Les bases

La base 10

Dans notre façon de compter, nous travaillons en base 10, ce qui signifie qu'après 9, il n'y a pas de nouveau symbole pour représenter dix. On utilise alors deux nombres 1 et 0. La position du 1 nous indique 10. Ainsi on écrit les nombres dans l'ordre

•			1
••			2
•••			3
••••			4
•••••			5
•••••	•		6
•••••	••		7
•••••	•••		8
•••••	••••		9
•••••	•••••		10
•••••	•••••	•	11
•••••	•••••	••	12
•••••	•••••	•••	13
•••••	•••••	••••	14
•••••	•••••	•••••	15

La notation positionnelle nous permet de représenter tous les nombres sans qu'il soit nécessaire qu'il existe un symbole pour chaque valeur. Quand on écrit 57, c'est que ce nombre représente 5 fois 10 + 7. On peut aller plus loin avec ce système. Ainsi le nombre 8976223 représente

$$8976223 = 8\times10^6 + 9\times10^5 + 7\times10^4 + 6\times10^3 + 2\times10^2 + 2\times10^1 + 3$$

Mais pourquoi utilise-t-on cette notation à partir de 10? Fort probablement parce que nous avons 10 doigts… Reste que cette valeur est arbitraire et qu'elle peut être différente de 10. Par exemple, on pourrait compter en base 7. Dans ce cas, il y a un symbole pour les 6 premiers nombres et une fois rendu à 7, on utilise la notation positionnelle pour obtenir

•	1
••	2
•••	3
••••	4
•••••	5
••••• •	6
••••• ••	10
••••• •••	11
••••• ••••	12
••••• •••••	13
••••• ••••• •	14
••••• ••••• ••	15
••••• ••••• •••	16
••••• ••••• ••••	20
••••• ••••• •••••	21

On voit que dans ce cas, c'est à partir de sept qu'on utilise la notation positionnelle. Ainsi le nombre 53 en base 7 vaut 5 fois 7 + 3, ce qui donne 38 en base 10. Dans la notation en base 7, chaque nombre représente une puissance de 7. Le nombre 3641623 en base 7 représente

$$3641623_7 = 3\times 7^6 + 6\times 7^5 + 4\times 7^4 + 1\times 7^3 + 6\times 7^2 + 2\times 7^1 + 3$$

Il existe une notation pour indiquer qu'un nombre est écrit avec une autre base que 10. Cette notation est

$$3641623_7$$

Quand la base est 10, l'indice 10 est optionnel.

On peut aussi avoir des bases plus grandes que 10. Cependant, il faut plus de symboles pour les chiffres que les 10 symboles utilisés normalement. Par exemple en base 12, il faut 12 symboles avant d'arriver à 12 pour utiliser la notation positionnelle. Dans ce cas, on utilise les lettres de l'alphabet. Ainsi on a

•	1
••	2
•••	3
••••	4
•••••	5
••••• •	6
••••• ••	7
••••• •••	8
••••• ••••	9
••••• •••••	*a*
••••• ••••• •	*b*
••••• ••••• ••	10
••••• ••••• •••	11
••••• ••••• ••••	12
••••• ••••• •••••	13

Donc en base 12, a vaut 10_{10} et b vaut 11_{10}. Par conséquent, le nombre $a5b4_{12}$ vaut

$$\mathrm{a5b4}_{12} = 10\times 12^3 + 5\times 12^2 + 11\times 12^1 + 4$$

La plus petite base possible est deux. On alors les nombres

•	1
••	10
•••	11
••••	100
•••••	101
••••• •	110
••••• ••	111
••••• •••	1000
••••• ••••	1001
••••• •••••	1010
••••• ••••• •	1011
••••• ••••• ••	1100
••••• ••••• •••	1101
••••• ••••• ••••	1110
••••• ••••• •••••	1111

Il s'agit du système binaire. Vous pouvez peut-être maintenant comprendre la joke

There are only 10 types of people in this world : those who understand binary and those who don't

En fait, la base 10 est loin d'être la meilleure base. Comme 10 n'est divisible que par 2 et 5, seules les divisions par 2 et 5 sont faciles à faire en base 10. Si on travaillait en base 12, les divisions par 2,3 4, et 6 seraient beaucoup plus faciles à faire. Ainsi, en bases 12, un nombre est divisible par deux s'il se termine par 0,2, 4,6, 8 ou a. Il est divisible par 3 s'il se termine par 3, 6, 9 ou 0. Il est divisible par 4 s'il se termine par 4, 8 ou 0. Il est divisible par 6 s'il se termine par 6 ou 0.

