

Solutionnaire du chapitre 14

1. On trouve l'énergie libérée à partir des masses avec

$$Q = (m_{\text{avant}} - m_{\text{après}}) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u}$$

a) On a

$$\begin{aligned} Q &= (m_{\text{avant}} - m_{\text{après}}) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= ((m_C + m_{He}) - (m_O)) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= ((12,000\,000\,u + 4,002\,603\,u) - (15,994\,915\,u)) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= (0,007\,688\,u) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= 7,16 \text{MeV} \end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned} Q &= (m_{\text{avant}} - m_{\text{après}}) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= ((m_C + m_{He}) - (m_O)) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= ((15,994\,915\,u + 4,002\,603\,u) - (19,992\,440\,u)) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= (0,005\,078\,u) \times 931,5 \frac{\text{MeV}}{u} \\ &= 4,73 \text{MeV} \end{aligned}$$

2. La luminosité sera

$$\begin{aligned} L &= \sigma 4\pi R^2 T^4 \\ &= 5,67 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 4\pi \cdot (55 \cdot 6,955 \times 10^8 \text{m})^2 (3700 \text{K})^4 \\ &= 1,954 \times 10^{29} \text{W} \\ &= 510 L_{\odot} \end{aligned}$$

3. Le rayon est

$$\begin{aligned}
 R &= 0,01R_{\odot} \sqrt[3]{\frac{0,7M_{\odot}}{M}} \\
 &= 0,01R_{\odot} \sqrt[3]{\frac{0,7M_{\odot}}{0,6M_{\odot}}} \\
 &= 0,01R_{\odot} \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,6}} \\
 &= 0,0105R_{\odot}
 \end{aligned}$$

4. a) On trouve la luminosité avec

$$R = 33,3R_{\odot} \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}} \left(\frac{1000K}{T} \right)^2}$$

On a déjà la température, mais il nous manque le rayon. Ce rayon est

$$\begin{aligned}
 R &= 0,01R_{\odot} \sqrt[3]{\frac{0,7M_{\odot}}{M}} \\
 &= 0,01R_{\odot} \sqrt[3]{\frac{0,7M_{\odot}}{0,8M_{\odot}}} \\
 &= 0,01R_{\odot} \sqrt[3]{\frac{0,7}{0,8}} \\
 &= 0,009565R_{\odot}
 \end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$\begin{aligned}
 R &= 33,3R_{\odot} \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}} \left(\frac{1000K}{T} \right)^2} \\
 0,009565R_{\odot} &= 33,3R_{\odot} \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}} \left(\frac{1000K}{30\,000K} \right)^2} \\
 2,872 \times 10^{-4} &= \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}} \left(\frac{1}{30} \right)^2} \\
 0,2585 &= \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}}} \\
 L &= 0,067L_{\odot}
 \end{aligned}$$

b) La grandeur du champ gravitationnel est

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{GM}{R^2} \\
 &= \frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 0,8 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{(0,009565 \cdot 6,597 \times 10^8 m)^2} \\
 &= 2,398 \times 10^6 \frac{N}{kg}
 \end{aligned}$$

c) La hauteur caractéristique de l'atmosphère est

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{RT}{\mu g} \\
 &= \frac{8,31 \frac{J}{molK} \cdot 30\,000 K}{0,001 \frac{kg}{mol} \cdot 2,398 \times 10^6 \frac{N}{kg}} \\
 &= 104 m
 \end{aligned}$$

5. Le rapport des luminosités est

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)}$$

Si l'étoile est 10 000 fois plus lumineuse, alors on a $I_2 = 10\,000 I_1$. On a donc

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{10\,000} &= 10^{0,4(m_2 - m_1)} \\
 10^{-4} &= 10^{0,4(m_2 - m_1)} \\
 -4 &= 0,4(m_2 - m_1) \\
 -10 &= m_2 - m_1 \\
 m_2 &= m_1 - 10
 \end{aligned}$$

Cela signifie que la magnitude baisse de 10.

6. La quantité d'hydrogène est

$$\begin{aligned}
 M_H &= \frac{10^{38} J}{6,4 \times 10^{14} \frac{J}{kg}} \\
 &= 1,5 \times 10^{23} kg
 \end{aligned}$$

Cela représente 2,6 % de la masse de la Terre.

