Solutionnaire du chapitre 14

1. Comme une distance de 300 Mal correspond à 91,97 Mpc, la vitesse de la galaxie est

$$\begin{aligned} v &= HD \\ &= 67,4\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot 91,97 Mal \\ &= 6202\tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

2. On trouve le taux avec les facteurs de conversion

$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273\times 10^{-3} Ga^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 500\tfrac{km/s}{Mpc} &= 500\cdot 1,02273\times 10^{-3} Ga^{-1} \\ &= 500\cdot 1,02273\times 10^{-3} Ga^{-1} \\ &= 0,511 Ga^{-1} \end{aligned}$$

3. On a

Version 1

$$\begin{aligned} z &\approx \frac{H_0}{c} D \\ 0,00436 &\approx \frac{67,4\tfrac{km/s}{Mpc}}{300\,000\tfrac{km}{s}}\cdot D \\ D &\approx 19,4 Mpc \\ D &\approx 63,3 Mal \end{aligned}$$

Version 2

$$z \approx \frac{D}{14{,}51 Gal}$$
$$0{,}00436 \approx \frac{D}{14{,}51 Gal}$$
$$D \approx 0{,}0633 Gal$$
$$D \approx 63{,}3 Mal$$

4. À cette distance, le décalage est

$$z \approx \frac{D}{14{,}51 Gal}$$
$$z \approx \frac{0{,}6 Gal}{14{,}51 Gal}$$
$$z \approx 0{,}0413$$

La longueur d'onde est donc

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda}$$
$$1{,}0413 = \frac{\lambda'}{656{,}11 nm}$$
$$\lambda' = 683{,}2 nm$$

5. Le décalage est

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\lambda'}{\lambda}\\ &= \frac{3136{,}2 nm}{656{,}1 nm}\\ &= 4{,}78\end{aligned}$$

Le facteur d'échelle était donc de

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\delta}\\ &= \frac{1}{4{,}78}\\ &= 0{,}2092\end{aligned}$$

6. La densité était de

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0}\\ &= \frac{1}{(0,6)^3}\cdot 1,61\,\tfrac{m_p}{m^3}\\ &= 7,45\,\tfrac{m_p}{m^3}\end{aligned}$$

7. On a

$$\begin{aligned}\rho_{c0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G}\\ &= \frac{3\cdot\left(100\cdot 3,2409\times10^{-20}\,s^{-1}\right)^2}{8\pi\cdot 6,6743\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}}\\ &= 1,878\times10^{-26}\,\tfrac{kg}{m^3}\\ &= 11,23\,\tfrac{m_p}{m^3}\end{aligned}$$

8. a) Avec un univers plat, on arrive à

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r - H^2$$

On remarque premièrement que cet univers doit avoir une densité très précise qui dépend du taux d’expansion de Hubble. Cette densité est égale à la densité critique puisqu’on doit avoir

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{3}\rho_{r0} &= H_0^2\\ \rho_{r0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G}\end{aligned}$$

Ensuite, puisque

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \qquad \text{et} \qquad \rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4} \qquad \text{et} \qquad \rho_{r0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

l'équation devient

$$0=\frac{8\pi G}{3}\rho_r - H^2$$

$$0=\frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_{r0}}{a^4}-\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2$$

$$0=\frac{8\pi G}{3}\frac{3H_0^2}{8\pi G}\frac{1}{a^4}-\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2$$

$$0=\frac{H_0^2}{a^4}-\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2$$

On peut ensuite trouver le facteur d'échelle en fonction du temps en faisant la solution de cette équation

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2=\frac{H_0^2}{a^4}$$

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=\frac{H_0}{a^2}$$

$$a\frac{da}{dt}=H_0$$

Cette équation est assez facile à résoudre.

$$ada = H_0 dt$$

$$\int ada = \int H_0 dt$$

$$\frac{1}{2}a^2 = H_0 t + Cst$$

Si on prend que t = 0 à la naissance de l'univers (a = 0), cela veut dire que la constante d'intégration est nulle.

