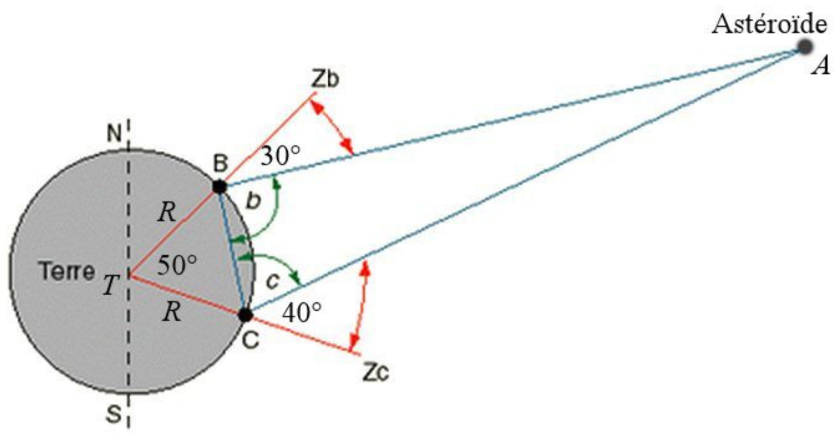
Solutionnaire du chapitre 6

1. La distance est

$$v = \frac{2d}{t}$$
$$3\times10^8 \tfrac{m}{s} = \frac{2\cdot d}{2{,}56s}$$
$$d = 3{,}84\times10^8 m$$

2. On va commencer par résoudre le triangle TBC (celui qui a un sommet au centre de la Terre).



C'est un triangle isocèle, ce qui signifie que les angles α sont égaux. On a donc

$$50° + \alpha + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 65°$$

La distance entre les points B et C est

$$BC^2 = (6371km)^2 + (6371km)^2 - 2\cdot 6371km \cdot 6371km \cdot \cos 50°$$
$$BC = 5385km$$

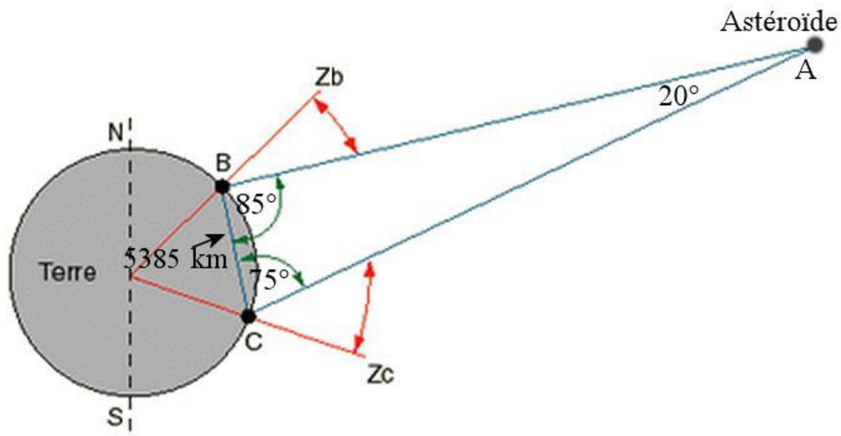
La somme des trois angles au point B est de 180°. On a donc

$$65° + b + 30° = 180°$$
$$b = 85°$$

La somme des angles au point C est aussi de 180°. On a donc

$$65° + c + 40° = 180°$$
$$c = 75°$$

On a maintenant la situation suivante.

