Solutionnaire du chapitre 13

1. a) L'intensité de la lumière est

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{L}{4\pi D^2} \\
&= \frac{126000 \cdot 3,828 \times 10^{26} W}{4\pi \left(860 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)^2} \\
&= 5,79 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}
\end{aligned}
$$

La magnitude est donc

$$
\begin{aligned}
I &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4 m_{bol}} \\
5,79 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4 m_{bol}} \\
m_{bol} &= -0,90
\end{aligned}
$$

b) Avec la poussière, l'intensité baisse selon la formule suivante

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 (10)^{\frac{-D}{2500\,pc}} \\
&= 5,79 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot (10)^{\frac{-(860/3,262)\,pc}{2500\,pc}} \\
&= 4,54 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}
\end{aligned}
$$

La magnitude est donc

$$
\begin{aligned}
I &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4 m_{bol}} \\
4,54 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4 m_{bol}} \\
m_{bol} &= -0,64
\end{aligned}
$$

2. Avec une magnitude de -0,38, l'intensité de la lumière reçue est

$$
\begin{aligned}
I &= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4 m_{bol}} \\
&= 2,52 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2} \cdot 10^{-0,4 \cdot -0,38} \\
&= 3,576 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2}
\end{aligned}
$$

Cette intensité est aussi donnée par

$$\begin{aligned} I &= I_0 10^{-\frac{D}{2500\,pc}} \\ &= \frac{9211\cdot 3,828\times 10^{26}W}{4\pi D^2}\cdot 10^{-\frac{D}{2500\,pc}} \\ &= \frac{2,806\times 10^{29}W}{D^2}\cdot 10^{-\frac{D}{2500\,pc}} \end{aligned}$$

On doit donc résoudre l'équation

$$3,576\times 10^{-8}\,\tfrac{W}{m^2} = \frac{2,805\times 10^{29}W}{D^2}\cdot 10^{-\frac{D}{2500\,pc}}$$

$$D^2 = 7,846\times 10^{36}m^2\cdot 10^{-\frac{D}{2500\,pc}}$$

$$D = 2,801\times 10^{18}m\cdot\left(10^{-\frac{D}{2500\,pc}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D = 2,801\times 10^{18}m\cdot 10^{-\frac{D}{5000\,pc}}$$

$$D = 90,77\,pc\cdot 10^{-\frac{D}{5000\,pc}}$$

Voyons ce que ça donne ici si on suppose que la distance est de 90 pc (C'est une bonne idée de prendre la valeur devant l'exponentielle.)

1re itération $\quad 90,77\,pc\cdot 10^{-\frac{90\,pc}{5000\,pc}} = 87,08\,pc$

2e itération $\quad 90,77\,pc\cdot 10^{-\frac{87,08\,pc}{5000\,pc}} = 87,20\,pc$

3e itération $\quad 90,77\,pc\cdot 10^{-\frac{87,20\,pc}{5000\,pc}} = 87,20\,pc$

La distance est donc de 87,20 pc = 284,4 al.

3. Le temps pour faire une tour est

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\pi r}{v} \\ &= \frac{2\pi \cdot \left(8275 \cdot 3,262 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)}{233\,400 \frac{m}{s}} \\ &= 6,874 \times 10^{15} s \\ &= 217,8 Ma \end{aligned}$$

Puisque le Soleil a une durée de vie de 10,9 Ga, le nombre de tour est

$$\begin{aligned} N &= \frac{10900 Ma}{217,8 Ma} \\ &= 50,0 \end{aligned}$$

Le Soleil fera donc près de 50 tours autour de la galaxie durant sa vie.

4. Voir les réponses à la fin du chapitre.

5. La luminosité d'une étoile de type B0 est donnée par

$$\begin{aligned} M_{bol} &= 2,5 \log\left(\frac{78,8 L_\odot}{L}\right) \\ -7 &= 2,5 \log\left(\frac{78,8 L_\odot}{L}\right) \\ L &= 49720 L_\odot \end{aligned}$$

Comme il y a 0,1 % de N étoiles qui sont de ce type, la luminosité totale des étoiles B est

$$\begin{aligned} L_B &= 49720 L_\odot \cdot 0,001 \cdot N \\ &= 49,72 L_\odot \cdot N \end{aligned}$$

La luminosité d'une étoile de type K0 est donnée par

$$M_{bol} = 2{,}5\log\left(\frac{78{,}8L_\odot}{L}\right)$$
$$5{,}7 = 2{,}5\log\left(\frac{78{,}8L_\odot}{L}\right)$$
$$L = 0{,}414L_\odot$$

Comme il y a 99,9 % de N étoiles qui sont de ce type, la luminosité totale des étoiles K est

$$\begin{aligned} L_K &= 0{,}414L_\odot \cdot 0{,}999 \cdot N \\ &= 0{,}4131L_\odot \cdot N \end{aligned}$$

Le rapport des luminosités est

$$\begin{aligned} \frac{L_B}{L_K} &= \frac{49{,}72L_\odot \cdot N}{0{,}4131L_\odot \cdot N} \\ &= 120 \end{aligned}$$

La luminosité des rares étoiles de type B0 est donc 120 fois plus grande que celles des étoiles de type K0 !