- 7.** Puisque la sphère de matière est passée d'un rayon nul à un rayon de 8'' d'arc en 8 ans, ω est 1''/an. En radian par seconde, ω est

$$\begin{aligned}\omega &= 1''/an \\ &= \left(\frac{1}{3600}\right) \frac{^\circ}{an} \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} \cdot \frac{1an}{365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60s} \\ &= 1,536 \times 10^{-14} \frac{rad}{s}\end{aligned}$$

La distance est donc de

$$\begin{aligned}D &= \frac{v}{\omega_{(rad/s)}} \\ &= \frac{1700 \times 10^3 \frac{m}{s}}{1,536 \times 10^{-14} \frac{rad}{s}} \\ &= 1,107 \times 10^{19} m \\ &= 1170 a.l.\end{aligned}$$

- 8.** Sachant que la magnitude absolue de la supernova est de -19,6, on trouve la distance avec

$$\begin{aligned}M &= m + 5 \log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ -19,6 &= 8,9 + 5 \log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ D &= 16,3Mal\end{aligned}$$

- 9.** La limite de visibilité étant d'une magnitude de 6, on trouve la distance maximale avec

$$M = m + 5 \log \left(\frac{32,62al}{D} \right)$$

$$-19,6 = 6 + 5 \log \left(\frac{32,62al}{D} \right)$$

$$D = 4,3Mal$$

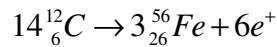
10. a) L'énergie gravitationnelle est

$$U = -\frac{3 GM^2}{5 R}$$

$$= -\frac{3 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} (2 \times 10^{30} kg)^2}{5 \cdot 5,5 \times 10^6 m}$$

$$= -2,9 \times 10^{43} J$$

b) L'énergie libérée par une réaction



est

$$Q = (m_{avant} - m_{après}) \times 931,5 \frac{MeV}{u}$$

$$= (14 \cdot 12u - 3 \cdot 55,9349375u) \times 931,5 \frac{MeV}{u}$$

$$= (168u - 167,8048125u) \times 931,5 \frac{MeV}{u}$$

$$= (0,1951875u) \times 931,5 \frac{MeV}{u}$$

$$= 181,82 MeV$$

Pour trouver le nombre de réaction, trouvons le nombre d'atome de carbone 12. Ce nombre est

$$N_C = \frac{2 \times 10^{30} kg}{0,012 \frac{g}{mol}} \cdot 6,02 \times 10^{23} \frac{atomes}{mol} = 1,00 \times 10^{56}$$

Comme il faut 14 atomes de carbone pour faire 1 réaction, le nombre de réaction est

$$N = \frac{N_C}{14} = \frac{1,00 \times 10^{56}}{14} = 7,17 \times 10^{54}$$

Puisque chaque réaction donne 181,82 MeV, on a

$$\begin{aligned} E &= 7,17 \times 10^{54} \cdot 181,82 \text{ MeV} \\ &= 7,17 \times 10^{54} \cdot 181,82 \text{ MeV} \cdot 1,602 \times 10^{-13} \frac{\text{J}}{\text{MeV}} \\ &= 2,09 \times 10^{44} \text{ J} \end{aligned}$$

c) La somme des deux énergies

$$\begin{aligned} E &= U_g + Q \\ &= -2,9 \times 10^{43} \text{ J} + 2,09 \times 10^{44} \text{ J} \\ &= 1,8 \times 10^{44} \text{ J} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, il y a assez d'énergie pour disperser l'étoile.

