Solutionnaire du chapitre 11

1. Si le nuage est uniquement fait d'hydrogène moléculaire, la masse moyenne des molécules est de

$$m = \frac{2 \frac{g}{mol}}{6,0221\times10^{23} \frac{molécules}{mol}} = 3,321\times10^{-24} \frac{g}{molécule}$$

La taille critique est

$$\begin{aligned} R &= \frac{GmM}{5kT} \\ &= \frac{6,6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 3,321\times10^{-27} kg \cdot \left(200 \cdot 1,9885\times10^{30} kg\right)}{5 \cdot 1,381\times10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 20K} \\ &= 6,383\times10^{16} m \\ &= 6,75 al \end{aligned}$$

2. Si le nuage est uniquement fait d'hydrogène moléculaire, la masse moyenne des molécules est de

$$m = \frac{2 \frac{g}{mol}}{6,0221\times10^{23} \frac{molécules}{mol}} = 3,321\times10^{-24} \frac{g}{molécules}$$

La taille critique est

$$\begin{aligned} R &= \frac{GmM}{5kT} \\ &= \frac{6,6743\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 3,321\times10^{-27} kg \cdot \left(500 \cdot 1,9885\times10^{30} kg\right)}{5 \cdot 1,381\times10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 40K} \\ &= 7,979\times10^{16} m \end{aligned}$$

La densité est donc

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{M}{volume} \\ &= \frac{500 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{\frac{4}{3}\pi \cdot \left(7,979 \times 10^{16} m\right)^3} \\ &= 4,673 \times 10^{-19} \tfrac{kg}{m^3} = 1,407 \times 10^{8} \tfrac{molécules}{m^3}\end{aligned}$$

3. a) La taille est

$$\begin{aligned}R &= 35R_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \\ &= 35R_\odot \left(\frac{0,5M_\odot}{M_\odot}\right) \\ &= 17,5R_\odot \\ &= 17,5 \cdot 6,957 \times 10^{8} m \\ &= 1,217 \times 10^{10} m \\ &= 0,081 UA\end{aligned}$$

b) La taille est

$$\begin{aligned}R &= 35R_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \\ &= 35R_\odot \left(\frac{2M_\odot}{M_\odot}\right) \\ &= 70R_\odot \\ &= 70 \cdot 6,957 \times 10^{8} m \\ &= 4,870 \times 10^{10} m \\ &= 0,326 UA\end{aligned}$$

c) La taille est

$$
\begin{aligned}
R &= 35R_{\odot}\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) \\
&= 35R_{\odot}\left(\frac{10M_{\odot}}{M_{\odot}}\right) \\
&= 350R_{\odot} \\
&= 350\cdot 6,957\times 10^{8}m \\
&= 2,435\times 10^{11}m \\
&= 1,628UA
\end{aligned}
$$

4. a) Le temps de contraction est

$$
\begin{aligned}
t_{pms} &= 30Ma\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2,5} \\
&= 30Ma\left(\frac{0,5M_{\odot}}{M_{\odot}}\right)^{-2,5} \\
&= 170Ma
\end{aligned}
$$

b) Le temps de contraction est

$$
\begin{aligned}
t_{pms} &= 30Ma\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2,5} \\
&= 30Ma\left(\frac{2M_{\odot}}{M_{\odot}}\right)^{-2,5} \\
&= 5,30Ma
\end{aligned}
$$

c) Le temps de contraction est

$$
\begin{aligned}
t_{pms} &= 30Ma\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2,5} \\
&= 30Ma\left(\frac{10M_{\odot}}{M_{\odot}}\right)^{-2,5} \\
&= 0,0949Ma
\end{aligned}
$$

5. La limite d'Eddington de cette étoile est

$$\begin{aligned} L &= 3,28\times10^4 L_\odot \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \\ &= 3,28\times10^4 L_\odot \cdot \left(\frac{120M_\odot}{M_\odot}\right) \\ &= 3,28\times10^4 L_\odot \cdot (120) \\ &= 3\,936\,000 L_\odot \end{aligned}$$

Comme sa luminosité est de 5 000 000 L⊙, cette étoile a dépassé la limite d'Eddington.