6. a) La masse est

$$\begin{aligned} M_{\text{int}} &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{\left(250\,000\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(50\,000 \cdot 9{,}46\times10^{15}\,m\right)}{6{,}6743\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}} \\ &= 4{,}429\times10^{41}\,kg \\ &= 222{,}7\times10^{9}\,M_\odot \end{aligned}$$

b) Le temps est

$$v = \frac{distance}{temps}$$

$$v = \frac{2\pi r}{t}$$

$$250\,000 \tfrac{m}{s} = \frac{2\pi \cdot \left(50\,000 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)}{t}$$

$$t = 1,189 \times 10^{16} s$$

$$t = 376,7 \times 10^{6} a$$

7. À 8 kpc, la densité est

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4,6 \times 10^{8} \frac{M_\odot}{kpc}}{\left(2,8kpc\right)^2 + r^2} \\ &= \frac{4,6 \times 10^{8} \frac{M_\odot}{kpc}}{\left(2,8kpc\right)^2 + \left(8,18kpc\right)^2} \\ &= 6,15 \times 10^{6} \tfrac{M_\odot}{kpc^3}\end{aligned}$$

Si on change les unités pour obtenir des kg/m³, on arrive à

$$\begin{aligned}\rho &= 6,15 \times 10^{6} \tfrac{M_\odot}{kpc^3} \cdot \left(\frac{1,9885 \times 10^{30} kg}{1M_\odot}\right) \cdot \left(\frac{1kpc}{3262 \cdot 9,46 \times 10^{15} m}\right)^3 \\ &= 4,16 \times 10^{-22} \tfrac{kg}{m^3}\end{aligned}$$

8. a) La masse est

$$\begin{aligned}M_{\text{int}} &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{\left(250\,000 \tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(130\,000 \cdot 9,46 \times 10^{15} m\right)}{6,6743 \times 10^{-11} \tfrac{Nm^2}{kg^2}} \\ &= 1,152 \times 10^{42} kg \\ &= 5,791 \times 10^{11} M_\odot\end{aligned}$$

b) On trouve la luminosité avec la relation de Tully-Fisher

$$\begin{aligned} L &= 3,2\,\tfrac{L_\odot s^4}{km^4}\cdot v_{\max}^4 \\ &= 3,2\,\tfrac{L_\odot s^4}{km^4}\cdot\left(250\,\tfrac{km}{s}\right)^4 \\ &= 1,25\times10^{10}\,L_\odot \end{aligned}$$

c) Le rapport M/L est

$$\begin{aligned} \frac{M}{L} &= \frac{5,791\times10^{11}\,M_\odot}{1,25\times10^{10}\,L_\odot} \\ &= 46,3\,\tfrac{M_\odot}{L_\odot} \end{aligned}$$

d) Le rapport *M/L* des étoiles est aux alentours de 4 $M_\odot/L_\odot$. Cela signifie que la masse des étoiles est

$$\begin{aligned} 4\,\tfrac{M_\odot}{L_\odot} &= \frac{M_{\acute{e}toiles}}{L} \\ 4\,\tfrac{M_\odot}{L_\odot} &= \frac{M_{\acute{e}toiles}}{1,25\times10^{10}\,L_\odot} \\ M_{\acute{e}toiles} &= 5\times10^{10}\,M_\odot \end{aligned}$$

La masse de la matière sombre est donc

$$\begin{aligned} M_{sombre} &= M - M_{\acute{e}toile} \\ &= 5,791\times10^{11}\,M_\odot - 5\times10^{10}\,M_\odot \\ &= 5,291\times10^{11}\,M_\odot \end{aligned}$$

Le rapport des masses est donc

$$\begin{aligned} \frac{M_{sombre}}{M_{\acute{e}toiles}} &= \frac{5,291\times10^{11}\,M_\odot}{5\times10^{10}\,M_\odot} \\ &= 10,6 \end{aligned}$$

9. La masse est

$$\begin{aligned} M &= 3,765\times10^{7}\,M_{\odot}\cdot\left(\frac{\theta_{arc}}{1''}\right)^{2}\cdot\frac{D_{SO}D_{MO}}{1Mal\cdot D_{SM}} \\ &= 3,765\times10^{7}\,M_{\odot}\cdot\left(\frac{1,11''}{1''}\right)^{2}\cdot\frac{10\,000Mal\cdot3000Mal}{1Mal\cdot7000Mal} \\ &= 1,988\times10^{11}\,M_{\odot} \end{aligned}$$

10. La magnitude visuelle absolue est

$$\begin{aligned} \overline{M} &= -2,43\log\left(\frac{P}{10j}\right)-4,05 \\ &= -2,43\log\left(\frac{6,7j}{10j}\right)-4,05 \\ &= -3,63 \end{aligned}$$

