Solutionnaire du chapitre 5

1. Si on obtient 15 x 10^6 J avec 5 kg, la quantité d'énergie qu'on peut obtenir avec 1,9885 x 10^{30} kg est

$$\begin{aligned} E &= \frac{15\times10^{6}J}{5kg}\cdot 1,9885\times10^{30}kg \\ &= 5,9655\times10^{36}J \end{aligned}$$

La durée de vie du Soleil serait alors de

$$\begin{aligned} t_{vie} &= \frac{E}{L} \\ &= \frac{5,9655\times10^{36}J}{3,828\times10^{26}W} \\ &= 1,558\times10^{10}s \\ &= 493,8ans \end{aligned}$$

2. Calculons l'énergie libérée par cette contraction. L'énergie gravitationnelle initiale est

$$U_g = -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Alors que l'énergie finale est

$$U_g' = -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R'}$$

La variation d'énergie gravitationnelle de l'étoile est donc

$$\begin{aligned}\Delta U_g &= U_g' - U_g \\ &= -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R'} - -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R} \\ &= \frac{8}{5}GM^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) \\ &= \frac{8}{5}\cdot 6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(2\cdot 1,9885\times10^{30}kg\right)^2\cdot\left(\frac{1}{30\cdot 1,496\times10^{11}m}-\frac{1}{0,1\cdot 1,496\times10^{11}m}\right) \\ &= -1,125\times10^{41}J\end{aligned}$$

Si l'énergie gravitationnelle de l'étoile a baissé de 1,125 x 10^{41} J et que l'étoile rayonne la moitié de cette énergie selon le théorème du viriel, alors l'énergie rayonnée est

$$\begin{aligned}E &= \frac{1,125\times10^{41}J}{2} \\ &= 5,626\times10^{40}J\end{aligned}$$

La puissance rayonnée est donc de

$$\begin{aligned}P &= \frac{E}{t} \\ &= \frac{5,626\times10^{40}J}{100\,000\cdot 365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60} \\ &= 1,783\times10^{28}W \\ &= 46,6L_\odot\end{aligned}$$

3. L'énergie gravitationnelle est

$$U_g = -\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Puisque la puissance est le rythme auquel cette énergie change, on a

$$\begin{aligned}P &= \frac{dU_g}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}\right) \\ &= \frac{d}{dR}\left(-\frac{8}{5}\frac{GM^2}{R}\right)\frac{dR}{dt} \\ &= \frac{8}{5}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt}\end{aligned}$$

Selon le théorème du viriel, seulement la moitié de l'énergie est rayonnée. Cela veut dire que la puissance obtenue par la gravitation doit être de

$$\begin{aligned}P &= 2\cdot 3,828\times 10^{26}W \\ &= 7,656\times 10^{26}W\end{aligned}$$

On a donc

$$7,656\times 10^{26}W = \frac{8}{5}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

$$7,656\times 10^{26}W = \frac{8}{5}\cdot\frac{6,6743\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\left(1,9885\times 10^{30}kg\right)^2}{\left(6,957\times 10^{8}m\right)^2}\cdot\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = 8,775\times 10^{-7}\,\tfrac{m}{s}$$

Si on change les unités pour avoir de km par siècle, on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= 8,776\times 10^{-7}\,\tfrac{m}{s}\cdot\frac{1km}{1000m}\cdot\frac{100\cdot 365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60s}{1\,\text{siècle}} \\ &= 2,77\,\tfrac{km}{siecle}\end{aligned}$$

4. L'énergie libérée lors de la première étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(2\cdot 1,007\ 825\ 032u - 2,014\ 101\ 778u\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(0,001\,548\ 286u\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= 1,442MeV\end{aligned}$$

L'énergie libérée lors de la deuxième étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(1,007\ 825\ 032u + 2,014\ 101\ 778u - 3,016\ 029\ 319u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,005\,897\,491u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 5,494MeV\end{aligned}$$