11. a) L'énergie est

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} mv^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg} \cdot \left(5 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ &= 9,94 \times 10^{43} \text{ J} \end{aligned}$$

b) Le pourcentage est

$$\frac{9,9425 \times 10^{43} \text{ J}}{10^{46} \text{ J}} \cdot 100\% = 0,994\%$$

c) La quantité de mouvement des couches est

$$\begin{aligned} p &= mv \\ &= 4 \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg} \cdot 5 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 3,977 \times 10^{37} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \end{aligned}$$

À mesure que les couches passent dans le milieu interstellaire, elles accumulent de la masse. Pour que la vitesse diminue à 10 km/s, il faut que la masse totale soit de

$$\begin{aligned}
 p' &= p \\
 m'v' &= 3,977 \times 10^{37} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \\
 m' \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} &= 3,977 \times 10^{37} \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \\
 m' &= 3,977 \times 10^{33} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Ce qui est près de 2000 masses solaires. Cette masse est la masse totale, c'est-à-dire la masse des couches additionnée à celle du milieu interstellaire qui a été ramassée par les couches. Pour trouver la masse du milieu interstellaire qui a été ramassée par les couches, il faut soustraire la masse des couches.

$$\begin{aligned}
 m_{\text{interstellaire}} &= 3,977 \times 10^{33} \text{ kg} - 4 \cdot 1,9885 \times 10^{30} \text{ kg} \\
 &= 3,969 \times 10^{33} \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Pour avoir autant de masse, le volume de milieu interstellaire est

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{M}{\text{vol}} \\
 2 \times 10^{-19} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} &= \frac{3,969 \times 10^{33} \text{ kg}}{\text{Vol}} \\
 \text{Vol} &= 1,98 \times 10^{52} \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Comme les couches éjectées balagent une sphère, on doit trouver le rayon d'une sphère qui a ce volume.

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{3} \pi R^3 &= 1,98 \times 10^{52} \text{ m}^3 \\
 R &= 1,67 \times 10^{17} \text{ m}
 \end{aligned}$$

Cette distance est 17,7 al.

12. a) Le rayon est

$$\begin{aligned}
 R &= 11 \text{ km} \sqrt[3]{\frac{1,4 M_{\odot}}{M}} \\
 &= 11 \text{ km} \sqrt[3]{\frac{1,4 M_{\odot}}{2 M_{\odot}}} \\
 &= 11 \text{ km} \sqrt[3]{\frac{1,4}{2}} \\
 &= 9,8 \text{ km}
 \end{aligned}$$

b) La densité est

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{M}{\text{volume}} \\ &= \frac{4 \times 10^{30} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi (9800 \text{ m})^3} \\ &= 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\end{aligned}$$

c) La vitesse de libération est

$$\begin{aligned}v_{\text{lib}} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 4 \times 10^{30} \text{ kg}}{9800 \text{ m}}} \\ &= 2,3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

C'est quand même près de 80% de la vitesse de la lumière !

13. a) On trouve la luminosité avec

$$R = 33,3 R_{\odot} \sqrt{\frac{L}{1 L_{\odot}} \left(\frac{1000 \text{ K}}{T} \right)^2}$$

On a déjà la température, mais il nous manque le rayon. Ce rayon est

$$\begin{aligned}R &= 11 \text{ km} \sqrt[3]{\frac{1,4 M_{\odot}}{M}} \\ &= 11 \text{ km} \sqrt[3]{\frac{1,4 M_{\odot}}{2,5 M_{\odot}}} \\ &= 11 \text{ km} \sqrt[3]{\frac{1,4}{2,5}} \\ &= 9,067 \text{ km}\end{aligned}$$

La luminosité est donc

$$\begin{aligned}
 R &= 33,3R_{\odot} \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}} \left(\frac{1000K}{T}\right)^2} \\
 9067m &= 33,3R_{\odot} \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}} \left(\frac{1000K}{1\,000\,000K}\right)^2} \\
 3,914 \times 10^{-7} &= \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}} \left(\frac{1}{1000}\right)^2} \\
 0,3914 &= \sqrt{\frac{L}{1L_{\odot}}} \\
 L &= 0,157L_{\odot}
 \end{aligned}$$

b) La grandeur du champ gravitationnel est

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{GM}{R^2} \\
 &= \frac{6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 2 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg}{(9067m)^2} \\
 &= 3,229 \times 10^{12} \frac{N}{kg}
 \end{aligned}$$

c) La hauteur caractéristique de l'atmosphère est

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{RT}{\mu g} \\
 &= \frac{8,31 \frac{J}{molK} \cdot 1\,000\,000K}{0,001 \frac{kg}{mol} \cdot 3,229 \times 10^{12} \frac{N}{kg}} \\
 &= 0,0026m \\
 &= 2,6mm
 \end{aligned}$$