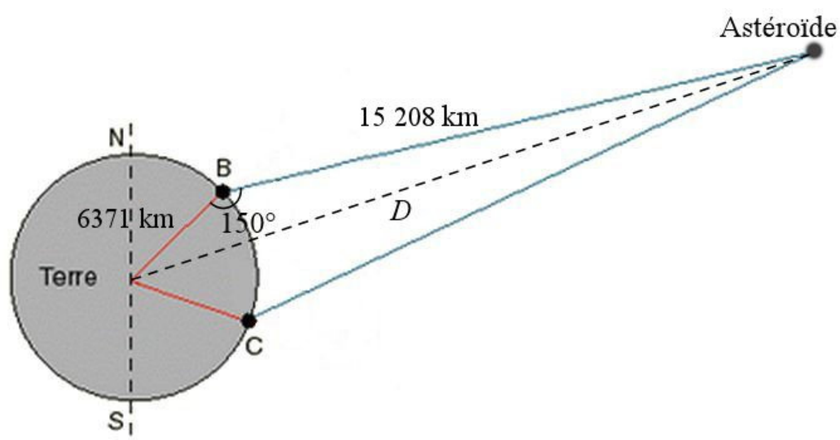


(On a trouvé l'angle de 20° en utilisant le fait que la somme du triangle ABC doit être de 180°.)

On peut maintenant trouver la distance entre le point B et l'astéroïde. (On aurait pu aussi trouver celle entre C et A). On la trouve avec la loi des sinus

$$\frac{5385km}{\sin(20°)} = \frac{x}{\sin(75°)}$$
$$x = 15\,208km$$

On a maintenant la situation suivante

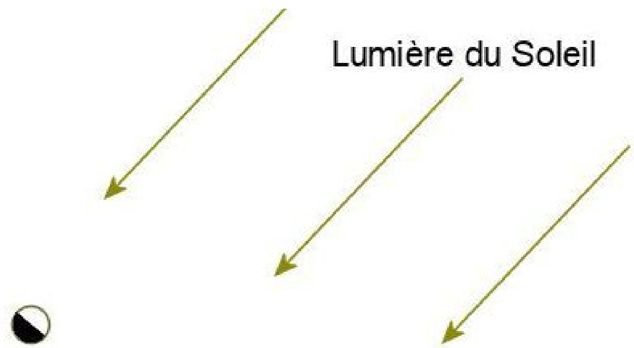


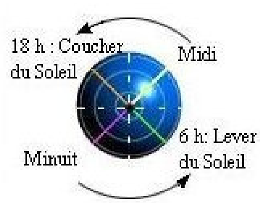
(L'angle de 150° est la somme des angles de 85° et 65°.)

On peut donc trouver la distance D avec la loi des cosinus.

$$D^2 = (6371km)^2 + (15\,208km)^2 - 2 \cdot 6371km \cdot 15\,208km \cdot \cos 150°$$
$$D = 20\,969km$$

3. On a la situation suivante





On commence à voir la Lune exactement entre 6 h et midi, donc à 9 h. On ne voit plus la Lune exactement entre 18 h et minuit, donc à 21 h. La Lune se lève donc à 9 h et se couche à 21 h.

4. La période sidérale est

$$\frac{1}{M_{sid}} = \frac{1}{15\,j} + \frac{1}{225\,j}$$
$$M_{sid} = 14,0625\,j$$

5. La période synodique est

$$\frac{1}{5,877\,j}=\frac{1}{M_{syn}}-\frac{1}{60\,190\,j}$$
$$M_{syn}=5,87642\,j$$

6. a)

La distance angulaire minimale qu'il doit y avoir entre la lune et le Soleil pour qu'il y ait une éclipse est

$$\Delta=\theta_{\oplus}+\theta_{\odot}+\theta_{☽}$$

On sait les demi-largeurs angulaires du satellite et de Soleil, mais il nous manque la demi-largeur angulaire de Naboo vu de Tasia. Comme la planète a un rayon de 8000 km et que la distance entre Naboo et Tasia est de 300 000 km, la demi-largeur angulaire est de

$$\begin{aligned}\theta&=\frac{8000km}{300000km}\\&=0,0267rad\\&=1,53°\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta&=\theta_{\oplus}+\theta_{\odot}+\theta_{☽}\\&=1,53°+0,35°+0,75°\\&=2,63°\end{aligned}$$

L'angle maximal qu'il peut y avoir avec un nœud est donc

$$\frac{\Delta}{\theta_f}=\sin(10°)$$
$$\frac{2,63°}{\theta_f}=\sin(10°)$$
$$\theta_f=15,1°$$

b) La proportion du trajet totale de Naboo qui se trouve dans une fenêtre est

$$\frac{2\cdot 15,1°}{360°}=8,414\%$$

Puisque la période est de 225 jours, cela correspond à 18,93 jours. Puisque la période synodique de Tasia est de 15 jours, il peut y avoir 1 ou 2 éclipses.