Ce n'est pas pour rien que les Babyloniens travaillaient en base 60. Ça rend les divisions par 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 et 30 faciles.

Comment passer d'une base à l'autre

Il est relativement facile de connaître la valeur en base 10 d'un nombre écrit avec une base différente de 10. Puisque notre calculatrice fait ses calculs en base 10, nous n'avons qu'à faire le calcul de la décomposition du nombre

$$3641623_7 = 3\times 7^6 + 6\times 7^5 + 4\times 7^4 + 1\times 7^3 + 6\times 7^2 + 2\times 7^1 + 3 = 464047$$

$$a5b4_{12} = 10\times 12^3 + 5\times 12^2 + 11\times 12^1 + 4 = 18136$$

C'est un peu plus long si on veut connaître la valeur en une base différente de 10. Par exemple, que devient le nombre 216 en base 4? Pour y arriver, il faut connaître les puissances de 4 qui sont 1, 4, 16, 64, 256… De tout évidente, il est inutile d'utiliser les puissances valant 256 et plus puisque notre nombre est inférieur à ces puissances. On commence donc avec 4^4=64. Si on divise 216 par 64, on obtient 3 avec un reste de 24. Notre premier chiffre est donc 3. Notre deuxième chiffre se trouve avec le reste (24) et la puissance inférieure (16). Si on divise 24 par 16 on obtient 1 avec un reste de 8. Le deuxième chiffre est donc 1. On obtient l'autre chiffre toujours en divisant le reste (8) par la puissance inférieure (4) pour obtenir 2 et un reste de 0. On obtient le dernier chiffre en divisant le reste (0) par la puissance inférieure (1) pour obtenir 0. On a donc que $216 = 3120_4$

EXERCICES

1. Déterminez en base 10,

a) 47_8

b) 47_9

c) 47_{16}

d) BEE_{16}

2. Trouver la représentation de 47

a) en base 2

b) en base 8

c) en base 9

d) en base 16

Les opérations simples dans d'autres bases

Nous pouvons facilement faire des additions et des multiplications en base 10 simplement parce qu'on nous a appris par cœur les tables d'addition et de multiplication au primaire. La technique est la même avec les autres bases, sauf qu'il faut y penser un peu plus, car un ne sait pas les tables par cœur.

Tentons de faire l'addition de 253_7 et de 631_7. Bien sûr, on peut transformer chacun des nombres en base 10, faire l'addition avec la calculatrice ou mentalement (puisqu'on connait bien les tables d'addition en base 10). On peut aussi faire l'addition avec une calculatrice, si on peut changer la base sur la calculatrice. On peut mettre n'importe quelle base sur certaines calculatrices (rare) et toutes les calculatrices scientifiques ont les bases 2 (bin), 8 (oct), 10 et 16 (hex). On fait le calcul comme suit. On commence par les unités, comme 3 + 1 fait 4, on a

$$\begin{array}{r} 253 \\ +631 \\ \hline 4 \end{array}$$

Puis on additionne les dizaines. Cette addition est 5 + 3. Elle ne fait pas 8, car ce symbole n'existe pas en base 7. Cette addition donne 11 en base 7 (1 fois 7 + 1). On place donc un 1 et on retient 1 pour les « centaines »

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}53 \\ +631 \\ \hline 14 \end{array}$$

Il reste à faire l'addition des centaines : 1 + 2 + 6, ce qui donne 12 et base 7 (1 fois 7 + 2). On a alors le résultat final

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}53 \\ +631 \\ \hline 1214 \end{array}$$

Allons-y avec un autre exemple. $121_3 + 2102_3$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 121 \\ +2102 \\ \hline 10000 \end{array}$$

Pour les unités, on a 1 + 2 =10. Pour les dizaines, on a 1+2+0 = 10. Pour les centaines on a 1 + 1 + 1 = 10 et pour les milliers on a 1+2 = 10.