14. Selon la conservation du moment cinétique, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{R^2}{T} &= \frac{R'^2}{T'} \\
 \frac{(6,371 \times 10^6 m)^2}{86\,400s} &= \frac{(0,015m)^2}{T'} \\
 T' &= 4,79 \times 10^{-13} s
 \end{aligned}$$

15. a) On trouve le rayon avec la troisième loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_c}$$

$$(7\,603\,200\text{s})^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2 \times 10^{30} \text{kg}}$$

$$r = 5,803 \times 10^{10} \text{m}$$

b) La puissance est

$$P = \frac{32G^4 m^2 M_c^3}{5c^5 r^5}$$

$$= \frac{32 \cdot (6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})^4 (3,3 \times 10^{23} \text{kg})^2 (2 \times 10^{30} \text{kg})^3}{5 (3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5 (5,803 \times 10^{10} \text{m})^5}$$

$$= 69,2 \text{W}$$

c) Le rythme de diminution est

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64G^3 mM_c^2}{5c^5 r^3}$$

$$= -\frac{64 (6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})^3 (3,3 \times 10^{23} \text{kg}) (2 \times 10^{30} \text{kg})^2}{5 (3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5 (5,803 \times 10^{10} \text{m})^3}$$

$$= -1,06 \times 10^{-20} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) Le rythme de diminution est

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi m}{5c^5} \sqrt{\frac{G^5 M_c^3}{r^5}}$$

$$= -\frac{192\pi (3,3 \times 10^{23} \text{kg})}{5 (3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5} \sqrt{\frac{(6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})^5 (2 \times 10^{30} \text{kg})^3}{(5,803 \times 10^{10} \text{m})^5}}$$

$$= -2,08 \times 10^{-24}$$

e) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi}{5c^5} mM_c^{2/3} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

On a alors

$$T^{5/3} dT = -\frac{192\pi}{5c^5} mM_c^{2/3} (2\pi G)^{5/3} dt$$

$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -\frac{192\pi}{5c^5} mM_c^{2/3} (2\pi G)^{5/3} t$$

On trouve la constante en sachant qu'à $t = 0$, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -\frac{192\pi}{5c^5} mM_c^{2/3} (2\pi G)^{5/3} t$$

On peut alors trouver le temps

$$\frac{3(4\,320\,000s)^{8/3}}{8} - \frac{3(7\,603\,200s)^{8/3}}{8} =$$

$$-\frac{192\pi(3,3 \times 10^{23} \text{ kg})(2 \times 10^{30} \text{ kg})^{2/3} (2\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})^{5/3} t}{5(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5}$$

$$6,526 \times 10^{17} s^{8/3} = -6,110 \times 10^{-13} s^{5/3} \cdot t$$

$$t = 1,06 \times 10^{30} s$$

$$t = 3,38 \times 10^{22} \text{ ans}$$

16. a) On trouve la distance avec la troisième loi de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_{\text{tot}}}$$

$$(360\,000s)^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 10 \times 10^{30} \text{ kg}}$$

$$r = 1,2988 \times 10^{10} \text{ m}$$

b) La puissance est

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5} \\ &= \frac{32 \cdot (6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2})^4 (4 \times 10^{30} kg)^2 (6 \times 10^{30} kg)^3}{5 (3 \times 10^8 \frac{m}{s})^5 (1,2988 \times 10^{10} m)^5} \\ &= 4,89 \times 10^{20} W\end{aligned}$$

c) Le rythme de diminution est

$$\begin{aligned}\left(\frac{dT}{dt}\right) &= -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3} \\ &= \frac{192\pi (4 \times 10^{30} kg)(6 \times 10^{30} kg)}{5 (3 \times 10^8 \frac{m}{s})^5 (10 \times 10^{30} kg)^{1/3}} \left(\frac{2\pi (6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2})}{(360\,000s)}\right)^{5/3} \\ &= 7,13 \times 10^{-15}\end{aligned}$$

d) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

On a alors

$$\begin{aligned}T^{5/3} dT &= -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3}} (2\pi G)^{5/3} dt \\ \frac{3T^{8/3}}{8} + cst &= -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3}} (2\pi G)^{5/3} t\end{aligned}$$