7. a) La distance est

$$\begin{aligned} D &= \frac{R_p}{\sin\left(\frac{t_e}{M_{syn}} \cdot 180° + \theta_*\right)} \\ &= \frac{8000\,km}{\sin\left(\frac{90\min}{15 \cdot 24 \cdot 60\min} \cdot 180° + \frac{1,5°}{2}\right)} \\ &= 305\,612\,km \end{aligned}$$

b) On trouve la masse de Naboo avec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Naboo}}}$$

Toutefois, il nous faut la période sidérale dans cette formule. On peut la trouver à partir de la période synodique avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_{sid}} &= \frac{1}{15\,j} + \frac{1}{225\,j} \\ M_{sid} &= 14,0625\,j \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Naboo}}} \\ 14,0625 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\left(3,05612 \times 10^8 m\right)^3}{6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot M_{Naboo}}} \\ M_{Naboo} &= 1,144 \times 10^{25}\,kg \end{aligned}$$

c) Le champ à la surface de Naboo est

$$\begin{aligned} g &= \frac{GM_{Naboo}}{R_{Naboo}^2} \\ &= \frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 1,144\times10^{25}\,kg}{\left(8\times10^6\,m\right)^2} \\ &= 11,93\,\frac{N}{kg} \end{aligned}$$

8. On aurait alors

$$\begin{aligned} D_{\oplus\odot} &= \frac{d_{\oplus☽}}{\cos\theta_{pq}} \\ 2D_{\oplus☽} &= \frac{D_{\oplus☽}}{\cos\theta_{pq}} \\ 2 &= \frac{1}{\cos\theta_{pq}} \\ \cos\theta_{pq} &= \frac{1}{2} \\ \theta_{pq} &= 60° \end{aligned}$$

9. a) La force de marée faite par la Lune est

$$\vec{F}_{marées} = \frac{GM_e m R_s}{r^3}\left[2\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right]$$

À $\theta = 0°$, on a

$$\begin{aligned} \vec{F}_{marées} &= \frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,346\times10^{22}\,kg\cdot 60kg\cdot 6,371\times10^6\,m}{\left(3,844\times10^8\,m\right)^3}\cdot\left[2\cos0°\vec{i} - \sin0°\vec{j}\right] \\ &= 6,60\times10^{-5}\,N\vec{i} \end{aligned}$$

C'est donc une force de 6,60 x 10^{-5} N dirigée vers le haut.

b) La force de marée faite par la Lune est

$$\vec{F}_{marées} = \frac{GM_e m R_s}{r^3}\left[2\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right]$$

À $\theta = 90°$, on a

$$\vec{F}_{marées} = \frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,346\times10^{22}\,kg\cdot 60kg\cdot 6,371\times10^{6}\,m}{\left(3,844\times10^{8}\,m\right)^{3}}\cdot\left[2\cos 90°\vec{i}-\sin 90°\vec{j}\right]$$
$$= -3,30\times10^{-5}\,N\vec{j}$$

C’est donc une force de 3,30 x 10^{-5} N dirigée vers le sol.

c) La force de marée faite par la Lune est

$$F_{marées} = \frac{GM_e m R_s}{r^3}\left[2\cos\theta\vec{i}-\sin\theta\vec{j}\right]$$