L'énergie libérée lors de la troisième étape est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(2\cdot 3,016\ 029\ 319u - 4,002\ 603\ 254u - 2\cdot 1,007\ 825\ 032u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,013\,805\,532u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 12,860MeV\end{aligned}$$

5. a) L'énergie libérée est

$$\begin{aligned}Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(3\cdot 4,002\,603\,254u - 12,000\,000\,000u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= \left(0,007\,809\,762u\right)\cdot 931,5\tfrac{MeV}{u}\\ &= 7,275MeV\end{aligned}$$

b) Le rendement est

$$\begin{aligned}R &= \frac{Q}{m_{initiale}}\\ &= \frac{7,275\times 10^{6}\cdot 1,602\times 10^{-19}J}{3\cdot 4,002\,603\,254\cdot 1,660\ 559\times 10^{-27}kg}\\ &= 5,845\times 10^{13}\tfrac{J}{kg}\end{aligned}$$

c) Comme le Soleil est composé à 27,1 % d'hélium, la masse d'hélium dans le Soleil est

$$\begin{aligned}M_{He} &= 0,271\cdot 1,9885\times 10^{30}kg\\ &= 5,389\times 10^{29}kg\end{aligned}$$

L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E &= R \cdot M \\ &= 5{,}845 \times 10^{13} \tfrac{J}{kg} \cdot 5{,}389 \times 10^{29} kg \\ &= 3{,}15 \times 10^{43} J \end{aligned}$$

d) La durée de vie est

$$\begin{aligned} E &= Pt \\ 3{,}15 \times 10^{43} J &= 3{,}828 \times 10^{26} W \cdot t \\ t &= 8{,}228 \times 10^{16} s \\ t &= 2{,}61 \times 10^{9} ans \end{aligned}$$

Ce qui est 2,61 milliards d'années.

6. La masse solaire moyenne serait

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1 \frac{g}{mol}}{2X + 0{,}75Y} \\ &= \frac{1 \frac{g}{mol}}{2 \cdot 0{,}5 + 0{,}75 \cdot 0{,}5} \\ &= 0{,}7273 \tfrac{g}{mol} \end{aligned}$$

7. Comme il n'y avait pas 3 éléments dans notre formule de la masse molaire, il faut refaire une formule.

Le pourcentage de masse d'hydrogène est *X*, le pourcentage de masse d'hélium est *Y* et on va dire que le pourcentage de masse de carbone est de *Z*.

Comme la masse d'hydrogène est *Xm,* le nombre de moles d'hydrogène est

$$n_H = \frac{Xm}{1 \frac{g}{mol}} = 1 \tfrac{mol}{g} \cdot Xm$$

Comme la masse d'hélium est *Ym,* le nombre de moles d'hélium est

$$n_{He} = \frac{Ym}{4 \frac{g}{mol}} = \tfrac{1}{4} \tfrac{mol}{g} \cdot Ym$$

Comme la masse de carbone est *Zm,* le nombre de moles de carbone est

$$n_C = \frac{Zm}{12\frac{g}{mol}} = \tfrac{1}{12}\tfrac{mol}{g} \cdot Zm$$

Mais attention, les noyaux des atomes ne sont pas les seules particules présentes. Comme la température est passablement élevée dans le Soleil, les atomes sont ionisés et tous les électrons sont libres. Ces électrons feront aussi une pression et on doit donc les compter. Chaque atome d'hydrogène donne 1 électron, chaque atome d'hélium donne 2 électrons et chaque atome de carbone donne 6 électrons. Le nombre de moles d'électrons libres est donc

$$n_é = 1 \cdot 1\tfrac{mol}{g} \cdot Xm + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\tfrac{mol}{g} \cdot Ym + 6 \cdot \tfrac{1}{12}\tfrac{mol}{g} \cdot Zm$$