Avec la magnitude, on trouve ensuite la distance

$$\begin{aligned} M &= m+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -3,63 &= 27,71+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 60,39Mal \end{aligned}$$

11. Les supernovæ de type I ont une magnitude visuelle absolue de -19,6. Avec la magnitude visuelle, on trouve la distance

$$\begin{aligned} M &= m+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -19,6 &= 18,5+5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 1,36Gal \end{aligned}$$

12. Selon la relation de Tully-Fisher, la luminosité de la galaxie est

$$\begin{aligned} L &= 3,2 \tfrac{L_\odot s^4}{km^4} \cdot v_{\max}^4 \\ &= 3,2 \tfrac{L_\odot s^4}{km^4} \cdot \left(150 \tfrac{km}{s}\right)^4 \\ &= 1,62 \times 10^9 L_\odot \end{aligned}$$

Cette luminosité correspond à la magnitude bolométrique absolue suivante.

$$\begin{aligned} M_{bol} &= 2,5 \log\left(\frac{78,7 L_\odot}{L}\right) \\ &= 2,5 \log\left(\frac{78,7 L_\odot}{1,62 \times 10^9 L_\odot}\right) \\ &= -18,28 \end{aligned}$$

La distance est donc

$$\begin{aligned} M_{bol} &= m_{bol} + 5 \log\left(\frac{32,62 al}{D}\right) \\ -18,3 &= 9,4 + 5 \log\left(\frac{32,62 al}{D}\right) \\ D &= 11,2 Mal \end{aligned}$$

13. On a

$$\begin{aligned} d &< c \Delta t_{observé} \\ d &< 3 \times 10^8 \tfrac{m}{s} \cdot 3600 s \\ d &< 1,08 \times 10^{12} m \\ d &< 7,22 UA \end{aligned}$$

La taille maximale est donc de 7,22 UA.

14. L'étoile survit si le rayon de Schwarzschild est plus grand que la limite de Roche. On a donc

$$R_s > r_{Roche}$$

$$2{,}953km \cdot \left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right) > 2{,}4 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}} \cdot 1R_\odot$$

$$2{,}953km \cdot \left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right) > 2{,}4 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}} \cdot 6{,}957 \times 10^5 km$$

$$\left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right) > \sqrt[3]{\frac{M_{TN}}{1M_\odot}} \cdot 5{,}65 \times 10^5$$

$$\left(\frac{M_{TN}}{1M_\odot}\right)^{\frac{2}{3}} > 5{,}65 \times 10^5$$

$$M_{TN} > 4{,}25 \times 10^8 M_\odot$$

L'étoile survit jusqu'à l'horizon si la masse du trou noir est supérieur à 425 millions de masses solaires.

15. a) Le rythme est

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{M}{t} \\ &= \frac{4{,}2 \times 10^6 M_\odot}{10^8 an} \\ &= 0{,}042 \tfrac{M_\odot}{an}\end{aligned}$$

b) On trouve la luminosité avec

$$\dot{m} = \frac{5L_{TN}}{c^2}$$

Toutefois, il nous le rythme d'accumulation en kg par seconde. Ce rythme est

$$\begin{aligned}\dot{m} &= 0{,}042 \tfrac{M_\odot}{an} \cdot \left(\frac{1an}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s}\right) \cdot \left(\frac{1{,}9885 \times 10^{30} kg}{1M_\odot}\right) \\ &= 2{,}646 \times 10^{21} \tfrac{kg}{s}\end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$\dot{m} = \frac{5L_{TN}}{c^2}$$

$$2,626\times10^{21}\,\tfrac{kg}{s} = \frac{5L_{TN}}{\left(299\,792\,458\,\tfrac{m}{s}\right)^2}$$

$$L_{TN} = 4,73\times10^{37}\,W$$

C’est près de la luminosité des galaxies de Seyfert, mais pas tout à fait. Probablement que la Voie lactée ne fut jamais une galaxie très active.

16. La masse est

$$\begin{aligned} M_{\text{int}} &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{\left(650\,000\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(10\,000\,000 \cdot 9,46\times10^{15}\,m\right)}{6,6743\times10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}} \\ &= 5,988\times10^{44}\,kg \\ &= 3,011\times10^{14}\,M_\odot \end{aligned}$$

17. On a

$$M = 3,765\times10^{7}\,M_\odot \cdot \left(\frac{\theta_{arc}}{1''}\right)^2 \cdot \frac{D_{SO}D_{MO}}{1Mal \cdot D_{SM}}$$

$$10^{13}\,M_\odot = 3,765\times10^{7}\,M_\odot \cdot \left(\frac{\theta_{arc}}{1''}\right)^2 \cdot \frac{5000Mal \cdot 1000Mal}{1Mal \cdot 4000Mal}$$

$$\left(\frac{\theta_{arc}}{1''}\right)^2 = 212,4$$

$$\theta_{arc} = 14,58''$$