cdot 1,496\times10^{11}m}\right) \\
&= m\left(1,0125\times10^{9}\tfrac{J}{kg} + -1,3607\times10^{9}\tfrac{J}{kg}\right) \\
&= m\left(-3,482\times10^{8}\tfrac{J}{kg}\right)
\end{aligned}$$

Comme l'énergie est négative, l'orbite est elliptique.

10. a) La vitesse est

$$\begin{aligned}
v^2 &= \frac{2GM_{soleil}}{r} \\
v^2 &= \frac{2\cdot 6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}kg}{5\times10^{10}m} \\
v^2 &= 5,3087\times10^{9}\tfrac{m^2}{s^2} \\
v &= 72,86\tfrac{km}{s}
\end{aligned}$$

b) La vitesse est

$$\begin{aligned}
v^2 &= \frac{2GM_{soleil}}{r} \\
v^2 &= \frac{2\cdot 6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,9885\times10^{30}kg}{2\times10^{11}m} \\
v &= 36,43\tfrac{km}{s}
\end{aligned}$$

11. a) On peut trouver la vitesse avec la formule de l'excentricité.

$$e = \frac{v_p^2 r_p}{GM_c} - 1$$

$$1,2 = \frac{v_p^2 \cdot \left(5\times10^{10} m\right)}{6,6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30} kg} - 1$$

$$v_p = 76,417 \frac{km}{s}$$

b) On pourra trouver la vitesse avec la conservation de l'énergie. Sur cette trajectoire, l'énergie est

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$

On a donc

$$-\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$-\frac{GM_c (1-e)}{2r_p} = \frac{1}{2} v^2 + \frac{-GM_c}{r}$$

$$\frac{-6,6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30} kg \cdot (1-1,2)}{2\cdot 5\times10^{10} m} = \frac{1}{2} \cdot v^2 + \frac{-6,6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30} kg}{2\times10^{11} m}$$

$$2,6544\times10^6 \frac{J}{kg} = \frac{1}{2} \cdot v^2 + -6,6359\times10^6 \frac{J}{kg}$$

$$v = 43,11 \frac{km}{s}$$

c) On pourra trouver la vitesse avec le lien entre v_∞ et v_p

$$v_\infty^2 = v_p^2 - \frac{2GM_c}{r_p}$$

On a donc

$$v_\infty^2 = \left(76\,417 \frac{m}{s}\right)^2 - \frac{2\cdot 6,6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 1,9885\times10^{30} kg}{5\times10^{10} m}$$

$$v_\infty^2 = 5,3111\times10^8 \frac{m^2}{s^2}$$

$$v_\infty = 23,05 \frac{km}{s}$$

12. On a

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{e}$$
$$\sin\left(\frac{10°}{2}\right) = \frac{1}{e}$$
$$e = 11,47$$

13. a)

Pour connaitre la forme de l'orbite, on va calculer le signe de l'énergie mécanique de la comète. Cette énergie est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_c m}{r}$$

On n'a pas la masse de la comète, mais de toute façon, on cherche uniquement le signe de l'énergie. On a donc

$$\begin{aligned} E_{mec} &= m\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_T}{r}\right) \\ &= m \cdot \left(\frac{1}{2}\cdot\left(100\tfrac{m}{s}\right)^2 - \frac{6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,9722\times10^{24}kg}{10^{11}m}\right) \\ &= m\cdot\left(1013,9746\tfrac{m^2}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Comme la valeur est positive, l'orbite est hyperbolique.

b) On sait que

$$E_{mec} = m\cdot\left(1013,9746\tfrac{m^2}{s^2}\right)$$

Au point le plus près de la Terre, on aura donc

$$m\cdot\left(1013,9746\tfrac{m^2}{s^2}\right) = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GM_T m}{r_p}$$
$$1013,9746\tfrac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p}$$

Il nous faut une deuxième équation pour résoudre. Cette deuxième équation est la conservation du moment cinétique.

$$vr\sin\psi = v_p r_p$$
$$100\tfrac{m}{s}\cdot 10^{11}m\cdot\sin 0,5° = v_p r_p$$
$$8,7265\times10^{10}\tfrac{m^2}{s} = v_p r_p$$
$$v_p = \frac{8,7265\times10^{10}\tfrac{m^2}{s}}{r_p}$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation de l'énergie, on arrive à

$$1013,9746\tfrac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p}$$
$$1013,9746\tfrac{m^2}{s^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8,7265355\times10^{10}\tfrac{m^2}{s}}{r_p}\right)^2 - \frac{GM_T}{r_p}$$
$$1013,9746\tfrac{m^2}{s^2} = \frac{3,8076211\times10^{21}\tfrac{m^4}{s^2}}{r_p^2} - \frac{3,9860254\times10^{14}\tfrac{m^3}{s^2}}{r_p}$$
$$1013,9746\tfrac{m^2}{s^2}\cdot r_p^2 = 3,8076211\times10^{21}\tfrac{m^4}{s^2} - 3,9860254\times10^{14}\tfrac{m^3}{s^2}\cdot r_p$$
$$1013,9746\cdot r_p^2 + 3,9860254\times10^{14}m\cdot r_p - 3,8076211\times10^{21}m^2 = 0$$

La solution de cette équation quadratique est (on garde uniquement la solution positive)

$$r_p = 9\,552\,193m$$
$$= 9552km$$

Comme cette valeur est plus grande que le rayon de la Terre, la comète ne frappe pas la Terre. Elle passe cependant très près (à 3181 km de la surface).

c) On peut trouver l'excentricité avec la formule de l'énergie

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m(1-e)}{2r_p}$$
$$1013,9746\tfrac{m^2}{s^2}\cdot m = -\frac{6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,9722\times10^{24}kg\cdot m\cdot(1-e)}{2\cdot 9,552\times10^6 m}$$
$$(1-e) = -4,860\times10^{-5}$$
$$e = 1,0000486$$

14. Le rayon de Hill est

$$r_H = \sqrt[3]{\frac{M_c}{2M_{pert}}}\, r$$

Comme l'objet perturbateur a une masse deux fois plus grande que celle de la masse centrale et que la distance de l'objet perturbateur est de 4,2 al, on a

$$\begin{aligned} r_H &= \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot 4{,}2al \\ &= 2{,}646al \end{aligned}$$

En mètres, cette distance est

$$2{,}646al \cdot 9{,}46 \times 10^{15} \tfrac{m}{al} = 2{,}503 \times 10^{16} m$$

En unité astronomique, on arrive à

$$\frac{2{,}503 \times 10^{16} m}{1{,}496 \times 10^{11} \tfrac{m}{UA}} = 167\ 310UA$$