À $\theta = 45°$, on a

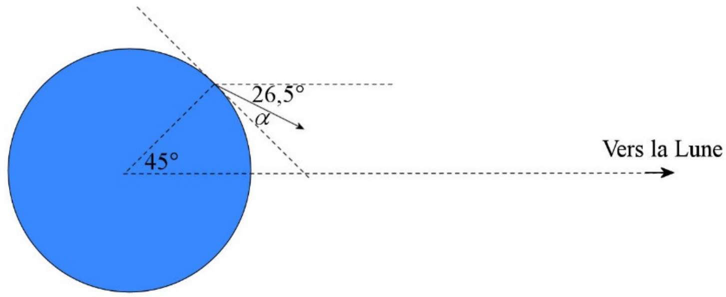
$$\vec{F}_{marées} = \frac{6,6743\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,346\times10^{22}\,kg\cdot 60kg\cdot 6,371\times10^{6}\,m}{\left(3,844\times10^{8}\,m\right)^{3}}\cdot\left[2\cos 45°\vec{i}-\sin 45°\vec{j}\right]$$
$$= 4,67\times10^{-5}\,N\vec{i} - 2,33\times10^{-5}\,N\vec{j}$$

La grandeur de cette force est

$$F_{marées} = \sqrt{\left(4,67\times10^{-5}\,N\right)^2+\left(-2,33\times10^{-5}\,N\right)^2}$$
$$= 5,22\times10^{-5}\,N$$

La direction de cette force est

$$\theta = \arctan\frac{-2,33\times10^{-5}\,N}{4,67\times10^{-5}\,N}$$
$$= -26,57°$$

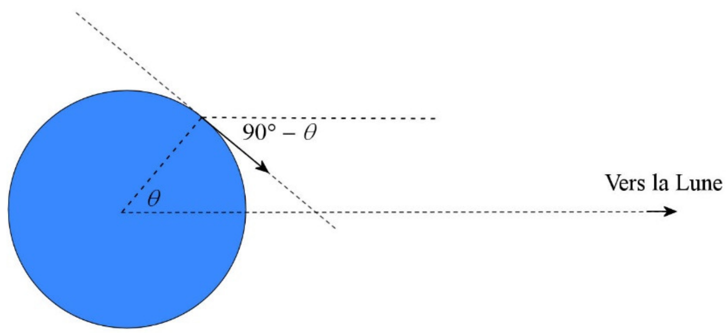


Comme à $\theta = 45°$ la surface est inclinée de 45° par rapport à l'axe des x (dirigé vers la Lune) et que la direction de la force est -26,57°, l'angle entre le sol et la force est

$$\begin{aligned}\alpha &= 45° - 26,57° \\ &= 18,43°\end{aligned}$$

C'est donc une force de 5,22 x 10^{-5} N dirigée à 18,43° vers le haut par rapport au sol.

10. À l'angle θ, l'inclinaison par rapport à l'axe des x est $-(90° - \theta)$.



La force doit donc être dans cette direction. Comme la direction de la force est donnée par

$$\tan(angle) = \frac{F_y}{F_x}$$

on peut écrire, en utilisant les prioprIétés des fonctions trigonométriques,

$$\tan -\left(90°-\theta\right)=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{\sin -\left(90°-\theta\right)}{\cos -\left(90°-\theta\right)}=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{-\sin\left(90°-\theta\right)}{\cos\left(90°-\theta\right)}=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{F_y}{F_x}$$

$$\frac{-1}{\tan\theta}=\frac{F_y}{F_x}$$

Avec les composantes de la force de marée, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\tan\theta}&=\frac{-\frac{GM_e mR_s}{r^3}\sin\theta}{\frac{GM_e mR_s}{r^3}2\cos\theta}\\&=\frac{-\sin\theta}{2\cos\theta}\\&=-\frac{1}{2}\tan\theta\end{aligned}$$

L'angle est donc

$$\begin{aligned}\frac{-1}{\tan\theta}&=-\frac{1}{2}\tan\theta\\2&=\tan^2\theta\\\theta&=54,74°\end{aligned}$$