Allons-y avec un dernier exemple. $1011_2 + 1110_2$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 1011 \\ +1110 \\ \hline 11001 \end{array}$$

Pour les unités, on a 1 + 0 =1. Pour les dizaines, on a 1+1 = 10. Pour les centaines on a 1 + 0+ 1 = 10 et pour les milliers on a 1+1+1 = 11.

Pour faire une multiplication, ça peut être bon de faire une table des multiplications dans cette base. C'est une bonne idée si la base n'est pas trop élevée. Si on travaille avec des bases élevées comme 16, la table peut être très longue à faire et c'est peut-être mieux de transformer les nombres en base 10, faire la multiplication sur la calculatrice et remettre le tout dans la base d'origine. Tentons le coup en base 3. La table est

	1	*2*
1	1	2
2	2	11

Essayons donc de faire 121_3 X 2102_3. La technique est identique à ce qu'on fait en base 10, mais on utilise la table de multiplication faite précédemment pour la base 3. Si on fait la première multiplication (celle avec les unités) on a

$$\begin{array}{r} 2102 \\ \times \quad 121 \\ \hline 2102 \end{array}$$

Ce qui est assez évident puisqu'il s'agit d'une multiplication par 1. Si on fait ensuite la multiplication par les dizaines, on a 2 X 2102 on obtient 11211. On a alors

$$\begin{array}{r} 2102 \\ \times \quad 121 \\ \hline 2102 \\ 11211 \end{array}$$

Finalement, on fait la multiplication par les centaines, on a

$$\begin{array}{r} 2102 \\ \times \quad 121 \\ \hline 2102 \\ 11211 \\ 2102 \end{array}$$

Il ne reste qu'à faire l'addition pour obtenir

$$\begin{array}{r} 2102 \\ \times \quad 121 \\ \hline 2102 \\ 11211 \\ 2102 \\ \hline 1102112 \end{array}$$

C’est assez long. Assez pour se demander si ça n’aurait pas été plus court de passer par la base 10 pour pouvoir utiliser sa calculatrice…

Exemple AMQ 1989 : Un nombre s’écrit XYZ en base 7 et ZYX en base 9. Quel est ce nombre en base 10?

On a

$$X \cdot 7^2 + Y \cdot 7 + Z = Z \cdot 9^2 + Y \cdot 9 + X$$

Ce qui se simplifie à

$$48X = 2Y + 80Z$$
$$X = \frac{Y + 40Z}{24}$$

On pourrait penser qu’il y a une infinité de solutions à cette équation, mais ce n’est pas le cas puisque seules les valeurs entières sont permises pour X Y et Z. De plus, les valeurs de X Y et Z sont entre 0 et 6 puisqu’elles sont utilisées pour écrire un nombre en base 7. Il faut donc trouver une combinaison de Y + 40Z qui est divisible par 24

Si Z =1, Y + 40Z vaut entre 40 et 46, ce qui n’est pas divisible par 24. Z = 1 est donc impossible.

Si Z =2, Y + 40Z vaut entre 80 et 86, ce qui n’est pas divisible par 24. Z = 2 est donc impossible.

Si Z =3, Y + 40Z vaut entre 120 et 126. Comme 120 (obtenu avec Y = 0) est divisible par 24, c’est une solution possible. Dans ce cas X = 5

Si Z =4, Y + 40Z vaut entre 160 et 166, ce qui n’est pas divisible par 24. Z = 4 est donc impossible.

Si Z =5, Y + 40Z vaut entre 200 et 206, ce qui n’est pas divisible par 24. Z = 5 est donc impossible.

Si Z =6, Y + 40Z vaut entre 240 et 246. Comme 240 (obtenu avec Y = 0) est divisible par 24, c’est une solution possible. Sauf que dans ce cas, X = 10, ce qui n’est pas permis.

La seule solution est donc X = 5, Y = 0 et Z = 3. On a donc le nombre 503_7, qui vaut

$$5 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 3 = 248$$

ou 305_9, qui vaut

$$3 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9 + 5 = 248$$