

Solutionnaire du chapitre 16

1. Comme une distance de 300 Mal correspond à 91,97 Mpc, la vitesse de la galaxie est

$$\begin{aligned}v &= HD \\ &= 67,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \cdot 91,97 \text{ Mal} \\ &= 6235 \frac{\text{km}}{\text{s}}\end{aligned}$$

2. On trouve le taux avec les facteurs de conversion

$$1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 1,02273 \times 10^{-3} \text{ Ga}^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned}500 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} &= 500 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} \text{ Ga}^{-1} \\ &= 500 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} \text{ Ga}^{-1} \\ &= 0,511 \text{ Ga}^{-1}\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}z &= \frac{H_0}{c} D \\ 0,00436 &= \frac{67,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}{3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} D \\ D &= 19,29 \text{ Mpc}\end{aligned}$$

4. À cette distance, le décalage est

$$\begin{aligned}z &= \frac{H_0}{c} D \\ &= \frac{67,8 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}{3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \cdot \frac{600 \text{ Mal}}{3,262 \frac{\text{al}}{\text{pc}}} \\ &= 0,04157\end{aligned}$$

La longueur d'onde est donc

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

$$1,04157 = \frac{\lambda'}{656,1 \text{ nm}}$$

$$\lambda' = 683,4 \text{ nm}$$

5. Le décalage est

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

$$= \frac{3136,2 \text{ nm}}{656,1 \text{ nm}}$$

$$= 4,78$$

Le facteur d'échelle était donc de

$$a = \frac{1}{\delta}$$

$$= \frac{1}{4,78}$$

$$= 0,2092$$

6. La densité était de

$$\rho_m = \frac{1}{a^3} \rho_{m0}$$

$$= \frac{1}{(0,6)^3} 5,162 \frac{m_p}{m^3}$$

$$= 23,90 \frac{m_p}{m^3}$$

7. On a

$$\begin{aligned}
 \rho_{c0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \\
 &= \frac{3(100 \cdot 3,2409 \times 10^{-20} \text{ s}^{-1})^2}{8\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \\
 &= 1,879 \times 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 &= 11,23 \frac{m_p}{\text{m}^3}
 \end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{t}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 2 &= \left(\frac{t}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 t &= 27,18 \text{ Ga}
 \end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,61 \text{ Ga}$, cela se produira dans

$$27,18 \text{ Ga} - 9,61 \text{ Ga} = 17,57 \text{ Ga}$$

9. Le facteur d'échelle sera de

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{t}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(\frac{10,61 \text{ Ga}}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 1,0682
 \end{aligned}$$

10. À ce moment, le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{t}{9,61 \text{Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(\frac{2 \text{Ga}}{9,61 \text{Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 0,3512
 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la densité était de

$$\begin{aligned}
 \rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\
 &= \frac{1}{(0,3512)^3} 5,162 \frac{m_p}{m^3} \\
 &= 119,2 \frac{m_p}{m^3}
 \end{aligned}$$

11. On a

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{2}{3t} \\
 30 \cdot 1,02273 \times 10^{-3} \text{Ga}^{-1} &= \frac{2}{3t} \\
 t &= 21,73 \text{Ga}
 \end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,61 \text{ Ga}$, cela se produira dans

$$21,73 \text{ Ga} - 9,61 \text{ Ga} = 12,12 \text{ Ga}$$

12. On a

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{2}{3t} \\
 &= \frac{2}{3 \cdot 10,61 \text{Ga}} \\
 &= 0,06283 \text{Ga}^{-1}
 \end{aligned}$$

En km/s/Mpc, cela donne

$$H = 0,06236 \text{Ga}^{-1} \frac{1 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}}{1,02273 \times 10^{-3} \text{Ga}^{-1}} = 61,44 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

13. a) Cette lumière est partie quand le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{1}{4,78} \\ &= 0,2092 \end{aligned}$$

Trouvons maintenant l'âge de l'univers quand on avait ce facteur d'échelle

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{t}{9,61 \text{Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,2092 &= \left(\frac{t}{9,61 \text{Ga}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 0,9196 \text{Ga} \end{aligned}$$

La lumière est donc partie quand l'univers avait un âge de 0,9196 Ga et elle arrive maintenant, quand l'univers a un âge de 9,61 Ga. Elle voyage donc depuis 8,69 Ga.