Le nombre total de moles est donc de

$$\begin{aligned} n &= 1\tfrac{mol}{g} \cdot Xm + \tfrac{1}{4}\tfrac{mol}{g} \cdot Ym + \tfrac{1}{12}\tfrac{mol}{g} \cdot Zm + 1 \cdot 1\tfrac{mol}{g} \cdot Xm + 2 \cdot \tfrac{1}{4}\tfrac{mol}{g} \cdot Ym + 6 \cdot \tfrac{1}{12}\tfrac{mol}{g} \cdot Zm \\ &= 2\tfrac{mol}{g} \cdot Xm + \tfrac{3}{4}\tfrac{mol}{g} \cdot Ym + \tfrac{7}{12}\tfrac{mol}{g} \cdot Zm \end{aligned}$$

Puisque

$$n = \frac{m}{\mu}$$

la masse molaire moyenne est

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{n} \\ &= \frac{m}{2\frac{mol}{g} \cdot Xm + \frac{3}{4}\frac{mol}{g} \cdot Ym + \frac{7}{12}\frac{mol}{g} \cdot Zm} \\ &= \frac{1\frac{g}{mol}}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{7}{12}Z} \end{aligned}$$

Puisque $X = 0{,}5$, $Y = 0{,}4$ et $Z = 0{,}1$, on a

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1\frac{g}{mol}}{2 \cdot 0{,}5 + \frac{3}{4} \cdot 0{,}4 + \frac{7}{12} \cdot 0{,}1} \\ &= 0{,}7362\tfrac{g}{mol} \end{aligned}$$

8. a) La masse molaire est

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1\frac{g}{mol}}{2X + 0,75Y} \\ &= \frac{1\frac{g}{mol}}{2\cdot 0,7 + 0,75\cdot 0,3} \\ &= 0,6154\frac{g}{mol}\end{aligned}$$

La pression est donc

$$\begin{aligned}P &= \frac{\rho\cdot 8,31\frac{J}{molK}\cdot T}{\mu} \\ &= \frac{152900\frac{kg}{m^3}\cdot 8,31\frac{J}{molK}\cdot 15\,670\,000K}{0,0006154\frac{kg}{mol}} \\ &= 3,235\times 10^{16}Pa\end{aligned}$$

b) La pression calculée est 1,34 fois plus grande que la pression selon le modèle.

c) On doit avoir

$$\begin{aligned}P &= \frac{\rho\cdot 8,31\frac{J}{molK}\cdot T}{\mu} \\ 2,36\times 10^{16}Pa &= \frac{152900\frac{kg}{m^3}\cdot 8,31\frac{J}{molK}\cdot 15\,670\,000K}{\mu} \\ \mu &= 0,0008437\end{aligned}$$

On va maintenant trouver la proportion d'hydrogène avec

$$\mu = \frac{1\frac{g}{mol}}{2X + 0,75Y}$$

S'il n'y a que ces de l'hydrogène et de l'hélium, alors on doit avoir $X + Y = 1$ (pour que 100 % de la masse soit constituée de ces 2 gaz). On a donc

$$\mu = \frac{1\frac{g}{mol}}{2X + 0,75Y}$$
$$= \frac{1\frac{g}{mol}}{2X + 0,75(1 - X)}$$
$$= \frac{1\frac{g}{mol}}{1,25X + 0,75}$$

On a donc

$$\mu = \frac{1\frac{g}{mol}}{1,25X + 0,75}$$
$$0,8437\frac{g}{mol} = \frac{1\frac{g}{mol}}{1,25X + 0,75}$$
$$1,1853 = 1,25X + 0,75$$
$$X = 0,348$$

Il y aurait donc 34,8 % d'hydrogène et 65,2 % d'hélium au centre su Soleil.