6. On dépasse la limite si

$$L > 3,28\times10^4 L_\odot \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

Avec la formule liant la luminosité et masse sur la séquence principale, on dépasse la limite si

$$L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,8} > 3,28\times10^4 L_\odot \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2,8} &> 3,28\times10^4 \\ \frac{M}{M_\odot} &> \sqrt[2,8]{3,28\times10^4} \\ M &> \sqrt[2,8]{3,28\times10^4}\, M_\odot \\ M &> 41,0 M_\odot \end{aligned}$$

7. a) La masse d'hydrogène par m³ est

$$152900kg \cdot 0,346 = 52\,900kg$$

Le nombre de noyaux d'hydrogène est

$$N_H = \frac{52\,900 kg}{1,661\times 10^{-27} kg} = 3,185\times 10^{31}$$

Le nombre de moles d'hydrogène est donc

$$n_H = \frac{3,184\times 10^{31}}{6,022\times 10^{23}} = 5,289\times 10^{7}$$

La masse d'hélium par m³ est

$$152900 kg \cdot 0,654 = 100\,000 kg$$

Le nombre de noyaux d'hélium est

$$N_{He} = \frac{100\,000 kg}{6,6465\times 10^{-27} kg} = 1,504\times 10^{31}$$

Le nombre de moles d'hydrogène est donc

$$n_{He} = \frac{1,505\times 10^{31}}{6,022\times 10^{23}} = 2,498\times 10^{7}$$

Comme chaque hydrogène a aussi ajouté un électron et chaque hélium a ajouté 2 électrons, le nombre total de moles de particule par m³ est

$$\begin{aligned} n &= n_H + n_{He} + n_e \\ &= n_H + n_{He} + \left(n_H + 2n_{He}\right) \\ &= 2n_H + 3n_{He} \\ &= 2\cdot 5,289\times 10^{7} + 3\cdot 2,498\times 10^{7} \\ &= 18,07\times 10^{7} \end{aligned}$$

b) La pression est donc

$$\begin{aligned} P_{thermique} &= \frac{n}{V} RT \\ &= \frac{18,07\times 10^{7} mol}{1 m^3} \cdot 8,314 \tfrac{J}{mol\cdot K} \cdot 15\,670\,000 K \\ &= 2,355\times 10^{16} Pa \end{aligned}$$

c) La pression de radiation est

$$\begin{aligned} P_{rad} &= 2,522\times10^{-16}\,\tfrac{N}{m^2K^4}\cdot T^4 \\ &= 2,522\times10^{-16}\,\tfrac{N}{m^2K^4}\cdot\left(15\,670\,000K\right)^4 \\ &= 1,521\times10^{13}\,Pa \end{aligned}$$

d) Le rapport des pressions est

$$\begin{aligned} \frac{P_{thermique}}{P_{rad}} &= \frac{2,354\times10^{16}\,\tfrac{N}{m^2}}{1,521\times10^{13}\,\tfrac{N}{m^2}} \\ &= 1548 \end{aligned}$$

8. La luminosité est

$$\begin{aligned} L &= 2,3\times10^5 L_\odot\left(\frac{M_{\text{coeur d'hélium}}}{M_\odot}\right)^6 \\ &= 2,3\times10^5 L_\odot\left(\frac{0,6M_\odot}{M_\odot}\right)^6 \\ &= 2,3\times10^5 L_\odot\left(0,6\right)^6 \\ &= 10\,731 L_\odot \end{aligned}$$

9. On trouve l'énergie libérée à partir des masses avec

$$Q = \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u}$$

Fusion du carbone

$$\begin{aligned} Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(12,000\ 000u + 4,002\ 603u\right) - \left(15,994\ 915u\right)\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(0,007\ 688u\right)\cdot 931,5\,\tfrac{MeV}{u} \\ &= 7,16MeV \end{aligned}$$