b) La distance est

$$\begin{aligned} d &= 28,83 \text{Gal} \left(1 - \sqrt{a_e} \right) \\ &= 28,83 \text{Gal} \left(1 - \sqrt{0,2092} \right) \\ &= 15,64 \text{Gal} \end{aligned}$$

c) Au moment de l'émission, le quasar était 4,78 fois plus près. Il était donc à 3,27 Gal.

d) Trouvons le facteur d'échelle lors de la réception de la lumière

$$\begin{aligned} 15,64 \text{Gal} &= 28,83 \text{Gal} \left(\sqrt{a_r} - 1 \right) \\ a_r &= 2,3793 \end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce moment sera de

$$a = \left(\frac{t}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$2,3793 = \left(\frac{t}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 35,27Ga$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,61$ Ga, cela se produira dans

$$35,27 \text{ Ga} - 9,61 \text{ Ga} = 25,66 \text{ Ga}$$

e) Comme le facteur d'échelle sera de 2,3793, le quasar sera 2,3793 fois plus loin qu'aujourd'hui. Il sera donc à 37,21 Gal de nous.

f) Le facteur d'échelle à l'émission est

$$a_e = \left(\frac{t}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{5Ga}{9,61Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 0,6469$$

On trouve ensuite le facteur d'échelle à la réception,

$$d = 28,83Gal \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e} \right)$$

$$15,64Gal = 28,84Gal \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{0,6469} \right)$$

$$a_r = 1,8138$$

De là, on trouve l'âge de l'univers à la réception

$$a = \left(\frac{t}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1,8078 = \left(\frac{t}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 23,48 \text{ Ga}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,61 \text{ Ga}$, cela se produira dans

$$23,48 \text{ Ga} - 9,61 \text{ Ga} = 13,87 \text{ Ga}$$

14. a) On a

$$d = 3ct_A^{2/3} t_r^{1/3}$$

$$45 \text{ Gal} = 3c(9,61 \text{ Ga})^{2/3} t_r^{1/3}$$

$$15 \text{ Ga} = (9,61 \text{ Ga})^{2/3} t_r^{1/3}$$

$$t_r = 36,54 \text{ Ga}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 9,61 \text{ Ga}$, cela se produira dans

$$36,54 \text{ Ga} - 9,61 \text{ Ga} = 26,93 \text{ Ga}$$

b) À ce moment, le facteur d'échelle sera de

$$a = \left(\frac{t}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{36,54 \text{ Ga}}{9,61 \text{ Ga}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2,436$$

La galaxie sera donc 2,436 fois plus loin qu'en ce moment. Elle sera donc à $2,436 \times 45 \text{ Gal} = 109,6 \text{ Gal}$.

15. a) Avec un univers plat, on arrive à

$$0 = \frac{8\pi G}{3} \rho_r - H^2$$

On remarque premièrement que cet univers doit avoir une densité très précise qui dépend du taux d'expansion de Hubble. Cette densité est égale à la densité critique puisqu'on doit avoir

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{3} \rho_{r0} &= H_0^2 \\ \rho_{r0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \end{aligned}$$

Ensuite, puisque

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad \text{et} \quad \rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4} \quad \text{et} \quad \rho_{r0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

L'équation devient

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{8\pi G}{3} \rho_r - H^2 \\ 0 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{r0}}{a^4} - \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \\ 0 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{3H_0^2}{8\pi G} \frac{1}{a^4} - \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \\ 0 &= \frac{H_0^2}{a^4} - \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

On peut ensuite trouver le facteur d'échelle en fonction du temps en faisant la solution de cette équation

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 &= \frac{H_0^2}{a^4} \\ \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= \frac{H_0}{a^2} \\ a \frac{da}{dt} &= H_0 \end{aligned}$$

Cette équation est assez facile à résoudre.

$$\begin{aligned}
 da &= H_0 dt \\
 \int da &= \int H_0 dt \\
 \frac{1}{2} a^2 &= H_0 t + Cst
 \end{aligned}$$

Si on prend que $t = 0$ à la naissance de l'univers ($a = 0$), cela veut dire que la constante d'intégration est nulle.