9. a) La densité serait

$$\rho_{centre} \approx 153\frac{tonnes}{m^3} \cdot \frac{M}{M_\odot} \cdot \frac{R_\odot^3}{R^3}$$
$$\approx 153\frac{tonnes}{m^3} \cdot \frac{1,5M_\odot}{M_\odot} \cdot \frac{R_\odot^3}{(1,35R_\odot)^3}$$
$$\approx 153\frac{tonnes}{m^3} \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{(1,35)^3}$$
$$\approx 93,3\frac{tonnes}{m^3}$$

b) Le Soleil réel a une densité de 153 kg/m³. Donc la densité par rapport à celle du Soleil réel est

$$\frac{93,3\frac{tonnes}{m^3}}{153\frac{tonnes}{m^3}} = 0,609$$

La densité est donc 60,9 % de la densité du Soleil réel.

c) La pression serait

$$
\begin{aligned}
P_{centre} &\approx 2,36\times10^{16}\,Pa\cdot\frac{M^2}{M_\odot^2}\cdot\frac{R_\odot^4}{R^4}\\
&\approx 2,36\times10^{16}\,Pa\cdot\frac{\left(1,5M_\odot\right)^2}{M_\odot^2}\cdot\frac{R_\odot^4}{\left(1,35R_\odot\right)^4}\\
&\approx 2,36\times10^{16}\,Pa\cdot1,5^2\cdot\frac{1}{\left(1,35\right)^4}\\
&\approx 1,60\times10^{16}\,Pa
\end{aligned}
$$

d) Le Soleil réel a une pression centrale de 2,36 x 10^{16} Pa. Donc la pression par rapport à celle du Soleil réel est

$$\frac{1,60\times10^{16}\,Pa}{2,36\times10^{16}\,Pa}=0,677$$

C'est donc 67,7 % de la pression au centre du Soleil réel.

e) La température serait

$$
\begin{aligned}
T_{centre} &\approx 15,7MK\cdot\frac{\mu}{\mu_\odot}\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{R}\\
&\approx 15,7MK\cdot1\cdot\frac{1,5M_\odot}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{\left(1,35R_\odot\right)}\\
&\approx 15,7MK\cdot1\cdot1,5\cdot\frac{1}{1,35}\\
&\approx 17,4MK
\end{aligned}
$$

C'est 17,4 millions de K.

f) Le Soleil actuel a une température de 15,7 x 10^6 K. Donc, la température par rapport à celle du Soleil actuel est

$$\frac{17,4\times10^6\,K}{15,7\times10^6\,K}=1,11$$

La température est donc 1,11 fois plus grande.

10. a) On sait que le rythme sont

$$\text{Rythme de fusion}_{PP} = k_1 T^4$$
$$\text{Rythme de fusion}_{CNO} = k_2 T^{19,9}$$

De plus, on sait qu'il y a égalité à 18,5 millions de kelvins. On a donc

$$1 = \frac{k_2 \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{19,9}}{k_1 \left(1,85 \times 10^7 K\right)^4}$$
$$\frac{k_2}{k_1} = \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{-15,9}$$

Pour avoir un rythme 2 fois plus grand, on doit avoir

$$2 = \frac{k_2 T^{19,9}}{k_1 T^4}$$
$$2 = \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{-15,9} \cdot \frac{T^{19,9}}{T^4}$$
$$2 = \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{-15,9} \cdot T^{15,9}$$
$$2 = \left(\frac{T}{1,85 \times 10^7 K}\right)^{15,9}$$
$$\frac{T}{1,85 \times 10^7 K} = \sqrt[15,9]{2}$$
$$T = 1,932 \times 10^7 K$$

C'est 19,32 millions de kelvins.

b) À 15 670 000 K, on a

$$\text{Rythme de fusion}_{PP} = k_1 T^4$$
$$\text{Rythme de fusion}_{CNO} = k_2 T^{19,9}$$

Le rythme de fusion totale est

$$\text{Rythme de fusion total} = k_1 T^4 + k_2 T^{19,9}$$

La proportion provenant de la réaction PP est donc

$$\frac{\text{Rythme de fusion}_{PP}}{\text{Rythme de fusion total}} = \frac{k_1 T^4}{k_1 T^4 + k_2 T^{19,9}}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1} T^{15,9}}$$

Avec les valeurs on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\text{Rythme de fusion}_{PP}}{\text{Rythme de fusion total}} &= \frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1} T^{15,9}} \\ &= \frac{1}{1 + \left(1,85 \times 10^7 K\right)^{-15,9} \cdot \left(1,567 \times 10^7 K\right)^{15,9}} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1,567 \times 10^7 K}{1,85 \times 10^7 K}\right)^{15,9}} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1,567}{1,85}\right)^{15,9}} \\ &= 0,933\end{aligned}$$

Ainsi, 93,3 % de l'énergie provient de la réaction PP. Il reste donc 6,7 % pour le cycle CNO.