On trouve la constante en sachant qu'à $t = 0$, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3}} (2\pi G)^{5/3} t$$

On peut alors trouver le temps

$$\begin{aligned} \frac{3(36\,000s)^{8/3}}{8} - \frac{3(360\,000s)^{8/3}}{8} &= \\ &= -\frac{192\pi (4 \times 10^{30} \text{ kg})(6 \times 10^{30} \text{ kg})}{5(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5 (10 \times 10^{30} \text{ kg})^{1/3}} \left(2\pi (6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})\right)^{5/3} t \\ 2,45 \times 10^{14} s^{8/3} &= -1,299 \times 10^{-5} s^{5/3} \cdot t \\ t &= 1,89 \times 10^{19} s \\ t &= 599 \times 10^9 \text{ ans} \end{aligned}$$

17. a) On trouve a avec la troisième loi de Kepler

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\text{tot}}} \\ (36\,000s)^2 &= \frac{4\pi^2 a^3}{6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 10 \times 10^{30} \text{ kg}} \\ a &= 2,798 \times 10^9 \text{ m} \end{aligned}$$

b) La puissance est

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \\ &= \frac{32 \cdot (6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})^4 (4 \times 10^{30} \text{ kg})^2 (6 \times 10^{30} \text{ kg})^3}{5(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5 (2,798 \times 10^9 \text{ m})^5 (1-0,8^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}0,8^2 + \frac{37}{96}0,8^4\right) \\ &= 3,762 \times 10^{25} \text{ W} \cdot \frac{5821}{1875} \\ &= 1,168 \times 10^{26} \text{ W} \end{aligned}$$

c) Le rythme de diminution est

$$\begin{aligned} \left(\overline{\frac{dT}{dt}}\right) &= -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3} (1-e^2)^{7/2}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \\ &= \frac{192\pi (4 \times 10^{30} \text{ kg})(6 \times 10^{30} \text{ kg})}{5(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5 (10 \times 10^{30} \text{ kg})^{1/3} (1-e^2)^{7/2}} \left(\frac{2\pi (6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})}{36\,000\text{s}}\right)^{5/3} \frac{5821}{1875} \\ &= 3,671 \times 10^{-11} \end{aligned}$$

e) On va trouver la période en fonction du temps avec

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3} (1-e^2)^{7/2}} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \\ T^{5/3} dT &= -k dt \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} k &= \frac{192\pi m_1 m_2}{5c^5 (m_1 + m_2)^{1/3} (1-e^2)^{7/2}} (2\pi G)^{5/3} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right) \\ &= \frac{192\pi (4 \times 10^{30} \text{ kg})(6 \times 10^{30} \text{ kg})}{5(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^5 (10 \times 10^{30} \text{ kg})^{1/3} (1-0,8^2)^{7/2}} \left(2\pi (6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2})\right)^{5/3} \frac{5821}{1875} \\ &= 1,4408 \times 10^{-3} \text{ s}^{5/3} \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{3T^{8/3}}{8} + cst = -kt$$

On trouve la constante en sachant qu'à $t = 0$, la période correspond à la période actuelle (qu'on va appeler T_0). On a donc

$$\frac{3T_0^{8/3}}{8} + cst = 0$$

Notre équation est donc

$$\frac{3T^{8/3}}{8} - \frac{3T_0^{8/3}}{8} = -kt$$

On peut alors trouver le temps

$$\begin{aligned}\frac{3(3\,600s)^{8/3}}{8} - \frac{3(36\,000s)^{8/3}}{8} &= -1,441 \times 10^{-3} s^{5/3} \cdot t \\ 5,287 \times 10^{11} s^{8/3} &= -1,441 \times 10^{-3} s^{5/3} \cdot t \\ t &= 3,669 \times 10^{14} s \\ t &= 11,6 \times 10^6 a\end{aligned}$$

18. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_s &= \frac{2GM}{c^2} \\ &= \frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,98 \times 10^{24} kg}{(3 \times 10^8 \frac{m}{s})^2} \\ &= 8,87 mm\end{aligned}$$

19. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_s &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times 1M_\odot \\ &= 2,953 km\end{aligned}$$

Le rapport des temps est donc

$$\begin{aligned}\Delta t_{espace} &= \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} \\ &= \frac{1an}{\sqrt{1 - \frac{2,953 km}{8 km}}} \\ &= 1,259 an\end{aligned}$$

20. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_s &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times 1M_\odot \\ &= 2,953 km\end{aligned}$$

Le rapport des longueurs est donc

$$\begin{aligned}\Delta L_{\text{espace}} &= \Delta L \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \\ 50m &= \Delta L \sqrt{1 - \frac{2,953km}{8km}} \\ \Delta L &= 62,95m\end{aligned}$$

21. L'angle de déviation est

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{4GM}{bc^2} \\ &= \frac{4 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot (2,19 \cdot 1,9885 \times 10^{30} kg)}{(1,73 \cdot 6,955 \times 10^8 m) \cdot (3 \times 10^8 \frac{m}{s})^2} \\ &= 1,07 \times 10^{-5} rad \\ &= 2,21''\end{aligned}$$

22. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}R_S &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times M \\ &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times 1M_\odot \\ &= 2,953km\end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{espace}} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} \\ &= \frac{450nm}{\sqrt{1 - \frac{2,953km}{8km}}} \\ &= 567nm\end{aligned}$$

23. Le rayon de Schwarzschild est

$$\begin{aligned}
 R_s &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times M \\
 &= 2,953 \frac{km}{M_\odot} \times 2M_\odot \\
 &= 5,906km
 \end{aligned}$$

Le changement de longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned}
 \lambda_{espace} &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} \\
 &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{5,906km}{13km}}} \\
 &= 1,354 \cdot \lambda
 \end{aligned}$$

Le décalage est donc

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\
 &= \frac{1,354\lambda}{\lambda} \\
 &= 1,354
 \end{aligned}$$

24. La distance minimale d'approche est

$$\begin{aligned}
 r_{déchire} &= 320km \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{M}{1M_\odot}\right)} \\
 &= 320km \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{20M_\odot}{1M_\odot}\right)} \\
 &= 869km
 \end{aligned}$$

Comme le rayon de Schwarzschild est de

$$\begin{aligned}
 R_s &= 2,953km \cdot \left(\frac{M}{1M_\odot}\right) \\
 &= 2,953km \cdot 20 \\
 &= 59,06km
 \end{aligned}$$

La distance minimale d'approche est de 14,7 fois le rayon de Schwarzschild.

25. Ici on veut que

$$r_{\text{déchire}} < R_S$$

Cela donne

$$320\text{km} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)} < 2,953\text{km} \cdot \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)$$

Si on isole M , on arrive à

$$108 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)} < \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)$$

$$108^3 \cdot \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right) < \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)^3$$

$$108^3 < \left(\frac{M}{1M_{\odot}}\right)^2$$

$$1128M_{\odot} < M$$

La masse minimale est donc de 1128 masses solaires.

26. La séquence principale se termine à une magnitude de 20. Déterminons premièrement à quelle magnitude absolue cela correspond

$$\begin{aligned} M &= m + 5 \log\left(\frac{32,62al}{D}\right) \\ &= 20 + 5 \log\left(\frac{32,62al}{33\,900al}\right) \\ &= 4,92 \end{aligned}$$

La luminosité de l'étoile qui vient juste de mourir est donc

$$M = 2,5 \log \left(\frac{78,8L_{\odot}}{L} \right)$$

$$4,92 = 2,5 \log \left(\frac{78,8L_{\odot}}{L} \right)$$

$$L = 0,851L_{\odot}$$

La masse de cette étoile est donc

$$L = M^{3,8}$$

$$0,851 = M^{3,8}$$

$$M = 0,958$$

La durée de vie de cette étoile est donc

$$t_{vie} = 10,9Ga \times \frac{M}{L}$$

$$= 10,9Ga \times \frac{0,958}{0,851}$$

$$= 12,3Ga$$

L'amas a donc environ 12,3 milliards d'années.