En isolant a on arrive à

$$a = \sqrt{2H_0 t}$$

b) Avec la valeur de H_0 , on arrive à

$$a = \sqrt{2(6,93 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1})t}$$

Si le facteur d'échelle est 1, alors l'âge est

$$\begin{aligned}
 1 &= \sqrt{2(6,93 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1})t_A} \\
 1 &= 2(6,93 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1})t_A \\
 t_A &= \frac{1}{2(6,93 \times 10^{-2} \text{Ga}^{-1})} \\
 t_A &= 7,215 \text{Ga}
 \end{aligned}$$

16. La valeur est

$$\begin{aligned}
 a_{\max} &= \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1} \\
 &= \frac{1,2}{1,2 - 1} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

17. Le facteur d'échelle sera

$$\begin{aligned}
 a &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{t}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{14,80Ga}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 1,070
 \end{aligned}$$

18. On a

$$\begin{aligned}
 a &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{t}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 2 &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{t}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &\quad t = 24,87Ga
 \end{aligned}$$

Comme nous sommes actuellement à $t = 13,80$ Ga, cela se produira dans

$$24,87 \text{ Ga} - 13,80 \text{ Ga} = 11,07 \text{ Ga}$$

19. Le facteur d'échelle à ce moment était de

$$\begin{aligned}
 a &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{t}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{2Ga}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 0,2378
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\
 &= \frac{1}{(0,2378)^3} \left(0,308 \cdot 5,162 \frac{m_p}{m^3} \right) \\
 &= 128,5 \frac{m_p}{m^3}
 \end{aligned}$$

20. La densité du vide est de

$$\begin{aligned}\rho_v &= 0,692 \cdot 5,162 \frac{m_p}{m^3} \\ &= 3,572 \frac{m_p}{m^3}\end{aligned}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\ 3,572 \frac{m_p}{m^3} &= \frac{1}{a^3} \left(0,308 \cdot 5,162 \frac{m_p}{m^3} \right) \\ a &= 0,7635\end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$\begin{aligned}a &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{t}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ 0,7635 &= \left(0,667 \sinh \left(\frac{t}{11,56Ga} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\ t &= 10,19Ga\end{aligned}$$

(Voici une meilleure version :

La densité du vide est

$$\rho_v = \Omega_v \rho_{c0}$$

On doit donc avoir la même densité de matière. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{1}{a^3} \rho_{m0} \\ \Omega_v \rho_{c0} &= \frac{1}{a^3} \Omega_m \rho_{c0} \\ a &= \sqrt[3]{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}}\end{aligned}$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est donné par

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0 t}{2} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 \sqrt[3]{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} &= \left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0 t}{2} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \\
 \sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} &= \sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0 t}{2} \right) \\
 1 &= \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0 t}{2} \right) \\
 t &= \frac{2}{3\sqrt{\Omega_v} H_0} \sinh^{-1} 1 \\
 t &= 11,56Ga \sinh^{-1} 1 \\
 t &= 10,19Ga
 \end{aligned}$$

C'est un peu plus long, mais ça évite les approximations.)

21. Le taux sera de

$$\begin{aligned}
 H &= 56,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \frac{1}{\tanh \left(\frac{t}{11,56Ga} \right)} \\
 &= 56,4 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \frac{1}{\tanh \left(\frac{14,80Ga}{11,56Ga} \right)} \\
 &= 65,84 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}
 \end{aligned}$$

22. L'âge de l'univers est donné par la formule

$$1 = \left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0 t_A}{2} \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

Puisque $\Omega_m + \Omega_v = 1$, on a

$$1 = \left(\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0}{2} t_A \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_v}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0}{2} t_A \right)$$

$$1 = \sqrt{\frac{1-\Omega_v}{\Omega_v}} \sinh \left(\frac{3\sqrt{\Omega_v} H_0}{2} t_A \right)$$

Avec $H_0 = 0,0934 \text{ Ga}^{-1}$ et $t_A = 20 \text{ Ga}$, on a

$$1 = \sqrt{\frac{1-\Omega_v}{\Omega_v}} \sinh(2,079\sqrt{\Omega_v})$$

Selon Maple, la solution de cette équation est $\Omega_v = 0,93$.

N.B. Sur Maple, la commande est

$$\text{solve} \left(1 = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot \sinh(2.079 \cdot \sqrt{x}) \right)$$

Sur le site, la commande est

$$\text{solve } 1 = \sqrt{(1-x)/x} \cdot \sinh(2.079 \cdot \sqrt{x})$$

23. La lumière a été émise quand le facteur d'échelle était de

$$a = \frac{1}{1+z}$$

$$= \frac{1}{8,085}$$

$$= 0,1237$$

L'âge de l'univers à l'émission est donc de

$$0,1237 = \left(0,667 \sinh \left(\frac{t}{11,56 \text{ Ga}} \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 0,753 \text{ Ga}$$

Alors, le site internet nous donne 28,89 Gal.