11. Avec un Soleil à 1 masse solaire, le rythme de fusion est

$$\begin{aligned}\text{Rythme de fusion}_0 &\propto \rho_0 T_0^{19,9} \\ &= (\text{constante})\, \rho_0 T_0^{19,9}\end{aligned}$$

Avec un Soleil à 0,9 masse solaire, le rythme de fusion est

$$\text{Rythme de fusion} = (\text{constante})\, \rho T^{19,9}$$

Pour trouver le rythme le rythme à cette masse, il nous faut la densité et la température.

La densité est

$$\begin{aligned}
\rho &\approx 153\tfrac{tonnes}{m^3}\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{R^3}\\
&\approx \rho_0\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{R^3}\\
&\approx \rho_0\cdot\frac{0,9M_\odot}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot^3}{\left(0,924R_\odot\right)^3}\\
&\approx \rho_0\cdot 0,9\cdot\frac{1}{\left(0,924\right)^3}\\
&\approx 1,14\rho_0
\end{aligned}$$

La température est

$$\begin{aligned}
T_{centre} &\approx 15,7MK\cdot\frac{\mu}{\mu_\odot}\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{R}\\
&\approx T_0\cdot 1\cdot\frac{M}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{R}\\
&\approx T_0\cdot 1\cdot\frac{0,9M_\odot}{M_\odot}\cdot\frac{R_\odot}{\left(0,924R_\odot\right)}\\
&\approx T_0\cdot 1\cdot 0,9\cdot\frac{1}{0,924}\\
&\approx 0,974T_0
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\text{Rythme de fusion}}{\text{Rythme de fusion}_0}=\frac{\left(\text{constante}\right)\rho T^{19,9}}{\left(\text{constante}\right)\rho_0 T_0^{19,9}}\\
&=\frac{\rho T^{19,9}}{\rho_0 T_0^{19,9}}\\
&=\frac{1,14\rho_0\left(0,974T_0\right)^{19,9}}{\rho_0 T_0^{19,9}}\\
&=0,679
\end{aligned}$$

12. À 15 millions de kelvins, on a

$$\begin{aligned} kT &= 1{,}38065\times10^{-23}\,\tfrac{J}{K}\cdot 15\,000\,000K \\ &= 2{,}071\times10^{-16}\,J \\ &= 1{,}293keV \end{aligned}$$

Avec cette valeur, l'intégrale

$$N = \left(1{,}084keV\right)^{3/2} N_{tot} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sqrt{E}}{\left(kT\right)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE$$

devient

$$\begin{aligned} N &= \left(1{,}084keV\right)^{3/2} N_{tot} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sqrt{E}}{\left(1{,}293keV\right)^{3/2}} e^{-\frac{E}{1{,}293keV}} dE \\ &= 0{,}7676 N_{tot} \int_{E_1}^{E_2} \sqrt{E}\cdot e^{-\frac{E}{1{,}293keV}} dE \end{aligned}$$

Avec les bornes, on obtient

$$N = 0{,}7676 N_{tot} \int_{3}^{12} \sqrt{E}\cdot e^{-\frac{E}{1{,}293keV}} dE$$

Le code pour cette intégrale sur wolfram est

integrate (x^ 0.5*exp(-x/1.293)) from 3 to 12

Cette intégrale vaut 0,2603.

On a donc

$$\begin{aligned} N &= 0{,}7676 N_{tot}\cdot 0{,}2603 \\ &= 0{,}1998 N_{tot} \end{aligned}$$

Donc, 20,0 % des particules ont une énergie entre 3 et 12 keV.