En isolant a on arrive à

$$a=\sqrt{2H_0 t}$$

b) Avec la valeur de H_0, on arrive à

$$a=\sqrt{2\cdot 6,89\times 10^{-2} Ga^{-1}\cdot t}$$

Si le facteur d'échelle est 1, alors l'âge est

$$1 = \sqrt{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1} \cdot t_A}$$
$$1 = 2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1} \cdot t_A$$
$$t_A = \frac{1}{2 \cdot 6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1}}$$
$$t_A = 7,26 Ga$$

9. Le facteur d'échelle sera

$$\begin{aligned} a &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{14,80Ga}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1,070 \end{aligned}$$

10. On a

$$a = \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$2 = \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = 24,96Ga$$

Comme nous sommes actuellement à t = 13,80 Ga, cela se produira dans

24,96 Ga – 13,80 Ga = 11,16 Ga

11. Le facteur d'échelle à ce moment était de

$$\begin{aligned} a &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{2Ga}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 0,2386 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ &= \frac{1}{(0,2386)^3} \cdot \left(0,315 \cdot 5,10 \tfrac{m_p}{m^3}\right) \\ &= 118 \tfrac{m_p}{m^3} \end{aligned}$$

12. La densité du vide (qui est constante) est de

$$\begin{aligned} \rho_v &= 0,685 \cdot 5,10 \tfrac{m_p}{m^3} \\ &= 3,4935 \tfrac{m_p}{m^3} \end{aligned}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{1}{a^3}\rho_{m0} \\ 3,4935 \tfrac{m_p}{m^3} &= \frac{1}{a^3} \cdot \left(0,315 \cdot 5,10 \tfrac{m_p}{m^3}\right) \\ a &= 0,7719 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$\begin{aligned} a &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,7719 &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 10,30Ga \end{aligned}$$

(Voici une autre version :

La densité du vide est

$$\rho_v = \Omega_{v0}\rho_{c0}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\rho_m = \frac{1}{a^3}\rho_{m0}$$
$$\Omega_{v0}\rho_{c0} = \frac{1}{a^3}\Omega_{m0}\rho_{c0}$$
$$a = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$a = \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$\sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} = \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} = \sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)$$
$$1 = \sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)$$
$$t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}\sinh^{-1}1$$
$$t = 11,69Ga \cdot \sinh^{-1}1$$
$$t = 10,30Ga$$

C'est un peu plus long, mais ça évite les approximations.)

13. Le taux sera de

$$
\begin{aligned}
H &= 55,8\,\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\
&= 55,8\,\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{14,80Ga}{11,69Ga}\right)}\\
&= 65,4\,\tfrac{km/s}{Mpc}
\end{aligned}
$$

14. On trouve le temps avec

$$
\begin{aligned}
H &= 55,8\,\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\
200\,\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot &= 55,8\,\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\
3,5842 &= \frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\
0,279 &= \tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\\
t &= 11,69Ga\cdot\tanh^{-1}(0,279)\\
t &= 3,35Ga
\end{aligned}
$$

15. a) Le facteur d'échelle à l'émission était de

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\delta}\\
&= \frac{1}{4,78}\\
&= 0,2092
\end{aligned}
$$

Le temps à l'émission était donc de

$$
\begin{aligned}
a &= \left(0,6781\cdot\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}\\
0,2092 &= \left(0,6781\cdot\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}\\
t &= 1,64Ga
\end{aligned}
$$

Le temps entre l'émission et la réception est donc

$$\begin{aligned} t &= 13,80Ga - 1,64Ga \\ &= 12,16Ga \end{aligned}$$

b) La distance actuelle est

$$d = 1,296 \cdot c \int_{1,64}^{13,80} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Wolfram donne

$$d = 23,43Gal$$

c) Comme le facteur d'échelle à l'émission était de 0,2092, la distance à l'émission était de

$$\begin{aligned} D &= ad \\ &= 0,2092 \cdot 23,43Gal \\ &= 4,90Gal \end{aligned}$$

d) On trouve le temps avec

$$d = 1,296 \cdot c \int_{t_e}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Avec un temps d'émission à t_e = 5 Ga et un d de 23,43 Gal, on a