11. La force de marée faite par la Lune est

$$F_{☽}=\frac{2GM_{☽}mR_{\oplus}}{r_{\oplus☽}^3}$$

Alors que la force de marée faite par le Soleil est

$$F_{\odot}=\frac{2GM_{\odot}mR_{\oplus}}{r_{\oplus\odot}^3}$$

Le rapport est donc

$$\begin{aligned}\frac{F_{☽}}{F_{\odot}} &= \frac{\left(\frac{2GM_{☽}mR_{\oplus}}{r_{\oplus☽}^3}\right)}{\left(\frac{2GM_{\odot}mR_{\oplus}}{r_{\oplus\odot}^3}\right)} \\ &= \frac{r_{\oplus\odot}^3 M_{☽}}{r_{\oplus☽}^3 M_{\odot}} \\ &= \frac{\left(1,496\times10^{11}m\right)^3\cdot 7,346\times10^{22}kg}{\left(3,844\times10^{8}m\right)^3\cdot 1,9885\times10^{30}kg} \\ &= 2,178\end{aligned}$$

12. On aurait alors

$$\begin{gathered}F_{marées} = 0,01mg \\ \frac{2GM_{☽}mR_{\oplus}}{r^3} = 0,01mg \\ \frac{2\cdot 6,6743\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,346\times10^{22}kg\cdot \cancel{m}\cdot 6,371\times10^{6}\mathrm{m}}{r^3} = 0,01\cancel{m}\cdot 9,8\frac{N}{kg} \\ \frac{2\cdot 6,6743\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,346\times10^{22}kg\cdot 6,371\times10^{6}m}{r^3} = 0,01\cdot 9,8\frac{N}{kg} \\ r = 8607km\end{gathered}$$

13. La hauteur est

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{3M_eR_s^4}{2M_sr^3} \\ &= \frac{3\cdot 1,9\times10^{27}kg\cdot\left(6,371\times10^{6}m\right)^4}{2\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot\left(4,2\cdot 1,496\times10^{11}m\right)^3} \\ &= 3,1\times10^{-6}m\end{aligned}$$

14. La distance est

$$\begin{aligned} r_{Roche} &= 2,42285 \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_e}{\rho_s}} R_e \\ &= 2,42285 \cdot \sqrt[3]{\frac{1408 \frac{kg}{m^3}}{5427 \frac{kg}{m^3}}} \cdot R_\odot \\ &= 1,545 R_\odot \\ &= 1,545 \cdot 695\,500 km \\ &= 1,075 \text{ million de km} \end{aligned}$$

15. En 50 000 jours, la période a augmenté de 0,025 s. Calculons combien de rotation la planète à fait pendant ce temps. Comme il y a eu 50 000 jours, le décalage par tour est de

$$\frac{0,025s}{50000} = 5 \times 10^{-7} s$$

Ainsi, la deuxième rotation a duré 36000 s + Δt. Puis, la troisième rotation a duré 36000 s + $2\Delta t$, la quatrième rotation a durée 36000 s + $3\Delta t$ et ainsi de suite jusqu'à la 50 000e rotation qui a duré 36000 s + 49 999Δt. Ainsi, la somme de tous ces petits ajouts est

$$\begin{aligned} t_{total} &= \Delta t + 2\Delta t + 3\Delta t + 4\Delta t + ... + 49999\Delta t \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 49999)\Delta t \end{aligned}$$

On utilise maintenant

$$1 + 2 + 3 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

pour calculer la somme. On arrive alors à

$$\begin{aligned} t_{total} &= 1\,249\,975\,000 \Delta t \\ &= 1\,249\,975\,000 \cdot 5 \times 10^{-7} s \\ &= 625 s \end{aligned}$$

16. Si on a accumulé une rotation de retard, c'est qu'on a 86 164 secondes de retard (c'est le 23h 56 min et 4 s nécessaire pour faire une rotation).