Fusion de l'oxygène

$$\begin{aligned} Q &= \left(m_{avant} - m_{après}\right) \cdot 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(m_C + m_{He}\right) - \left(m_O\right)\right) \cdot 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(\left(15,994\ 915u + 4,002\ 603u\right) - \left(19,992\ 440u\right)\right) \cdot 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= \left(0,005\ 078u\right) \cdot 931,5 \tfrac{MeV}{u} \\ &= 4,73 MeV \end{aligned}$$

10. La luminosité sera

$$\begin{aligned} L &= \sigma 4\pi R^2 T^4 \\ &= 5,67 \times 10^{-8} \tfrac{W}{m^2K^4} \cdot 4\pi \cdot \left(55 \cdot 6,955 \times 10^8 m\right)^2 \cdot \left(3700K\right)^4 \\ &= 1,954 \times 10^{29} W \\ &= 510 L_\odot \end{aligned}$$

11. a) L'énergie est

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg \cdot \left(5 \times 10^6 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 9,94 \times 10^{43} J \end{aligned}$$

b) Le pourcentage est

$$\frac{9,9425 \times 10^{43} J}{10^{46} J} \cdot 100\% = 0,994\%$$

c) La quantité de mouvement des couches est

$$\begin{aligned} p &= mv \\ &= 4 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg \cdot 5 \times 10^6 \tfrac{m}{s} \\ &= 3,977 \times 10^{37} \tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

À mesure que les couches passent dans le milieu interstellaire, elles accumulent de la masse. Pour que la vitesse diminue à 10 km/s, il faut que la masse totale soit de

$$\begin{aligned}
p' &= p \\
m'v' &= 3,977\times10^{37}\,\tfrac{kgm}{s} \\
m'\cdot10^{4}\,\tfrac{m}{s} &= 3,977\times10^{37}\,\tfrac{kgm}{s} \\
m' &= 3,977\times10^{33}\,kg
\end{aligned}$$

Ce qui est près de 2000 masses solaires. Cette masse est la masse totale, c'est-à-dire la masse des couches additionnée à celle du milieu interstellaire qui a été ramassée par les couches. Pour trouver la masse du milieu interstellaire qui a été ramassée par les couches, il faut soustraire la masse des couches.

$$\begin{aligned}
m_{\text{interstallaire}} &= 3,977\times10^{33}\,kg - 4\cdot1,9885\times10^{30}\,kg \\
&= 3,969\times10^{33}\,kg
\end{aligned}$$

Pour avoir autant de masse, le volume de milieu interstellaire est

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{M}{vol} \\
2\times10^{-19}\,\tfrac{kg}{m^3} &= \frac{3,969\times10^{33}\,kg}{Vol} \\
Vol &= 1,98\times10^{52}\,m^3
\end{aligned}$$

Comme les couches éjectées balaient une sphère, on doit trouver le rayon d'une sphère qui a ce volume.

$$\begin{aligned}
\tfrac{4}{3}\pi R^3 &= 1,98\times10^{52}\,m^3 \\
R &= 1,67\times10^{17}\,m
\end{aligned}$$

Cette distance est 17,7 al.

12. La séquence principale se termine à une magnitude de 20. Déterminons premièrement à quelle magnitude absolue cela correspond

$$
\begin{aligned}
M &= m + 5\log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\
&= 20 + 5\log\left(\frac{32,62al}{33\,900al}\right) \\
&= 4,92
\end{aligned}
$$

La luminosité de l'étoile qui vient juste de mourir est donc

$$
\begin{aligned}
M &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\
4,92 &= 2,5\log\left(\frac{78,8L_\odot}{L}\right) \\
L &= 0,851L_\odot
\end{aligned}
$$

La masse de cette étoile est donc

$$
\begin{aligned}
L &= L_\odot\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3,8} \\
0,851L_\odot &= L_\odot\left(\frac{M}{1M_\odot}\right)^{3,8} \\
M &= 0,958M_\odot
\end{aligned}
$$

La durée de vie de cette étoile est donc

$$
\begin{aligned}
t_{vie} &= 10,9Ga\cdot\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2,8} \\
&= 10,9Ga\cdot\left(\frac{0,958M_\odot}{M_\odot}\right)^{-2,8} \\
&= 12,3Ga
\end{aligned}
$$

L'amas a donc environ 12,3 milliards d'années.