$$23,43Gal = 1,296 \cdot c \int_{5}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$23,43Ga = 1,296 \int_{5}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Il ne reste qu'à trouver t_r. Cela se fait par essai et erreur avec Wolfram. On trouve alors t_r = 31,02 Ga. On verra donc cette lumière dans

$$\begin{aligned} t &= 31,02Ga - 13,80Ga \\ &= 17,22Ga \end{aligned}$$

e) On trouve le temps avec

$$d = 1,296 \cdot c \int_{t_e}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$23,43Gal = 1,296 \cdot c \int_{13,80}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$23,43Ga = 1,296 \int_{13,80}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Il ne reste qu'à trouver t_r. Cela se fait par essai et erreur avec Wolfram. Toutefois, on n'arrive jamais à 23,43 même si on met $t_r = \infty$ (on obtient alors d = 16,69 Gal). Cela signifie qu'on ne verra jamais la lumière émise par ce quasar en ce moment.

16. Pour trouver le décalage, il nous faut le facteur d'échelle à l'émission. Pour connaitre ce facteur d'échelle, il nous faut le temps d'émission de la lumière reçue en ce moment. On trouve ce temps avec

$$d = 1,296 \cdot c \int_{t_e}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$40Gal = 1,296 \cdot c \int_{t_e}^{13,80} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

$$40Ga = 1,296 \int_{t_e}^{13,80} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Il ne reste qu'à trouver t_e. Cela se fait par essai et erreur avec Wolfram. On trouve alors t_e = 0,0433 Ga. À ce moment, le facteur d'échelle est

$$\begin{aligned} a &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{0,0433Ga}{11,69Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 0,01848 \end{aligned}$$

Le décalage serait donc de

$$\delta = \frac{1}{a} \\ = 54,12$$

Ce qui donnerait un z de 53,12.

17. La taille de l'univers visible se trouve avec la lumière émise à t = 0. La distance d parcourue par un photon entre t = 0 et t = 18,8 Ga est

$$\begin{aligned} d &= 1,296 \cdot c \int_{t_e}^{t_r} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt \\ &= 1,296 \cdot c \int_{0}^{18,8} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{-\frac{2}{3}} dt \\ &= 51,30Gal \end{aligned}$$

Toutefois, cette distance est la distance d. La véritable distance est D. Pour la connaitre, il nous faut le facteur d'échelle dans 5 Ga. Ce facteur est

$$\begin{aligned} a &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(0,6781 \cdot \sinh\left(\frac{18,8Ga}{11,69Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 1,382 \end{aligned}$$

La limite de l'univers observable sera donc à une distance de

$$\begin{aligned} D &= ad \\ &= 1,382 \cdot 51,30Gal \\ &= 70,91Gal \end{aligned}$$

18. L'âge de l'univers est donné par la formule

$$t_A = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0} \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}}}$$

Puisque $\Omega_{m0} + \Omega_{v0} = 1$ dans un univers plat, on a

$$t_A = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{\Omega_{v0}}{1-\Omega_{v0}}}$$

Avec H_0 = 0,0689 Ga^{-1} et t_A = 20 Ga, on a

$$20Ga = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}}\,0,0689Ga^{-1}}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{\Omega_{v0}}{1-\Omega_{v0}}}$$
$$20 = \frac{9,67}{\sqrt{\Omega_{v0}}}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{\Omega_{v0}}{1-\Omega_{v0}}}$$

Selon Wolfram, la solution de cette équation est Ω_{v0} = 0,928.

(La commande est solve 20 = (9.67/sqrt(x))*asinh (sqrt(x/(1-x))))

19. La lumière a été émise quand le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1}{8,085} \\ &= 0,1237 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à l'émission est donc de

$$0,1237 = \left(0,678\cdot\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$t = 0,749Ga$$

Alors, la distance est

$$\begin{aligned} d &= 1,296\cdot c\int_{t_e}^{t_r}\left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}dt \\ &= 1,296\cdot c\int_{0,749}^{13,80}\left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}dt \end{aligned}$$

Wolfram nous donne bel et bien 28,85 Gal.