On sait que l'allongement de la période est

$$\begin{aligned} t_{total} &= \Delta t + 2\Delta t + 3\Delta t + 4\Delta t + ... + N\Delta t \\ &= (1+2+3+4+...+N)\Delta t \\ &= \frac{N(N+1)}{2}\Delta t \end{aligned}$$

Comme l'allongement de la période en 1 jour est

$$\frac{1,7\times 10^{-3}s}{36525} = 4,654\times 10^{-8}s$$

on a

$$\begin{aligned} t_{total} &= \frac{N(N+1)}{2}\Delta t \\ 86\,164s &= \frac{N(N+1)}{2}\cdot 4,654\times 10^{-8}s \\ \frac{N(N+1)}{2} &= 1,85126\times 10^{12} \\ N^2 + N &= 3,70252\times 10^{12} \\ N^2 + N - 3,70252\times 10^{12} &= 0 \\ N &= 1\,924\,192 \end{aligned}$$

Ce nombre de jours correspond à 5268 ans.

17. L'énergie cinétique de rotation est

$$\begin{aligned} E_k &= \tfrac{1}{2} I\omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2} I\left(\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 \\ &= \frac{2I\pi^2}{T^2} \end{aligned}$$

Le rythme de changement de l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned}\frac{dE_k}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{2I\pi^2}{T^2}\right)\\ &= 2I\pi^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T^2}\right)\\ &= 2I\pi^2 \frac{d}{dT}\left(\frac{1}{T^2}\right)\frac{dT}{dt}\\ &= -\frac{4I\pi^2}{T^3}\frac{dT}{dt}\end{aligned}$$

Ce dT/dt est le rythme de changement est de

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1,7\times10^{-3}s}{36525\,jours} = 4,654\times10^{-8}\,\tfrac{s}{jour}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{dE_k}{dt} &= -\frac{4I\pi^2}{T^3}\frac{dT}{dt}\\ &= -\frac{4\cdot 0,3397\cdot MR^2\pi^2}{T^3}\frac{dT}{dt}\\ &= -\frac{4\cdot 0,3397\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot\left(6,371\times10^6 m\right)^2\cdot\pi^2}{\left(86\,400s\right)^3}\cdot 4,654\times10^{-8}\,\tfrac{s}{jour}\\ &= -2,346\times10^{17}\,\tfrac{J}{jour}\end{aligned}$$

18. On a

$$\begin{aligned} r_H &= \sqrt[3]{\frac{M_c}{2M_{pert}}}\,r\\ 1,496\times10^{11}m &= \sqrt[3]{\frac{1,9885\times10^{30}kg}{2\cdot M_{pert}}}\cdot 7,8\times10^{11}m\\ M_{pert} &= 1,41\times10^{32}kg \approx 74\,000 M_{jupiter}\end{aligned}$$

19. En ce moment, le temps entre le début de l'hiver et le périhélie est 14 jours (nombre de jour entre le 21 décembre et le 4 janvier). L'angle entre la position de la Terre sur l'obtite au début de l'hiver et le périhélie est (si on suppose que la vitesse angulaire est constante)

$$\frac{\theta}{360°} = \frac{14\,j}{365,2565654\,j}$$
$$\theta = 13,80°$$

Dans 1000 ans, le périhélie sera 13,97° plus tôt sur l'orbite. Quant au périhélie, il sera 3,26° plus loin sur l'orbite. Ainsi, l'angle entre la position de la Terre sur l'obtite au début de l'hiver et le périhélie aura augmentée de 17,23°. L'angle sera donc de

$$\begin{aligned}\theta' &= 13,80° + 17,23° \\ &= 31,03°\end{aligned}$$

Le temps qu'il faut pour parcourir cet angle est (si on suppose que la vitesse angulaire est constante)

$$\frac{31,03°}{360°} = \frac{t}{365,265654\,j}$$
$$t = 31,5 \text{ jours}$$

Le périhélie sera donc 31 jours après le début de l'hiver. Il sera donc le 21 janvier.

20. a) La température moyenne de la Lune serait de

$$\begin{aligned}T &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_\odot}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)} \\ &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_\odot}{1L_\odot}\right)\cdot\left(\frac{1UA}{2UA}\right)^2 \cdot (1-0,07)} \\ &= 278,3K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1-0,07)} \\ &= 193,2K \\ &= -79,9°C\end{aligned}$$

b) Le température maximale est

$$\begin{aligned}
T &= 393,6K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{L}{1L_{\odot}}\right)\left(\frac{1UA}{D}\right)^2 (1-A)} \\
&= 393,6K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1L_{\odot}}{1L_{\odot}}\right)\cdot\left(\frac{1UA}{2UA}\right)^2 \cdot (1-0,07)} \\
&= 393,6K \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1-0,07)} \\
&= 273,3K \\
&= 0,2°C
\end{aligned}$$

c) La vitesse de libération à la surface de la Lune est

$$\begin{aligned}
v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM_{Lune}}{R_{Lune}}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6743\times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 7,346\times 10^{22} kg}{1,737\times 10^{6} m}} \\
&= 2376 \tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

À 0,2°C, la vitesse des molécules d'oxygène est

$$\begin{aligned}
v_{mol} &= \sqrt{\frac{2kT}{m_{mol}}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38\times 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 273,3K}{32 \cdot 1,6605\times 10^{-27} kg}} \\
&= 377 \tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

Comme la vitesse de libération est seulement 6,3 fois plus grand que la vitesse des molécules, la Lune ne peut pas garder son atmosphère d'oxygène.

21. a) La densité est de

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{M}{volume} \\
&= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}
\end{aligned}$$

La masse est formée de deux parties : le noyau et le manteau. La masse du noyau est égal à sa densité multipliée par son volume. Disons que le rayon du noyau est de R'. On a donc

$$M_1 = \rho_1 \tfrac{4}{3}\pi R'^3$$

La masse du manteau est aussi égale à la masse multipliée par le volume. Dans ce cas, le volume est celui d'une sphère de rayon R dans laquelle il y a une cavité de rayon R'. La masse est donc

$$M_2 = \rho_2 \left(\tfrac{4}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{3}\pi R'^3\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{M_1 + M_2}{\tfrac{4}{3}\pi R^3} \\
&= \frac{\rho_1 \tfrac{4}{3}\pi R'^3 + \rho_2 \left(\tfrac{4}{3}\pi R^3 - \tfrac{4}{3}\pi R'^3\right)}{\tfrac{4}{3}\pi R^3} \\
&= \frac{\rho_1 R'^3 + \rho_2 \left(R^3 - R'^3\right)}{R^3} \\
&= \rho_1 \left(\frac{R'}{R}\right)^3 + \rho_2 \left(1 - \left(\frac{R'}{R}\right)^3\right) \\
&= \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{R'}{R}\right)^3
\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs pour la Terre, on a

$$\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{R'}{R}\right)^3$$

$$4500 \tfrac{kg}{m^3} = 3000 \tfrac{kg}{m^3} + \left(12000 \tfrac{kg}{m^3} - 3000 \tfrac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(\frac{R'}{R}\right)^3$$

$$1500 = 9000 \cdot \left(\frac{R'}{R}\right)^3$$

$$\frac{R'}{R} = 0,550$$

(Ce n'est pas très loin de la véritable valeur de 0,545.)

b) En utilisant les valeurs pour la Lune, on a

$$\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{R'}{R}\right)^3$$

$$3348\tfrac{kg}{m^3} = 3000\tfrac{kg}{m^3} + \left(12000\tfrac{kg}{m^3} - 3000\tfrac{kg}{m^3}\right)\cdot\left(\frac{R'}{R}\right)^3$$

$$348 = 9000\cdot\left(\frac{R'}{R}\right)^3$$

$$\frac{R'}{R} = 0,338$$

(C'est quand même assez loin de la véritable valeur de 0,190 ☹.)